5.06 (492) A

Q57
.H63A7
*

FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound at
A.M.N.H.
1908

4/19/31 - J. M.
LIBRARY
OF NATURAL HISTORY
5.06.(492)A

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

J. BOSSCHA,

SECRÉTAIRE,

avec la collaboration des Membres de la Société.

SÉRIE II, TOME XII.

LA HAYE
MARTINUS NIJHOFF
1907.

IMPR. JOH. ENSCHEDÉ ET FILS — HARLEM

TABLE DES MATIÈRES.

W. H. Keesom. Contributions à la connaissance de la surface ψ de van der Waals. *Suite*..... Page 1
W. Kapteyn. Sur une classe particulière d'équations différentielles linéaires et homogènes du second ordre..... „ 110
A. Pannekoek. Sur le spectre des étoiles..... „ 127
W. P. Jorissen et W. E. Ringer. Actions chimiques des rayons du radium..... „ 157
C. Schoute. Sur le phénomène de Thomson dans le mercure..... „ 175
M. H. Kamerlingh Onnes et ses collaborateurs. Contributions à la connaissance de la surface ψ de van der Waals. *Suite*..... „ 191
J. Bosscha. Simon Marius. Réhabilitation d'un astronome calomnié.
I. Introduction. Le Mémoire de M. J. Klug..... „ 258
II. Les observations des Satellites de Jupiter consignées dans le Sidereus Nuncius de Galilée..... „ 280
III. Les Constellations des Satellites de Jupiter prédites par Galilée dans ses Lettres Solaires..... „ 294
J. A. C. Oudemans. Occultations et éclipses mutuelles des Satellites de Jupiter en 1908..... „ 308
D. J. Korteweg. Sur les divers états d'équilibre de corps flottants ayant la forme d'un parallélipipède rectangle, dont l'axe longitudinal est parallèle à la surface liquide..... „ 362
J. J. van Laar. Sur l'allure des courbes spinodales et des courbes de plissement pour des mélanges binaires de substances normales. „ 389
W. Einthoven. L'enregistrement des bruits du cœur de l'homme à l'aide du galvanomètre à corde..... „ 401
J. D. van der Waals. Une remarque relative à la théorie de la surface ψ pour des mélanges binaires..... „ 412
J. D. van der Waals. La forme de l'isotherme empirique dans la condensation d'un mélange binaire..... „ 418
H. Kamerlingh Onnes et ses collaborateurs. Contributions à la connaissance de la surface ψ de van der Waals..... „ 423
W. H. Julius. La distribution variable de la lumière dans les bandes de dispersion et sa signification pour la spectroscopie et l'astro-physique..... „ 459
H. Haga. Sur la polarisation des rayons Roentgen et des rayons secondaires..... „ 482
H. Haga. Sur un cas remarquable d'absorption sélective des rayons Roentgen..... „ 488
J. Bosscha. Simon Marius. Réhabilitation d'un astronome calomnié. *Suite.*
IV. Les observations et les Tables de Simon Marius..... „ 490
V. Les phases de Mercure découvertes par Simon Marius..... „ 518
Programme de la Société pour l'anneé 1907..... „ I—XV

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

CONTRIBUTIONS À LA CONNAISSANCE DE LA SURFACE ψ DE VAN DER WAALS. (*suite*) [1])

Isothermes de mélanges d'oxygène et d'anhydride carbonique

PAR

W. H. KEESOM. [2])

Introduction.

Dans ses recherches sur l'allure des isothermes de mélanges d'hydrogène et d'anhydride carbonique, M. Verschaffelt [3]) a déterminé une portion de la courbe des points de plissement et de la courbe des points de contact critique, notamment la portion voisine du point critique de l'anhydride carbonique pur. Cette portion était peu étendue, parce que l'élévation rapide de la pression avec la proportion d'hydrogène n'avait pas permis à M. Verschaffelt d'observer les phénomènes critiques de mélanges contenant plus de 0,2 mol. gr. d'hydrogène.

Voilà pourquoi il m'a paru important de faire une étude semblable

[1]) Voir ces *Archives*. (2), 11, 358, 1906.

[2]) Traduction de sa Dissertation, Amsterdam et Leyden 1904. Elle a été publiée par parties dans *Versl. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam*, 30 nov. 1901, pp. 331—345, 29 mars 1902, pp. 782—792; 26 sept. 1903, pp. 391—414; 31 oct. 1903, pp. 533—567 et 28 nov. 1903, pp. 616—625; ainsi que comme nos. 75, 79 et 88 des *Comm. phys. lab. Leiden.* Les considérations théoriques des chapp. 7 et 8 ont fait l'objet des nos. V et VI des Contributions à la connaissance de la surface ψ.

[3]) Voir chap. IV des Contributions à la connaissance de la surface ψ; ces *Archives*, (2), 11, 403, 1906.

des mélanges de deux substances normales, chimiquement simples, à températures critiques fort différentes, et pour lesquelles on pouvait donc s'attendre à observer une séparation bien nette des deux courbes critiques, mais choisies en outre de telle façon qu'il fût possible de suivre l'allure de ces courbes sur une plus grande étendue. Comme telles j'ai choisi l'oxygène et l'anhydride carbonique. Je prévoyais en quelque sorte que pour ces substances la courbe de plissement atteindrait son maximum au-dessus de — 40° (point de congélation du mercure), de sorte qu'une notable partie des courbes en question pourrait être déterminée par la méthode ordinaire de CAILLETET; cette méthode a l'avantage d'une grande simplicité dans les appareils, fort désirable dans des recherches où la pression atteint de hautes valeurs.

L'anhydride carbonique a sur l'éthylène, qui aurait l'avantage de rester liquide jusqu'à des températures fort basses, l'avantage de s'obtenir aisément à l'état pur et d'avoir fait déjà l'objet de maintes recherches; sa température critique est d'ailleurs plus élevée. De plus, les mélanges d'oxygène et d'anhydride carbonique fournissent l'occasion d'examiner la solubilité d'un solide dans un gaz au voisinage de l'état critique, au moyen d'un solide bien connu dans les états liquide et gazeux.

Pour ce qui regarde la possibilité d'une absorption d'oxygène par le mercure, il eût été préférable d'employer de l'azote; mais il était à craindre qu'avec ce gaz le maximum de pression de plissement ne tombât au-dessous — 40°.

M. KAMERLINGH ONNES [1]) a tâché d'obtenir, entre les observations et la théorie des mélanges développée par M. VAN DER WAALS à l'aide de la surface ψ, un accord meilleur que celui que l'on obtient en faisant usage de l'équation d'état, établie par M. VAN DER WAALS en 1873. A cet effet, dans la construction de la surface ψ, il a uniquement fait usage de la loi des états correspondants, dont il a admis qu'elle s'appliquait également à des mélanges; il a donc déduit l'équation d'état des mélanges de celle trouvée, par voie empirique, pour une substance pure, et des éléments critiques des mélanges, déduits de l'observation. Pour soumettre à l'épreuve cette extension de la loi des états correspondants, il m'a semblé désirable non seulement d'obtenir des données

---

[1]) Chap. I des Contributions à la connaissance etc.; ces *Archives*, (2), 11, 358, 1906.

relatives aux phénomènes de condensation et aux points de plissement et de contact critique, mais encore de déterminer quelques isothermes au voisinage des températures correspondant à ces points. Afin de rendre les circonstances aussi avantageuses que possible pour la comparaison des mélanges avec une substance pure, j'ai déterminé quelques isothermes de l'anhydride carbonique pur dans le même tube piézométrique que celui dans lequel j'ai examiné les mélanges. J'ai eu l'occasion à ce propos de déterminer avec une plus grande certitude quelques grandeurs relatives à l'état critique, dont la connaissance est importante pour la théorie des mélanges.

Afin de pouvoir rapporter les volumes au volume normal théorique, j'ai fait un examen spécial de la façon dont les mélanges s'écartent de la loi de MARIOTTE sous la pression ordinaire.

J'avais l'intention de soumettre à l'examen des mélanges dont la proportion d'oxygène augmenterait graduellement de 0,1 jusqu'à 0,5; mais, dans le cours de mes recherches, je reconnus que, pour un mélange dont la teneur moléculaire était de 0,3, les observations aux hautes pressions étaient troublées par une variation du volume normal de la quantité de substance employée [1]); j'ai alors cessé provisoirement mes observations.

Une des questions importantes de la théorie des mélanges, d'après M. VAN DER WAALS, est de savoir quelles valeurs doivent être attribuées aux grandeurs a et b. On trouvera au chapitre 6 des données, obtenues par l'application de la loi des états correspondants, et qui pourront probablement être utiles pour l'examen de cette question.

Au chapitre 7 j'ai fait usage de cette même loi pour déduire quelques formules, exprimant la variation des éléments du point de plissement et du point de contact critique avec la composition, pour des mélanges ne contenant qu'une faible proportion d'une des composantes; ces formules ont été soumises au contrôle de l'observation. J'ai traité de la même façon, dans les chapitres 8 et 9, l'augmentation de la pression pendant la condensation et l'influence de la pesanteur sur les phénomènes au voisinage du point de plissement d'un pareil mélange.

---

[1]) Voir chap. 2, § 2.

I. Le calibrage des tubes manométrique et piézométrique.

Fig. 1.

1. Les mélanges ont été examinés dans un tube piézométrique en verre, suivant la méthode de Cailletet. La portion cylindrique supérieure (la tige) avait un diamètre intérieur de ± 2,6 mm., et un diamètre extérieur de ± 7 mm.; au début il était divisé en millimètres sur une étendue de 50 cm. Cette tige portait inférieurement un réservoir en verre mince, terminé en bas par un petit tube deux fois recourbé, déjà décrit par MM. Kamerlingh Onnes et Hyndman [1]). Ce petit tube permettait de déterminer le volume normal du mélange aussi bien après qu'avant les mesures.

Le tube manométrique était construit d'après le modèle décrit par M. Kamerlingh Onnes [2]), avec cette différence toutefois qu'en vue des fortes pressions une dilatation y était soufflée dans la portion *b* (voyez la fig. 1, donnant une représentation schématique du tube manométrique), afin de prévenir un glissement du tube dans le mastic qui le maintenait dans l'ajutage en acier, ce qui aurait eu pour conséquence la pression contre cet ajutage de la mince enveloppe du réservoir *a*. Quant au tube *h* il était deux fois recourbé dans le sens de l'axe du tube, pour une raison décrite dans la *Comm.* n°. 69 p. 8. La tige *c*, longue de 50 cm., était divisée en mm., et avait un diamètre intérieur de 0,83 mm et un diamètre extérieur de 6 mm.; le réservoir *a* avait une capacité de ± 25 cm³. La partie élargie *d*, au sommet de la tige [3]), avait un diamètre intérieur de 2,6 mm., et un diamètre extérieur de 9 mm.; sa longueur était telle que le manomètre, rempli d'hydrogène, pouvait accuser des pressions de ± 60 à ± 190 atmosphères.

2. Pour déterminer le rapport des sections des parties

[1]) *Versl. Kon. Akad.*, mars 1901; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 69.
[2]) *Versl. Kon. Akad.*, juin 1899; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 50.
[3]) Au sujet de cette portion élargie voir E. Natanson, *Wied. Ann.*, 31, 508, 1887.

graduées des tubes manométrique et piézométrique, à divers endroits, j'y ai introduit une colonne de mercure longue d'environ 10 cm., dont j'ai déterminé la longueur pour des déplacements successifs de 5 cm. A cet effet le tube manométrique était couché horizontalement et la situation des extrémités de la colonne était lue à la loupe. Pour éviter des erreurs de parallaxe, j'ai toujours fait en sorte que la graduation la plus rapprochée de l'extrémité considérée coïncidât avec son image dans le mercure. Cette méthode n'était pas applicable au tube piézométrique, beaucoup plus large; dans une position horizontale du tube, les ménisques mercuriels aux extrémités de la colonne y étaient déformés par la pesanteur. Voilà pourquoi j'ai muni ce tube d'un robinet en verre, terminé par un tube capillaire étroit, par où l'air ne s'échappait que lentement sous une surpression de 10 cm. de mercure. Le tube fut dressé avec le robinet en bas, après l'introduction de la colonne de 10 cm. de mercure. Il était aisé de déplacer cette colonne chaque fois de 5 cm. et de lire la situation de ses extrémités.

Finalement j'ai rempli le tube d'une longue colonne mercurielle, pour déduire de son poids la section moyenne. J'ai également déterminé par pesées la section du tube f sous le grand réservoir, ainsi que le volume du réservoir lui-même.

3. Comme exemple de l'allure des calibrages et des calculs, je communiquerai les données relatives au manomètre. Le tube gradué a été calibré deux fois, en 1901 (A) et en 1902 (B). Je communiquerai les données et les calculs relatifs au calibrage B. Le calibrage A a été effectué d'une façon semblable en tous points; les résultats en seront donnés à la fin et comparés avec ceux de B. Le tableau I fait connaître les résultats du calibrage à l'aide de la colonne mercurielle; la colonne M contient les points milieux, L les longueurs de la colonne, Δ l'écart de la longueur moyenne. La température pouvait être considérée comme constante.

Tableau I.

M	L	Δ
6,90	11,40	+ 0,11
$9{,}96^5$	11,33	+ 0,04
$14{,}98^5$	11,31	+ 0,02
19,89	11,30	+ 0,01
24,76	11,30	+ 0,01
$30{,}08^5$	11,31	+ 0,02
$35{,}02^5$	11,25	— 0,04
39,90	11,20	— 0,09
44,22	11,18	— 0,11

moyenne: 11,29

Le tableau II contient les données pour la détermination de la section moyenne de la tige graduée et de la capacité du réservoir d.

Tableau II.

Extrémités de la colonne mercurielle:

1e pos.:	$3{,}79^3$	$49{,}98^5$	temp.	20,7
2e „	30,35	dans tige graduée. . 9,25 mm. au-dessus du point de repère du capillaire étroit e;	„	20,65
3e „	2,80	49,00	„	20,6

Poids du mercure (dans le vide): 3,3777 g.

Les résultats du calibrage ont été calculés par une méthode qui m'a été suggérée par M. le Prof. Kamerlingh Onnes. Suivant cette méthode la section du tube est représentée par quelques termes d'une série de Fourier, dont les coefficients sont déduits des expériences. En voici l'explication:

Soit s la section du tube à un endroit quelconque, indiqué par la coordonnée x (allant de 0 à 50). Nous pouvons poser:

$$s = s_n + d,$$

où s_n est une certaine section normale. Alors le volume entre deux traits de division p et q est:

$$V_p^q = \int_p^q s.dx = \int_p^q (s_n + d)\, dx = s_n (q - p) + \int_p^q d.dx. \qquad (1)$$

La longueur de la colonne mercurielle est

$$q - p = m + \Delta,$$

m étant la longueur moyenne (voir tableau I). Si V_m représente le volume de cette colonne mercurielle, on a

$$V_m = s_n m + s_n \Delta + \int_p^q d.dx.$$

On peut toujours choisir s_n de telle façon que:

$$m s_n = V_m;$$

alors

$$\Delta = -\frac{1}{s_n} \int_p^q d.dx = -\int_p^q d'.dx,$$

si $d = \frac{d}{s_n}$. Si l'on connaissait la forme de la fonction d', on pourrait déduire du tableau I une série d'équations permettant de trouver les coefficients qui y figurent. Il est vrai que la forme de cette fonction est inconnue, mais d' doit pouvoir être représenté, entre 0 et l, par une série de Fourier. Or, on pourrait se demander s'il serait suffisant de représenter d' par quelques termes seulement de cette série, entre des limites de précision déterminées par les observations. A cet effet j'ai posé:

$$d' = a_1' \cos \frac{\pi x}{l} + a_2' \cos \frac{2\pi x}{l} + a_3' \cos \frac{3\pi x}{l},$$

où l est la longueur du tube.

Le terme a_0' a été omis, parce qu'on peut prévoir d'avance qu'il sera très petit, eu égard à cette circonstance que Δ représente la différence entre la longueur de la colonne mercurielle et la longueur moyenne.

Pour $-\Delta = \int_p^q d'.dx$ on trouve ainsi, quand on songe que $q - p = m + \Delta$, où Δ est une petite grandeur:

$$\left.\begin{aligned} -\Delta = a_1' &\left\{\frac{2l}{\pi} \sin\frac{\pi}{2l} m + \Delta \cos\frac{\pi}{2l} m\right\} \cos\frac{\pi}{l}\frac{q+p}{2} \\ + a_2' &\left\{\frac{l}{\pi} \sin\frac{\pi}{l} m + \Delta \cos\frac{\pi}{l} m\right\} \cos\frac{2\pi}{l}\frac{q+p}{2} \\ + a_3' &\left\{\frac{2l}{3\pi} \sin\frac{3\pi}{2l} m + \Delta \cos\frac{3\pi}{2l} m\right\} \cos\frac{3\pi}{l}\frac{q+p}{2} \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Dans notre cas $l = 50$, $m = 11{,}59$, de sorte que si nous posons $M = \frac{1}{2}(p + q)$, comme au tableau I,

$$\left.\begin{aligned} -\Delta = a_1' &\left\{11{,}05 + 0{,}94\,\Delta\right\} \cos\frac{\pi}{l} M \\ + a_2' &\left\{10{,}37 + 0{,}76\,\Delta\right\} \cos\frac{2\pi}{l} M \\ + a_3' &\left\{9{,}28 + 0{,}48\,\Delta\right\} \cos\frac{3\pi}{l} M \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Les données du tableau I conduisent maintenant aux équations qui sont réunies au tableau III; j'ai commencé par déduire du tableau I les valeurs de L pour $M = 10$, 15 etc., parce que cela présente un avantage dans les calculs (j'ai conservé la valeur de L pour $M = 6{,}90$, parce qu'il me paraissait peu recommandable d'extrapoler jusqu'à $M = 5$).

Tableau III.	Tableau III*b*.
$-0{,}11 = 10{,}13\,a_1' + 6{,}76\,a_2' + 2{,}49\,a_3'$	$+5{,}14\,b_5'$
$-0{,}04 = 8{,}97\,a_1' + 3{,}07\,a_2' - 2{,}74\,a_3'$	$+0{,}00\,b_5'$
$-0{,}02 = 6{,}51\,a_1' - 3{,}07\,a_2' - 8{,}83\,a_3'$	$-6{,}24\,b_5'$
$-0{,}01 = 3{,}26\,a_1' - 8{,}40\,a_2' - 7{,}51\,a_3'$	$+0{,}00\,b_5'$
$-0{,}01 = 0{,}00\,a_1' - 10{,}38\,a_2' + 0{,}00\,a_3'$	$+6{,}24\,b_5'$
$-0{,}02 = -3{,}19\,a_1' - 8{,}41\,a_2' + 7{,}52\,a_3'$	$+0{,}00\,b_5'$
$+0{,}04 = -6{,}47\,a_1' - 3{,}05\,a_2' + 8{,}81\,a_3'$	$-6{,}25\,b_5'$
$+0{,}09 = -8{,}88\,a_1' + 3{,}04\,a_2' + 2{,}73\,a_3'$	$+0{,}00\,b_5'$
$+0{,}11^5 = -10{,}42\,a_1' + 8{,}33\,a_2' - 5{,}42\,a_3'$	$+6{,}26\,b_5'$

En appliquant la méthode des moindres carrés [1]), on trouve les équations normales du tableau IV.

Tableau IV.	Tableau IV*b*.
$475{,}8\,a_1' - 17{,}92\,a_2' - 130{,}65\,a_3' + 3{,}8284 = 0$	$-13{,}31\,b_5'$
$-17{,}92\,a_1' + 401{,}4\,a_2' - 28{,}31\,a_3' - 0{,}6606 = 0$	$-60{,}33\,b_5'$
$-130{,}65\,a_1' - 28{,}31\,a_2' + 319{,}0\,a_3' + 0{,}0882 = 0$	$-21{,}02\,b_5'$
$-13{,}31\,a_1' - 60{,}33\,a_2' - 21{,}02\,a_3' + 182{,}6\,b_5' + 0{,}0331 = 0$	

Ces équations donnent:

$$\left.\begin{aligned} a_1' &= -0{,}00908 \\ a_2' &= 0{,}000964 \\ a_3' &= -0{,}00391 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

On peut maintenant calculer, à l'aide de l'équation (3), les valeurs de Δ qui correspondent aux diverses valeurs de M, pour juger si elles s'accordent suffisamment avec celles fournies par l'expérience. Dans

[1]) Bien que chacune des équations (3) contienne 2 grandeurs empruntées à l'observation, je n'ai pas appliqué la méthode de réduction d'équations d'observation, qui contiennent plus d'une grandeur mesurée, décrite dans le suppl. n°. 4 des *Comm. phys. lab. Leiden* (*Versl. Kon. Akad.*, juin 1902), parce que l'on peut dire que, comparé à Δ, M est exactement connu.

cette opération il est permis de donner à Δ, dans le second membre, les valeurs du tableau I, et de faire usage des coefficients du tableau III, puisque ces termes en Δ ont peu d'influence sur le résultat. J'ai reconnu ainsi qu'il était avantageux d'ajouter à l'équation (3) un quatrième terme encore, savoir un terme en $sin \frac{5\pi}{l} M$. D'ailleurs, en calculant les résultats du calibrage A, j'étais déjà arrivé à la même conclusion d'une manière indépendante de celle-ci.

J'ai donc posé:

$$d' = a_1' \cos \frac{\pi x}{l} + a_2' \cos \frac{2\pi x}{l} + a_3' \cos \frac{3\pi x}{l} + b_5' \sin \frac{5\pi x}{l}, \qquad (5)$$

de sorte qu'il fallait ajouter au second membre de (2):

$$+ b_5' \left\{ \frac{2l}{5\pi} \sin \frac{5\pi}{2l} m + \Delta \cos \frac{5\pi}{2l} m \right\} \sin \frac{5\pi}{l} \frac{p+q}{2}, \qquad (2b)$$

et au second membre de (3):

$$+ b_5' \left\{ 6{,}24 - 0{,}20\, \Delta \right\} \sin \frac{5\pi}{l} M. \qquad (3b)$$

Aux équations du tableau III devaient donc être ajoutés les termes inscrits au tableau IIIb, et au premier membre de celles du tableau IV les termes du tableau IVb, plus l'équation écrite au bas de ce tableau. Ces nouvelles équations ont fourni:

$$\left.\begin{aligned} a_1' &= -0{,}00915 \\ a_2' &= +0{,}000796 \\ a_3' &= -0{,}00402 \\ b_5' &= -0{,}001048 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Je me suis servi de ces coefficients pour calculer les valeurs de Δ, au moyen de l'équation (3) avec le terme supplémentaire (3b). Les résultats sont mentionnés dans la colonne Δ_c du tableau V, tandis que Δ_o fait connaître les valeurs observées: la dernière colonne contient les différences. On en déduit l'écart probable 0,009, ce qui est suffisant, eu égard à la précision des mesures; l'équation (5) avec les coefficients (6) représente donc bien les observations.

Tableau V.

M	Δ_c	Δ_o	$\Delta_c - \Delta_o$
6,90	+ 0,103	+ 0,11	— 0,007
10	+ 0,069	+ 0,04	+ 0,029
15	+ 0,020	+ 0,02	0,000
20	+ 0,006	+ 0,01	— 0,004
25	+ 0,015	+ 0,01	+ 0,005
30	+ 0,007	+ 0,02	— 0,013
35	— 0,028	— 0,04	+ 0,012
40	— 0,073	— 0,09	+ 0,017
45	— 0,117	— 0,11[5]	— 0,002

Nous déduisons ainsi de l'équation (1) les volumes suivants entre les traits de division 0 et Q:

$$V_0{}^Q = s_n \left\{ Q + \int_0^Q d' . dx \right\} = s_n \, Q',$$

où

$$Q' = Q + q$$

et

$$q = \int_0^Q d' . dx = \frac{l}{\pi} \left[a_1' \sin \pi \frac{Q}{l} + \frac{a_2'}{2} \sin 2\pi \frac{Q}{l} + \right.$$

$$\left. + \frac{a_3'}{3} \sin 3\pi \frac{Q}{l} + \frac{2b_5'}{5} \sin^2 \frac{5\pi}{2} \frac{Q}{l} \right].$$

Les valeurs ainsi calculées de Q', les lectures réduites, sont données dans le tableau VI pour les valeurs de Q comprises entre 0 et 50.

Tableau VI.

Q	Q'	Q	Q'	Q	Q
0	0,000	17	16,878	34	33,864
1	0,987^5	18	17,878	35	34,866
2	1,975	19	18,878	36	35,869
3	2,962	20	19,878	37	36,872^5
4	3,950	21	20,877	38	37,877
5	4,938	22	21,877	39	38,882
6	5,927	23	22,875^5	40	39,888
7	6,917	24	23,874	41	40,895
8	7,908	25	24,872	42	41,903
9	8,900	26	25,870^5	43	42,911
10	9,893	27	26,868	44	43,920^5
11	10,888	28	27,867	45	44,931
12	11,884	29	28,865	46	45,942
13	12,881	30	29,864	47	46,954
14	13,879	31	30,863	48	47,966
15	14,878	32	31,863	49	48,980
16	15,878	33	32,863	50	49,993

Les données du tableau II nous permettent maintenant de déterminer la section normale s_n. A l'aide du tableau VI on trouve pour la longueur réduite de la colonne de mercure à 20,6° les valeurs:

46,232 cm.
46,215 „

moyenne: 46,223^5 cm.

On déduit de là à 20°: $s_n = 0{,}0053948$ cm^2.

Des données du tableau II on peut également déduire le volume de la portion élargie d (voir fig. 1).

Le diamètre du capillaire e a été mesuré à l'aide d'un microscope, par comparaison avec une fine division sur verre au moyen d'un oculaire à micromètre. La section était 0,000301 cm². Il résulte de là que la capacité de la portion d, entre le trait 50 de la tige graduée et le point de repère sur le capillaire, est de 0,14239 cm³. à 20°.

Partant de la valeur trouvée pour s_n, on peut calculer au moyen du tableau VI les volumes V_0^Q entre les traits 0 et Q, et puis, en faisant usage du volume trouvé pour la portion dilatée au sommet, les volumes à partir du trait Q jusqu'au repère sur le capillaire étroit.

Le calibrage A a été effectué et soumis au calcul d'une manière analogue à tous les points de vue. Les résultats ont été réunis au tableau VII (p. 14). La colonne V_A contient les volumes à partir du repère sur le capillaire étroit jusqu'au trait Q, à 20°, ainsi qu'ils résultent du calibrage A; V_B se rapporte au calibrage B. La colonne V contient les moyennes. La moyenne différence entre V_A et V_B, exprimée en pourcents, est de 0,19 %: pour la portion comprise entre les traits 0 et 41, c. à d. pour l'étendue employée dans les observations, elle est de 0,17 %. Cet accord est suffisant pour notre but. Comme la différence $V_B - V_A$ est constamment positive, on conçoit que l'on pourrait augmenter la précision en répétant la détermination de s_n et celle de la portion dilatée au sommet de la tige. J'y reviendrai d'ailleurs [1]).

4. Pour déterminer la capacité du réservoir a avec le tube b (voir fig. 1), et en même temps la section de la partie f, le tube manométrique, qui était muni à l'extrémité e d'un robinet à pointe fine, fut évacué à la pompe à mercure, puis retourné et rempli de mercure jusque dans le tube f (en bas sur la figure 1). Puis j'ai laissé s'écouler deux fois une quantité de mercure, que j'ai recueillie et pesée, afin de mesurer la section de f en deux endroits différents. La hauteur du mercure dans le tube fut lue au cathétomètre. J'ai soutiré ensuite du mercure jusqu'à ce que le niveau venait dans la tige graduée c; ce mercure aussi fut pesé, et le poids permit de déterminer la capacité $a + b$. Voici les résultats obtenus. La portion f était divisée en millimètres, les traits des centimètres étant marqués des chiffres 0 à 6; le 0 est du côté de a. J'ai reconnu que la section n'était pas constante; voilà pourquoi j'ai posé:

[1]) Voir chap. 3, § 3.

Tableau VII.

Q	V_A	V_B	V	Q	V_A	V_B	V
0	0,41161	0,41209	0,41185	26	0,27188	0,27252	0,27220
1	0,40629	0,40676	0,40652^5	27	0,26646	0,26714	0,26680
2	0,40095	0,40144	0,40119^5	28	0,26106	0,26176	0,26141
3	0,39560	0,39611	0,39585^5	29	0,25567	0,25637	0,25602
4	0,39024	0,39078	0,39051	30	0,25028	0,25098	0,25063
5	0,38487	0,38545	0,38516	31	0,24492	0,24559	0,24525^5
6	0,37949	0,38012	0,37980^5	32	0,23957	0,24020	0,23988^5
7	0,37411	0,37477	0,37444	33	0,23423	0,23480	0,23451^5
8	0,36873	0,36943	0,36908	34	0,22890	0,22940	0,22915
9	0,36336	0,36408	0,36372	35	0,22357	0,22400	0,22378^5
10	0,35800	0,35872	0,35836	36	0,21823	0,21859	0,21841
11	0,35263	0,35335	0,35299	37	0,21288	0,21317	0,21302^5
12	0,34728	0,34798	0,34763	38	0,20751	0,20775	0,20763
13	0,34193	0,34260	0,34226^5	39	0,20213	0,20233	0,20223
14	0,33659	0,33722	0,33690^5	40	0,19673	0,19690^5	0,19682
15	0,33125	0,33183	0,33154	41	0,19129^5	0,19147	0,19138
16	0,32590	0,32643	0,32616^5	42	0,18585	0,18603	0,18594
17	0,32055	0,32104	0,32079^5	43	0,18039	0,18060	0,18049^5
18	0,31518	0,31564	0,31541	44	0,17489	0,17515	0,17502
19	0,30981	0,31025	0,31003	45	0,16938	0,16970	0,16954
20	0,30441	0,30485	0,30463	46	0,16388	0,16424	0,16406
21	0,29901	0,29946	0,29923^5	47	0,15837	0,15878	0,15857^5
22	0,29360	0,29407	0,29383^5	48	0,15287	0,15333	0,15310
23	0,28817	0,28868	0,22842^5	49	0,14738	0,14785	0,14761^5
24	0,28274	0,28330	0,28302	50	0,14189	0,14239	0,14214
25	0,27731	0,27791	0,27761				

$$s = s_0 \{1 + a x\},$$

et j'ai trouvé

$$a = 0{,}0058, \qquad s_0 = 0{,}3564 \text{ (cm}^2\text{.)},$$

de sorte que

$$V_0{}^Q = 0{,}3564 \{1 + 0{,}0029\, Q\}\, Q.$$

Le tableau VIII donne les volumes entre les traits 0 et Q à 20°.

Tableau VIII.

Q	$V_0{}^Q$
1	0,3574
2	0,7169
3	1,0785
4	1,4421
5	1,8078
6	2,1756

Pour calculer la capacité des ménisques j'ai fait usage du tableau donné par M. Schalkwijk dans sa dissertation [1]). Pour le volume compris entre le trait 0 du tube f et le trait 0 de la tige c j'ai trouvé, à 20°, la valeur: 25,021 cm².

5. Pour ce qui regarde le calibrage du tube piézométrique, je n'ai plus qu'à mentionner que ce tube contenait un agitateur électromagnétique, composé d'une petite tige de fer enfermée dans du verre. Ce corps avait la forme d'un cylindre terminé par deux globules; j'ai mesuré au compas d'épaisseur le diamètre des globules et la longueur du corps au moyen d'un compas à glissière.

Chaque fois que le tube devait être rempli d'une nouvelle quantité de gaz, l'extrémité supérieure devait être ouverte pour le rinçage. En vue de l'introduction de l'agitateur il n'était pas possible de souder à

[1]) J. C. Schalkwijk, Dissertation, Amsterdam et Leyden, 1902, p. 75; *Versl. Kon. Akad.* févr. 1901, p. 519. *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 67, p. 28.

cette extrémité un capillaire étroit, comme dans le cas du manomètre; et il n'était pas permis d'introduire d'avance l'agitateur, car sa présence aurait donné des difficultés au rinçage et surtout au calibrage par le mercure. Après chaque série de mesures la capacité du sommet fut déterminée en coupant de ce sommet une certaine portion, de telle manière que cette portion portât au moins un trait nettement visible (sur une étendue de 5 mm. les traits supérieurs avaient disparu lors du scellage) [1]. La cassure fut aplanie, et le fragment coupé fut nettoyé et séché, puis rempli de mercure, dont l'excès fut enlevé en pressant une plaque de verre plane bien propre contre le bord poli de la cassure. Le mercure ainsi isolé fut pesé et on détermina au cathétomètre la position de la face polie par rapport aux traits du tube, ce qui permit d'évaluer le volume du sommet.

2. La préparation des mélanges et la compressibilité aux faibles densités.

1. *Les substances.* J'ai purifié l'anhydride carbonique par distillation fractionnée, suivant la méthode en usage au laboratoire de physique de Leyden [2]. Le haut degré de pureté du gaz ainsi obtenu est prouvé par le fait que, pendant la condensation à 25,5°, la pression n'augmentait que de 0,07 atmosphères [3].

L'oxygène a été préparé en chauffant du permanganate de potasse [4].

2. *L'appareil de mélange.* Pour préparer les mélanges j'avais à ma disposition l'appareil décrit par MM. Kamerlingh Onnes et Hyndman [5].

[1]) Lors du scellage je fis en sorte que le sommet du tube prît intérieurement la forme d'une demi-sphère, afin d'éviter que l'agitateur ne vînt s'y fixer. C'est pour la même raison que j'ai intercalé dans la tige, au-dessous de la partie graduée, un morceau d'un tube en verre de même diamètre extérieur que la tige, mais d'un diamètre intérieur beaucoup plus petit; ce rétrécissement devait empêcher l'agitateur de tomber dans le réservoir, et l'agitateur reposait ainsi sur un anneau plan de verre.

[2]) Cette méthode, appliquée pour la première fois par M. Kuenen, a subi depuis de nombreux perfectionnements.

[3]) Voir chapitres 4 et 8.

[4]) Ce mode de préparation a été décrit dans *Versl. Kon. Akad. Amsterdam*, mars 1902, p. 816; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 78, p. 11.

[5]) *Versl. Kon. Akad. Amsterdam*, mars 1903; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 84.

Je donnerai ici une explication sommaire de cet appareil et des opérations nécessaires pour la préparation d'un mélange de composition déterminée.

L'appareil de mélange consiste essentiellement en un voluménomètre E, un réservoir de mélange F et un réservoir de provision G (voir planche I, fig. 2).

C'est dans le voluménomètre (pl. I, fig. 1) que l'on mesure les quantités des composantes à mélanger, et que l'on peut déterminer dans la suite la compressibilité du mélange aux pressions ordinaires. L'eudiomètre E_b, où est enfermé le gaz au-dessus du mercure introduit par E_{b01}, se compose principalement de 5 ballons E_{b1}, ayant chacun une capacité d'environ 250 cm³., et d'un ballon plus petit E_{b2} de 25 cm³. de capacité; ils sont séparés par des portions de tubes bien cylindriques $E_{b3} \ldots E_{b8}$, munies chacune d'un trait de repère. C'est dans le voisinage immédiat d'un de ces traits que l'on installe le ménisque mercuriel dans les mesures..

A sa partie inférieure l'eudiomètre porte un dispositif permettant de recueillir les petites bulles de gaz, qui se détachent parfois du tube de caoutchouc, muni de la pince C_1 (pl. I, fig. 2). A sa partie supérieure l'eudiomètre se termine en un tube étroit E_{b90}, qui se partage en deux voies E_{b91} et E_{b92}; l'une de ces voies est fermée tout près de l'appareil par le robinet en verre r_5, l'autre se prolonge en un tube capillaire en verre r_6, conduisant au réservoir de mélange.

Le petit réservoir E_{b2} sert à déterminer voluménométriquement l'espace au-dessus de E_{b82}.

Pour maintenir constante la température du gaz, l'eudiomètre est fixé dans le fond d'une boîte en cuivre E_{a0}, enveloppée de feutre et traversée par un courant d'eau de température constante, venant d'un thermostat (voir E_{a2}, pl. I, fig. 1). L'uniformité de la température est encore augmentée en relevant et abaissant tour à tour l'agitateur, auquel est fixé le thermomètre Th.

Pour l'éclairage et les lectures la boîte en cuivre est munie de fenêtres en verre à glaces E_{h6}.

Pour déterminer le volume d'une quantité de gaz enfermée on vise au cathétomètre, outre le ménisque, non les traits marqués sur l'eudiomètre lui-même, mais les fins traits gravés sur de petits écrans en verre $E_{g1} \ldots E_{g6}$, fixés aux portions cylindriques de l'eudiomètre au moyen d'anneaux E_{g1} et de vis E_{g2}. Tout en ne changeant rien à la

longueur de la lunette du cathétomètre, on peut donc voir nettement ces traits aussi bien que le ménisque.

Pour calibrer l'eudiomètre, on y a soufflé temporairement à la lampe, près de Eb_0, un petit robinet en verre avec un tube d'écoulement étroit et terminé en pointe fine; l'eudiomètre est établi ensuite dans E_a, comme pour une mesure de volume, et en particulier on maintient sa température constante; puis on le remplit totalement de mercure après y avoir fait le vide, et on laisse s'écouler successivement, par le robinet en Eb_0, des quantités de mercure que l'on pèse. Dans ce calibrage aussi on vise au cathétomètre les traits des petits écrans.

La communication entre l'eudiomètre et le tube manométrique M, ou la cuvette à mercure mobile (voir pl. I, fig. 2), peut être rompue par la pince Cl_1; pour tous les raccords mobiles, remplis de mercure et devant pouvoir être fermés (voir pl. I, fig. 2), j'ai fait usage de tubes en caoutchouc non vulcanisé, soigneusement lavés (solidement enveloppés de bandelettes). Aussi le ménisque mercuriel reste-t-il absolument irréprochable pendant toute une série d'observations, quand on a soin de n'introduire dans le voluménomètre que des gaz parfaitement secs (je suppose que le gaz n'attaque pas la graisse des robinets ou pièces rodées qu'il rencontre sur son chemin). Les légères variations dans le niveau du mercure, nécessaires pour une installation exacte sur un volume déterminé, s'obtiennent en donnant à la cuvette à mercure mobile une hauteur convenable et en ouvrant ensuite légèrement la pince Cl_2 (pl. I, fig. 2) pendant quelques instants. Pendant une mesure cette pince reste toujours serrée.

Quand la pince Cl_1 est ouverte, la pression du gaz est indiquée par la hauteur du mercure dans le manomètre communiquant M, et par la différence de niveau dans le baromètre *Bar.*, entre lesquels est intercalé un réservoir où la pression est maintenue constante [1]). Pour permettre de déterminer la température des colonnes mercurielles hors du voluménomètre, on a enveloppé ces colonnes de laine en même temps que les thermomètres eux-mêmes. Il est encore à remarquer que le tube manométrique et le baromètre sont placés de telle façon, que les lectures peuvent s'y effectuer sans qu'il soit nécessaire de changer la longueur de la lunette du cathétomètre, quand celui-ci est placé dans une

[1]) *Versl. Kon. Akad. v. Wet.*, juin 1900, p. 228; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 60, p. 10.

direction perpendiculaire aux fenêtres de E_a. Les lectures des ménisques du baromètre et du manomètre s'effectuent à l'aide du dispositif employé par M. SCHALKWIJK [1]); pour observer le ménisque dans le voluménomètre, je plaçais derrière la fenêtre d'éclairage, à la même hauteur que le ménisque, une fente de 2 mm. de largeur, et derrière celle-ci une petite lampe à incandescence.

Pour atteindre dans une mesure le degré de précision désiré, on doit installer les ménisques de telle façon que la pression ne s'abaisse pas au-dessous de 0,5 atm.

Pour le reste la représentation de l'appareil de mélange (pl. I, fig. 2) est suffisamment claire et n'a pas besoin de beaucoup d'explications. La chambre de mélange F et la chambre de provision G ont chacune une capacité d'environ 2 litres. G est muni d'un robinet à trois voies et s'emploie surtout quand il s'agit de préparer successivement divers mélanges contenant une faible proportion d'un même gaz. Les tubes de raccord entre r_5, r_3 et r_9 et le tube de communication de E_b avec r_6 sont fort étroits, afin que l'incertitude de leur température n'ait qu'une influence minime sur la précision des mesures; les autres tubes de raccord sont assez larges, pour ne pas entraver inutilement l'écoulement du gaz vers la machine pneumatique, quand le gaz est fortement raréfié.

Pour préparer un mélange de la composition voulue, on commence par serrer les pinces Cl_1, Cl_2, Cl_3 et Cl_4, déjà surmontées d'un peu de mercure; on fait le vide dans tout l'appareil par r_1; on ferme r_3, ouvre r_4 et place r_7 dans la position qui fait communiquer G, par r_4, avec l'appareil développateur de gaz, relié à r_2; puis on remplit de ce gaz le réservoir de provision, en ayant soin de l'évacuer à plusieurs reprises.

On ferme maintenant r_2 et on donne à r_7 une position telle, que le gaz est enfermé dans G et que F est mis en communication avec la machine pneumatique par r_4; en même temps on ouvre r_3, r_5 et r_6 et on fait le vide dans E et F avec leurs raccords. Après avoir relevé suffisamment la cuvette à mercure, on ouvre largement la pince Cl_2 et

---

[1]) Voir *Versl. Kon. Akad. v. Wet.*, oct. '98; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 44; dissertation, p. 6. Dans ce but j'ai placé derrière le tube, au niveau du ménisque, un morceau de papier transparent, portant un trait en zigzag et éclairé par derrière.

on desserre légèrement C_1 (pour éviter que l'air de M ne s'y élance); on laisse pénétrer ainsi dans E du mercure, qui remplit d'abord le cul-de-sac Eb_{03}, sans qu'il y reste une bulle d'air, et vient dans Eb au niveau désiré, après quoi on resserre de nouveau C_1. On rince à présent, à diverses reprises, tout l'appareil au moyen du gaz contenu dans G, ce que l'on fait en remplissant à travers r_4, le robinet r_7 étant placé dans une position convenable, le petit espace entre les robinets r_5, r_2, r_3 et r_1, et distribuant cette quantité sur l'espace déjà occupé et Eb, les robinets r_4 et r_6 étant fermés et r_5 ouvert; après quoi on fait le vide pour recommencer la même opération. Finalement on remplit l'espace Eb jusqu'à la pression calculée.

On ferme enfin r_5 et r_6, et on détermine exactement la pression, la température et le volume du gaz contenu dans Eb, jusqu'aux robinets r_5 et r_6; après quoi on fait passer tout ce gaz par r_6 dans F, à une petite quantité près, qui reste dans Eb_{90} et Eb_{92} jusqu'à r_5 et r_6. On mesure cette quantité restante et on fait le vide dans Eb et les tubes de raccord, C_1 restant serré et G et F fermés. Alors l'appareil est prêt à être rincé avec le second gaz, venant de r_3, de la même manière qu'avec le premier, et à être rempli de ce gaz jusqu'au degré voulu.

Quand on a mesuré la pression, le volume et la température du second gaz ainsi enfermé, on ouvre r_6, on fait passer autant que possible le second gaz de Eb dans F, où on l'abandonne pendant quelque temps à lui-même, pour lui permettre de se mélanger avec le gaz qui s'y trouve déjà. En transvasant alternativement le mélange de F dans E et de E dans F on obtient finalement un mélange parfait. On conserve le mélange dans F et on en isole dans Eb la quantité que l'on se propose d'employer pour en examiner la compressibilité.

3. Dans mes expériences l'appareil de mélange était mis en communication avec l'appareil générateur d'oxygène par le robinet r_2 (pl. I, fig. 2), et par le robinet r_3 avec le petit réservoir à anhydride carbonique, par l'intermédiaire d'un tube contenant P^2O^5, ainsi qu'avec le tube piézométrique. Après avoir préparé le mélange, je l'ai examiné dans le voluménomètre E, pour déterminer l'écart de la loi de MARIOTTE. Cet examen était nécessaire pour la détermination du volume normal théorique. Bien que dans mes recherches une précision de $\frac{1}{1000}$ eût été

suffisante, j'ai cru avantageux d'aller un peu plus loin, parce que la connaissance des écarts de la loi de MARIOTTE aux pressions ordinaires est en elle-même importante, et que l'appareil permettait aisément d'atteindre une plus haute précision. En prenant toutes les précautions on pourrait atteindre une précision de $\frac{1}{10000}$, mais je me suis contenté d'une précision de $\frac{1}{5000}$. Les détails suivants permettront d'en juger:

Mesure du volume: Pour juger de la précision nous supposerons que nous avons affaire à une certaine quantité de gaz, à mesurer dans le ballon E_{b_1} supérieur (voir pl. 1, fig. 1). C'est pour ce ballon que l'erreur relative est la plus grande, le petit ballon E_{b_2} n'étant employé que pour des mesures auxiliaires. Le cathétomètre dont j'ai fait usage permettait certainement des mesures précises jusqu'à 0,04 mm.; mettons que l'erreur est de 0,02 mm. Comme la section E_{b_7} est d'environ 200 mm^2., l'erreur de volume possible est donc de 4 mm^3., ce qui fait sur 250 cm^3. une erreur relative de $\frac{1}{60000}$.

Dans les lectures au voluménomètre la hauteur du ménisque mercuriel était en moyenne de 0,140 cm. J'ai admis que le volume du ménisque mercuriel s'obtient en multipliant la section par les $\frac{3}{4}$ de la hauteur. La moyenne hauteur est certainement comprise entre la moitié de la hauteur et la hauteur toute entière [1]; l'erreur est donc certainement plus petite que le quart de la hauteur, mettons $\frac{1}{8}$. Cela donne $\frac{1}{8} \times 1{,}40$ mm. $= 0{,}18$ mm., d'où une erreur de volume possible de 36 mm^3. ou $\frac{1}{7000}$. Pour atteindre une précision de $\frac{1}{10000}$ il serait nécessaire d'examiner de plus près le volume du ménisque mercuriel pour un rayon de 7,8 mm., de la manière dont M. SCHALKWIJK l'a fait pour des rayons de 0,5 à 4 mm.

On peut tenir compte avec grande précision de la variation du volume par changement de température.

Variation du volume par différence des pressions intérieure et exté-

[1]) Voir SCHALKWIJK, *Versl. Kon. Akad.*, janv. 1901, p. 519; *Comm. phys. lab. Leiden*, n° 67, p. 28; dissertation p. 75.

rieure: Puisque l'épaisseur de la paroi est faible par rapport au rayon, on a, pour chacun des ballons en particulier:

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{3}{2}\frac{1-\mu}{E}\frac{p_i - p_e}{d}R;$$

dans notre cas $E = 6500$ kg./mm^2., $\mu = \frac{1}{4}$, $R = 39$ mm., $d = 0{,}5$ mm., de sorte que

$$\frac{\delta V}{V} = 0{,}00000177\,(p_i - p_e),$$

si p_i et p_e sont exprimés en centimètres de mercure. Pour $p_i - p_e = 56$ cm. il vient $\frac{\delta V}{V} = \frac{1}{10000}$. Une correction a été apportée de ce chef; l'inexactitude de la correction résultant de la connaissance imparfaite du coefficient est donc sans importance.

Le volume de la partie du récipient E_b située au-dessus du trait E_{b32} ne pouvait pas être mesuré par une pesée de mercure; mais il pouvait être déterminé avec une précision suffisante par une mesure voluménométrique, puisqu'il s'agissait de déterminer le rapport de ce volume à des volumes beaucoup plus grands.

Mesure de la pression: Dans la plupart des cas on pourra installer le mercure dans le voluménomètre sur un trait de division, de telle façon que la pression du gaz au-dessus du mercure ne sera pas inférieure à 0,5 atm. (voir p. 19). Une mesure de pression requiert quatre lectures au cathétomètre; mettons que l'erreur probable sur le résultat est de $2 \times 0{,}02 = 0{,}04$ mm.; cela fera sur 40 cm.: $\frac{1}{10000}$. Ce n'est que dans la détermination voluménométrique du rapport de E_{b2} et de la portion supérieure que la pression devenait plus petite; mais, ainsi que je viens de le dire, ce rapport n'est qu'une grandeur auxiliaire et n'a pas besoin d'être connu avec une précision aussi grande. On peut dire la même chose de la mesure de la quantité du premier gaz qui reste dans le récipient E, après qu'on en a fait passer autant que possible dans le ballon de mélange F.

Bien que j'eusse pris soin de donner à E une position exactement verticale, de sorte que les ménisques mercuriels pouvaient être observés, aussi bien en E_{b32} qu'en E_{b3}, sans qu'il fût nécessaire de changer la longueur de la lunette du cathétomètre, les fenêtres E_{b6} ne satisfaisaient

pas exactement à la même condition; elles s'écartaient toutes dans le même sens de la verticale, d'un angle que j'ai pu évaluer à 0,2° au moyen d'un niveau. Il en résulte évidemment que les fenêtres n'étaient pas perpendiculaires à la ligne de visée du cathétomètre, de sorte qu'il se produisait une réfraction, qui avait pour conséquence un déplacement apparent du ménisque mercuriel de $d.\ i.\ \frac{n-1}{n}$ cm.; d étant la distance du ménisque à la fenêtre, i l'angle que la normale à la fenêtre fait avec l'horizon, n l'indice de réfraction de l'eau. Dans notre cas ($d = 8{,}6$ cm., $n = 1{,}33$) ce déplacement est de 0,0075 cm., ce qui fait pour 0,5 atm. une erreur de $\frac{1}{5000}$. Toutefois, comme il s'agit de déterminer le rapport de grandeurs auxquelles on devrait apporter une correction dans le même sens pour toutes, l'erreur totale sur le résultat est plus faible. Si l'on voulait atteindre une précision plus grande, on devrait déterminer plus exactement l'inclinaison des fenêtres, de manière à pouvoir apporter la correction. Pour notre but cela n'était pas nécessaire.

Correction exigée par la température du mercure: Supposons que la pression est de 0,5 atm., et qu'elle est mesurée par la différence de hauteur de deux colonnes mercurielles, hautes respectivement de 76 et 38 cm.; pour obtenir une précision de $\frac{1}{5000}$ il faut alors connaître la température de la longue colonne à un degré de précision près de 0,5°. On peut admettre que cette précision est atteinte quand les colonnes de mercure sont empaquetées dans de la laine avec les thermomètres. Pour le baromètre (*Bar.*) la différence des indications des thermomètres placés en haut et en bas de la colonne ne dépassait généralement pas 0,5°, de sorte qu'on peut dire que l'erreur dans la connaissance de la température n'aura pas dépassé notablement 0,25°. Pour la différence de température entre M et E j'ai apporté une correction.

Les dépressions capillaires sont les plus fortes dans le voluménomètre, où elles sont de l'ordre de grandeur de 0,07 mm. L'incertitude dans ces dépressions est certainement bien plus faible que les erreurs résultant du fait que les fenêtres n'étaient pas exactement verticales.

Les corrections exigées par la différence de niveau du ménisque inférieur dans *Bar* et du ménisque de M, ainsi que celles nécessaires pour la réduction de la pression immédiatement au-dessus du mercure dans

E à la pression moyenne du gaz dans ce récipient se laissent apporter avec une précision suffisante.

Mesure de la température: pendant toute la durée d'une détermination (25 minutes) la température peut être maintenue constante, entre des limites de 0,03°, à l'aide d'un thermostat selon M. SCHALKWIJK [1]); d'ailleurs, en rendant suffisamment rapide le courant d'eau dans E_a, on peut faire en sorte que la différence des températures en haut et en bas ne soit pas plus grande. Les lectures ont été faites sur un thermomètre Th, fixé à l'agitateur E_r et qui pouvait donc être placé à diverses hauteurs. Le thermomètre était divisé en 0,05°, de sorte qu'il était possible de déterminer aisément les 0,01°; il avait été comparé avec un thermomètre étalon, contrôlé à la Reichsanstalt. L'erreur dans la mesure des températures n'atteignant pas 0,03°, la précision est certainement $0{,}03 \times \frac{1}{300} = \frac{1}{10000}$.

Il y a une partie du voluménomètre (savoir les tubes E_{bg1} et E_{bg2}, d'un diamètre intérieur de 1,2 mm.) qui n'est pas comprise dans le manteau. Ce volume est un peu plus petit que 1 cm³. J'ai apporté à ce volume une correction pour la température, que j'ai admise égale à celle de M. Même en admettant que l'on commet de cette façon une erreur de 5°, l'erreur commise sur la température moyenne, dans une mesure voluménométrique au moyen du premier réservoir E_{b1}, n'est que de 0,02°; elle est donc négligeable, surtout parce que la différence de température entre le manteau et son entourage était généralement plus petite que 5°, de sorte que l'erreur commise était certainement plus petite.

Il résulte de tout ceci que le résultat final ne sera qu'exceptionnellement entaché d'une erreur plus grande que $\frac{1}{5000}$, et en général nous pouvons admettre qu'une pareille erreur n'est pas dépassée.

Pour permettre de bien juger de l'allure d'une mesure, j'ai communiqué dans le tableau IX (p. 25) les observations relatives à la détermination de l'écart de la loi de MARIOTTE, pour le mélange 0,2 O^2 et 0,8 CO^2. La colonne A fait connaître les lectures au niveau [2]), B les lectures au cathétomètre.

[1]) Voir *Versl. Kon. Akad.*, mai 1901; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 70; diss. p. 29. Voir aussi diss. p. 63.

[2]) Voir *Versl. Kon. Akad.*, juin 1901, p. 226; *Comm. phys. lab. Leiden*, n° 60, p. 6.

Tableau IX.

	A	*B*
Date: 7 févr. '03.		
Heure: 12,56.		
Temp. bain: 20,07.		
Niveau du mercure dans E_{b7}:		
sommet	2,5	69,500
base:	2,8	69,373
Trait 4 de E_{g5}	2,8	69,405
„ 3 „ „	2,8	69,504
Manomètre *M*: sommet	1,2	88,586
base	2,0	88,426
Temp. *M*: 15,6.		
Baromètre *Bar* :		
En haut: sommet	3,2	78,372
base	3,0	78,266
En bas: sommet	2,2	— 0,5 + 0,052
base	2,2	— 0,6 + 0,041
Temp. *Bar.* en bas: 14,4.		
en haut: 15,3.		
En bas: base	2,4	— 0,6 + 0,042
sommet	1,5	— 0,5 + 0,046
En haut: base	1,7	78,262
sommet	2,2	78,370
Manomètre *M*:		
Temp.: 15,4.		
Base	1,0	88,420
Sommet	0,8	88,577
Niveau du mercure dans E_{b7}:		
Trait 3	2,1	69,502
„ 4	2,2	69,400
Base	2,3	69,368
Sommet	2,3	69,494
Temp. bain: 20,08.		
Heure: 1,22.		

Le voluménomètre avait été calibré antérieurement par M. Zakrzewski, par des pesées de mercure [1]; ce calibrage avait fait connaître, à une même température, les volumes des ballons E_{b_1} compris entre les traits du milieu sur les plaques de verre E_g, ainsi que les sections E_{b_3}, E_{b_4}, E_{b_6}, E_{b_7}, $E_{b_{31}}$. Dans l'appareil dont je me suis servi il n'était pas possible de faire des lectures quand le ménisque mercuriel se trouvait dans l'étranglement E_{b_5}, parce que cet étranglement n'était plus parfaitement cylindrique, par suite d'un travail antérieur à la lampe. Voilà pourquoi on n'a déterminé que la somme des capacités des deux ballons adjacents.

Pour contrôler ces déterminations, et en même temps pour mesurer le volume de E_{b_2} avec tout ce qui est au-dessus, j'ai déterminé voluménométriquement le rapport des différents volumes, en employant de l'air sec et privé d'anhydride carbonique. Pour tenir compte de l'écart de la loi de Mariotte, j'ai fait usage de la série:

$$pv_A = A_A + \frac{B_A}{v_A} + \frac{C_A}{v_A{}^2} + \frac{D_A}{v_A{}^4} + \frac{E_A}{v_A{}^6} + \frac{F_A}{v_A{}^8},$$

par laquelle M. Kamerlingh Onnes [2]) a rendu les observations de M. Amagat avec une précision de 0,2 %. Pour 20° les trois premiers coefficients sont:

$$\begin{aligned} A_A &= 1{,}0738 \\ B_A &= -0{,}40495 \times 10^{-3} \\ C_A &= 3{,}0178 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

En première approximation on trouve pour le rapport des volumes V_1 et V_2 qu'occupe une même masse de gaz, à la même température, sous les pressions p_1 et p_2:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}\left\{1 + \frac{B_A}{A_A{}^2}(p_1 - p_2)\right\}, \tag{1}$$

[1]) M. Chappuis (*Trav. et Mém. du Bur. Intern. des Poids et Mesures*, t. 13, p. 12) a attiré l'attention sur la variation de volume que subissent les ballons pendant le calibrage, par suite des pressions différentes qu'exerce le mercure, quand il s'élève à différentes niveaux. J'avais déjà tenu compte de cette circonstance.

[2]) Voir *Versl. Kon. Akad.*, juin 1901; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 71.

où p_1 et p_2 sont exprimés en atmosphères (0°,45° lat. N). Vu le degré de précision que je me proposais d'atteindre, une seconde approximation, où interviendrait le coefficient C_A, était superflue.

Tableau X*a*.

	A	*B*	*C*
$\frac{V_1}{V_0}$		8,878	
$\frac{V_2}{V_1}$	1,8913	1,8910	— 0,016
$\frac{V_4}{V_2}$	1,9396	1,9400	+ 0,022
$\frac{V_5}{V_4}$	1,2422	1,2420^5	— 0,012

Tableau X*b*.

	E
E_{b31}	0,005085
E_{b7}	0,000675
E_{b6}	0,000314
E_{b4}	0,000165
E_{b3}	0,000135

Le tableau X donne les résultats de ces calibrages. V_0 représente le volume au-dessus de E_{b31}, V_1 celui au-dessus E_{b6} etc. La colonne *A* du tableau X*a* fait connaître le rapport des volumes d'après le calibrage au mercure, *B* d'après la détermination voluménométrique; *C* donne la différence en pourcents. La colonne *E* du tableau X*b* donne le rapport du volume de 1 mm. de la section considérée à tout le volume situé au-dessus. On voit que l'accord entre les deux calibrages est satisfaisant Dans les calculs ultérieurs j'ai toujours fait usage des résultats du calibrage au mercure, que j'ai considérés comme les plus précis.

On trouve au tableau XI les données résultant des mesures au voluménomètre et servant au calcul de la composition du mélange: elles se rapportent au mélange de composition 0,2 (0,2 mol. gr. d'oxygène). La colonne *A* contient les données relatives à l'oxygène dans le voluménomètre, *B* se rapporte à l'oxygène qui est resté dans *E* après que la plus grande partie en a été transportée dans *F*; *C* se rapporte à l'anhydride carbonique.

Tableau XI.

	A	*B*	*C*
Volume.....	0,99979 V_2	0,98905 V_0	0,99994 V_5
Pression	40,396	0,380	66,961
Température.	19,81	19,53	19,83

En premier lieu on peut déduire de *B* la pression qu'aurait exercé l'oxygène restant dans le volume 0,99979 V_2 et à la température 19,81°. Pour ce calcul il suffit d'appliquer la loi de MARIOTTE; on trouve 0,022 cm. La pression qu'exercerait dans le volume 0,99979 V_2, à la température 19,81°, la quantité d'oxygène qui a passé dans le mélange est donnée avec une précision suffisante par 40,396 — 0,022 = 40,374 cm.

Les pressions de l'oxygène et de l'anhydride carbonique peuvent être réduites à la même température 19,82°, soit au moyen des coefficients de pression que l'on peut calculer à l'aide des séries de M. KAMERLINGH ONNES, soit au moyen de la valeur 0,003674 directement trouvée pour l'oxygène par M. JOLLY, et de la valeur 0,003711 du coefficient de dilatation vrai de l'anhydride carbonique à 20°, et sous une pression initiale de 1 atmosphère, qui résulte des données de M. CHAPPUIS (*Trav. et Mém. du Bureau International des Poids et Mesures*, t. VI, p. 124) [1]).

On trouve pour l'oxygène: 40,375, et pour l'anhydride carbonique: 66,959 cm. Si p_1 et V_1 sont la pression et le volume du premier gaz,

[1]) Je ne tiens pas compte ici de la variation du coefficient de pression avec la pression initiale: pour une différence de 50 cm. dans la pression initiale, cette variation serait de 0,000034 suivant M. CHAPPUIS (*l. c.*), ce qui donnerait dans une réduction, pour une différence de température de 1°, une erreur de $\frac{1}{30000}$ seulement. Comme des différences de température aussi grandes ne se présentaient pas, il est permis de ne pas en tenir compte.

p_2 et V_2 du second, on trouve aisément que le nombre des molécules du premier gaz est proportionnel à

$$\frac{p_1 V_1}{1 + \frac{B_{A_1}}{A_{A_1}{}^2} p_1},$$

et celui du second à

$$\frac{p_2 V_2}{1 + \frac{B_{A_2}}{A_{A_2}{}^2} p_2};$$

p_1 et p_2 étant exprimés en atm., dans le dénominateur du moins. D'après M. Kamerlingh Onnes [1]), on a pour l'oxygène:

$$A_{A_{20}} = \quad 1{,}074237,$$
$$B_{A_{20}} = -\,0{,}74273 \times 10^{-3}.$$

Pour l'anhydride carbonique on peut faire usage de la valeur suivante, empruntée directement aux observations (voir p. 31):

$$\frac{B_{A_{20}}}{A_{A_{20}}{}^2} = -\,0{,}005675.$$

Ces valeurs peuvent être admises, avec une précision suffisante, pour la température considérée (19,82). On déduit de là pour la composition du mélange considéré: 0,19942 (oxygène dans l'anhydride carbonique).

4. Dans le voluménomètre j'ai déterminé la compressibilité sous pression ordinaire en installant le mercure, pour une même quantité de gaz à la même température, successivement sur au moins deux traits de division différents [2]); j'ai opéré ainsi pour les mélanges dont la composition moléculaire était 0,1994 et 0,3072 (O^2 dans CO^2), ainsi que pour l'anhydride carbonique pur. Bien que ce dernier gaz ait déjà été examiné à ce point de vue par Regnault [3]), Amagat [4]),

[1]) *Versl. Kon. Akad.*, juin 1901, pp. 141 et 143; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 71, pp. 8 et 10.

[2]) Voir *Versl. Kon. Akad.*, mars 1903, p. 752; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 84, p. 8.

[3]) *Mém. de l'Inst. de France*, t. XXI, p. 329.

[4]) *Ann. de Chim. et de Phys.*, (4), 29, 246, 1873.

Fuchs [1]), Leduc et Sacerdote [2]), et dernièrement encore par Chappuis [3]), il m'a paru utile de faire cette détermination pour le même anhydride carbonique et dans le même appareil que ceux qui ont servi aux mélanges, afin de rendre les circonstances aussi avantageuses que possible pour la comparaison des mélanges avec l'anhydride carbonique.

Le tableau XII donne les valeurs correspondantes, immédiatement empruntées aux observations, du volume, de la pression et de la température. Les colonnes *A*, *B* et *C* se rapportent à différentes installations pour une même quantité de gaz [4]).

Tableau XII.

a. CO^2.

	A	*B*	*C*
Volume.....	0,99969 V_5	0,99995 V_4	0,99958 V_2
Pression	47,261	58,662	113,327 cm.
Température.	19,99	20,02	19,97

b. Mélange à composition moléculaire $x = 0,1994$.

	A	*B*
Volume.....	1,00028 V_1	0,99934 V_2
Pression. ...	97,708	51,818 cm.
Température .	20,03	19,96

[1]) *Wied. Ann.*, 35, 430, 1888.

[2]) A. Leduc, Recherches sur les Gaz, Paris 1898, p. 86.

[3]) *Trav. et Mém. du Bureau Intern. des Poids et Mesures*, t. XIII, 1903. Après la publication de ma dissertation, il est venu s'y ajouter Lord Rayleigh, *Zeitschr. f. physik. Chem.* 52, 705, 1905.

[4]) Pour la signification de V_5 etc. voir p. 27.

c. Mélange à composition moléculaire $x = 0{,}3072$.

	A	*B*	*C*
Volume.....	0,99975 V_5	0,99983 V_4	0,99972 V_2
Pression	48,188	59,839	115,752 cm.
Température.	20,10	20,14	20,14

Pour donner un exemple des calculs, je considérerai ce dernier mélange. J'ai commencé par réduire les pressions à la température moyenne de 20,13°, en me servant du coefficient de pression „vrai" $\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = 0{,}0034$ à 20° (voir p. 33). Ceci me donna respectivement pour *A*, *B* et *C* les valeurs 48,193, 59,837 et 115,748 cm. Si p_1, V_1 et p_2, V_2 sont deux systèmes de valeurs correspondantes de la pression et du volume, on a en première approximation, ce qui est suffisant pour notre but:

$$1 - \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{B_A}{A_A{}^2}(p_1 - p_2), \qquad (2)$$

p_1 et p_2 étant exprimés en atmosphères. On peut en tirer la valeur de $\frac{B_A}{A_A{}^2}$. J'ai trouvé dans le cas considéré:

en combinant *A* et *C*: $\frac{B_A}{A_A{}^2} = -0{,}003579^5$

„ *B* „ *C*: $-0{,}003407$

moyenne: $-0{,}003493$ à 20,13°.

De même pour CO^2 à 20,00°:

B et *C*: $\frac{B_A}{A_A{}^2} = -0{,}005814$

A „ *C*: $-0{,}005536$

moyenne: $-0{,}005675$,

et pour le mélange 0,2 à 20,00°:

$$\frac{B_A}{A_A{}^2} = -0{,}003847.$$

Si l'on connaissait le coefficient de pression moyen entre 0° et 20°, il serait aisé de calculer A_A dans les différents cas. En effet, si l'on pose $v_A = 1$ dans l'équation:

$$pv_A = A_A + \frac{B_A}{v_A}, \tag{3}$$

on obtient pour le mélange 0,3, à $t = 20{,}13$,

$$1 + \alpha_p \,.\, 20{,}13 = A_A + B_A,$$

où α_p est le coefficient de pression correspondant.

Les deux relations entre A_A et B_A permettent de calculer A_A, et l'on déduit ensuite A_{A_0} de la relation [1]):

$$A_A = A_{A_0}\,(1 + 0{,}0036625\, t). \tag{4}$$

Une difficulté dans ce calcul réside dans le fait que la valeur de α_p pour les mélanges est inconnue, et une erreur dans α_p se retrouve 20 fois agrandie dans A_{A_0}. On peut éviter cette difficulté de la manière suivante:

Introduisons provisoirement la température 20° comme température normale, et mettons l'équation de M. Kamerlingh Onnes, dans le domaine des pressions que nous considérons ici, sous la forme:

$$pV = V_{N20}\left\{A_K + \frac{B_K V_{N20}}{V}\right\}, \tag{5}$$

où V représente le volume réellement occupé par le gaz, et V_{N20} le volume normal à 20°, c'est à dire le volume que la même quantité de gaz occupe à 20° et 1 atmosphère.

On a alors:

$$\begin{aligned} A_K &= A_{K_{20}}\left\{1 + \frac{0{,}0036625}{1 + 20 \times 0{,}0036625}(t - 20)\right\} \\ &= A_{K_{20}}\left\{1 + 0{,}0034125\,(t - 20)\right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

En identifiant avec

$$pV = V_N\left\{A_A + \frac{B_A V_N}{V}\right\}, \tag{7}$$

où V_N est le volume normal à 0°, on trouve:

[1]) *Versl. Kon. Akad.*, juin 1901, p. 141; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 71, p. 8.

$$\left.\begin{aligned} A_A \cdot V_N &= A_K \cdot V_{N_{20}} \\ B_A \cdot V_N{}^2 &= B_K \cdot V_{N_{20}}{}^2 \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

d'où

$$\frac{B_A}{A_A{}^2} = \frac{B_K}{A_K{}^2}. \tag{9}$$

On sait donc que pour le mélange 0,3 à 20,13°:

$$\frac{B_K}{A_K{}^2} = -0{,}003493.$$

Posant maintenant $t = 20{,}13$ et $V = V_{N_{20}}$ dans (5) il vient

$$1 + 0{,}13\, \alpha_{pK} = A_K + B_K,$$

où α_{pK} représente le coefficient de pression du mélange (moyen entre 20° et t) quand la pression initiale (à 20°) est de 1 atmosphère. Ces deux relations permettent de calculer A_K, et il est à remarquer maintenant qu'une erreur sur α_{pK} est diminuée en passant dans le résultat. On déduit $A_{K_{20}}$ de A_K à l'aide de la relation (6).

Pour le mélange en question j'ai trouvé, à 20,13°,

$$A_K = 1{,}003969, \qquad B_K = -0{,}003521;$$

j'ai fait usage ici de la valeur $\alpha_{pK} = 0{,}003445$, obtenue par une interpolation, linéaire par rapport à x, entre la valeur 0,003454 pour CO^2, déduite des données de M. Chappuis, et la valeur 0,003423 pour O^2, déduite de celles de M. Jolly. Il vient en outre $A_{K_{20}} = 1{,}003524$.

Les diverses valeurs ainsi trouvées sont réunies dans le tableau XIII.

Tableau XIII.

	$A_{K_{20}}$	x	Poids
CO^2	1,00574	0	1
Mélange 0,2.....	1,00388	0,1994	$\frac{2}{3}$
„ 0,3.....	1,00352	0,3072	1
O^2.....	1,00064	1	1

Pour O^2 j'ai calculé A_{K20} au moyen des données pour A_{A20} et B_{A20}, mentionnées à la page 29.

J'ai posé maintenant

$$_xA_{K20} = 1 + a_0 (1 - x)^2 + 2 a_{01} x (1 - x) + a_1 x^2,$$

et j'ai calculé les coefficients par la méthode des moindres carrés. Comparé à $_xA_{K20} - 1$ on peut admettre que x est connu avec une précision absolue. J'ai trouvé

$$a_0 = 0{,}00570$$
$$a_{01} = 0{,}00142$$
$$a_1 = 0{,}00065.$$

Dans le tableau suivant XIV les valeurs ainsi calculées C sont comparées aux valeurs directement observées O.

Tableau XIV.

	O	C	$O - C$
CO^2	1,00574	1,00570	+ 0,00004
Mélange 0,2	1,00388	1,00413	— 25
„ 0,3	1,00352	1,00340	+ 12
O^2	1,00064	1,00065	— 1

Pour le calcul des coefficients A_{A0}, en partant des coefficients A_{K20}, la connaissance précise du coefficient de pression est nécessaire. Mais nous verrons au chapitre suivant comment les coefficients A_{K20} peuvent servir à déduire, du volume mesuré à 20° environ, le volume normal théorique (à 0°) d'une certaine quantité de gaz.

3. La détermination des isothermes entre 60 et 140 atmosphères et entre — 15° et + 60° C.

1. *L'installation.* Après avoir été rincés [1]) et séchés, le tube manométrique et le tube piézométrique furent scellés au sommet [2]), puis mastiqués dans un ajutage en acier. Comme M. Schalkwijk [3]) je me suis servi à cet effet du mastic rouge et dur de Mendelejeff, recouvert en dessous d'un mastic noir et tendre. L'ajutage est représenté sur la pl. II, fig. 2. Le bord O_1, qui s'applique exactement dans la portion cylindrique intérieure du tube de compression, sert à éviter que la rondelle de cuir, qui sert à obtenir l'obturation parfaite de l'espace entre la face O_2 de l'ajutage et la face correspondante du cylindre de compression, ne soit refoulée latéralement [4]); le rebord O_3 est destiné à empêcher que la rondelle de cuir, qui doit servir à rendre étanche le manteau à température constante vissé sur O_4, ne soit pressée latéralement contre le verre, qui serait alors trop fortement tordu quand on dévisse le manteau. Après que les tubes (manomètre et piézomètre) eurent été remplis de gaz, après évacuation répétée, sous chauffage, à la pompe à mercure, et que le volume normal eut été déterminé [5]), les tubes furent placés dans leurs cylindres de compression respectifs (voir pl. II, fig. 1, *A* et *B*). L'installation, telle qu'elle a été représentée par exemple sur la pl. IX, fig. 1, du tome XI, a été quelque peu modifiée. Les deux cylindres *A* et *B*, où sont fixés les tubes manométrique et piézométrique, sont entièrement remplis de mercure doublement distillé. Ils communiquent entr'eux par le bas, au moyen de tubes d'acier

---

[1]) Pour nettoyer les tubes, on y a fait passer successivement de l'acide nitrique concentré, de l'eau distillée, une solution de potasse caustique, de l'eau distillée (du commerce), et enfin encore une fois de l'eau distillée spécialement en présence de permanganate de potasse, tous ces liquides étant chauffés jusqu'à leur point d'ébullition.

[2]) Voir pp. 15 et 40. Dans le tube piézométrique j'avais introduit tout d'abord l'agitateur, préalablement nettoyé, en prenant toutes les précautions pour en garantir la propreté.

[3]) Dissertation, p. 22; *Versl. Kon. Akad.*, juin 1901, p. 119; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 70 V, p. 4. Même pour les plus hautes pressions que j'ai appliquées, je n'ai pas reconnu la nécessité de couvrir le mastic d'une solution de caoutchouc.

[4]) Cette précaution a été introduite par M. Hartman.

[5]) Voir § 2.

et d'une pièce en T en acier, et avec un troisième cylindre C. Ce troisième cylindre est rempli en partie de mercure et en partie de glycérine; pour la transmission de la pression la glycérine y est refoulée par le robinet K_1, au moyen d'une pompe de SCHÄFFER-BUDENBERG. Ce dispositif à l'avantage que les tubes remplis de gaz ne sont jamais en contact avec la glycérine, et même le mercure qui est pressé dans les tubes ne vient que fort peu en contact avec ce liquide. Dans ces circonstances il est aisé de retirer le tube piézométrique du cylindre de compression, une fois les mesures terminées, pour déterminer de nouveau le volume normal. Les ménisques mercuriels dans les tubes gardaient d'ailleurs longtemps leur pureté; ils ne se recouvraient pas d'un dépôt, ou dans tous les cas le dépôt était très faible.

Les cylindres de compression et les tubes de raccord avaient été préalablement lavés au benzène, qui en fut éliminé ensuite par chauffage et en y lançant un courant d'air. Les raccords étaient rendus étanches au moyen de rondelles de cuir trempées dans la paraffine. La bourre qui devait prévenir les fuites de mercure, le long de la tige des robinets à haute pression K_2, K_3 et K_5, par où passait le mercure dirigé vers les tubes d'observation, se composait de rondelles coupées de bouchons d'Espagne choisis. Cela n'était pas nécessaire pour les robinets K_4 et K_6, qui ne servaient qu'à laisser échapper le mercure en excès, lors du placement des tubes dans les cylindres. Pendant les observations je fermais la communication des deux cylindres A et B avec C, en fermant le robinet K_2, afin d'être à l'abri de fuites possibles de la pompe ou de la conduite de glycérine [1]). Mais j'ai veillé à ce que la partie ainsi isolée fût parfaitemant étanche, même aux plus hautes pressions [2]).

2. *La mesure des volumes.* J'ai déterminé le volume normal de la manière qui a été décrite antérieurement [3]); en particulier j'ai pris les

---

[1]) Pour produire de petits changements dans la pression, il suffisait d'agir sur la tige d'un des robinets de haute pression, K_3 et K_5, de la partie isolée. Pour faciliter cette opération, les clefs de ces robinets étaient pourvues d'un levier sous forme d'un tube en cuivre.

[2]) Pour éviter, pendant les expériences, les changements de température de la partie isolée et prévenir ainsi un changement de volume du gaz par la dilatation du mercure, j'avais enveloppé les cylindres A et B de couvertures de laine.

[3]) *Versl. Kon. Akad.*, juin 1901 et mars 1902; *Comm. phys. lab. Leiden*, nos. 70 V et 78.

mêmes précautions pour maintenir constantes la température et la pression; j'ai notamment placé le tube dans un manteau décrit dans la *Comm.* n°. 50 (*Versl. Kon. Akad.*, juin 1899), traversé par un courant d'eau à 20°, et j'ai mis l'espace au-dessus du mercure dans le petit tube *g* (fig. 1, p. 4), en même temps que la branche ouverte d'un baromètre, en communication avec un réservoir placé dans la glace, dans le genre de celui décrit à la page 18, à propos de l'appareil de mélange.

Le volume normal a été déterminé au moins deux fois avant et deux fois après les mesures. Je dois y ajouter toutefois que tel n'a pas été le cas pour le premier échantillon d'anhydride carbonique, dont j'ai examiné les isothermes de 25,55° jusqu' à 37,09°, parce que le tube piézométrique se rompit à la fin de la détermination de ces isothermes; et pour le manomètre cette opération put être avantageusement remplacée par une comparaison directe avec un manomètre étalon, sur laquelle je reviendrai d'ailleurs.

C'est ainsi que j'ai trouvé comme volume normal du manomètre à hydrogène:

22 sept. 1902:	23,217 cm³.
„	23,194 „
„	23,192 „
12 nov. 1902:	23,220 „

Comme les trois premières mesures n'ont pas été effectuées dans le bain à température constante, j'ai accordé un poids égal à 3 à la dernière détermination, dans le calcul de la moyenne, et j'ai admis $V_N = 23{,}210^5$ cm³.

La plupart des déterminations avec le premier mélange (0,1 O^2 dans CO^2) ont été faites à l'aide d'un manomètre à air. Dans le cours des expériences il me semblait que les pressions de saturation augmentaient avec le temps. Cela semblait prouver que le volume normal du manomètre changeait. J'ai donc retiré le manomètre du cylindre de compression et j'ai déterminé de nouveau le volume normal; j'ai reconnu qu'il s'était abaissé de 22,114 cm³. (9 mai 1901) à 22,056 cm³. (23 août 1902). C'est alors que j'ai calibré le manomètre pour la seconde fois (calibrage *B*, voir p. 5), et je l'ai rempli d'hydrogène; j'ai contrôlé ensuite à l'aide de ce manomètre deux points de chacune des isothermes que j'avais déjà déterminées. On trouve dans la colonne *C*

du tableau XV le moyen rapport des pressions mesurées au manomètre à hydrogène et de celles mesurées au manomètre à air; comme volume normal de ce dernier j'ai pris la moyenne entre les valeurs déterminées avant et après les expériences. La colonne *A* fait connaître la date, *B* la température relative à l'isotherme.

Tableau XV.

A	*B*	*C*
20 juin 1902	17,60	1,0020
20 „ „	20,29	1,0017
23 „ „	21,99	$1,0016^5$
24 „ „	22,68	1,0023
25 „ „	23,29	1,0013
26 „ „	25,20	1,0019
	moyenne:	1,0018

La colonne *C* ne permet pas de reconnaître une allure régulière dans ce court espace de temps; pour ces isothermes j'ai donc multiplié par 1,0018 les pressions observées à l'aide du manomètre à air. Les 5 et 6 juin et le 21 août j'ai déterminé des points de la courbe de saturation. Pour les mettre d'accord avec ceux que j'ai déterminés plus tard avec le manomètre à hydrogène, j'ai dû multiplier les pressions par des facteurs que l'on trouve réunis dans le tableau suivant avec le facteur susmentionné. Ce tableau fait donc connaître l'allure de la variation pendant la durée de ces observations.

Tableau XVI.

5/6 juin 1902	$1,0021^5$
20/26 juin 1902	1,0018
21 août 1902	0,9997

Si l'on compare ces nombres avec les valeurs du volume normal avant et après les mesures, on constate que le changement presque tout entier s'est opéré dans ces trois derniers mois. De mai 1901 à juin 1902 le manomètre avait été peu employé et la pression était restée basse, tandis que dans les mois de juin à août le manomètre avait été souvent employé et soumis pendant un temps assez long à des pressions de 60 à 125 atmosphères. Il semble donc que la variation soit beaucoup plus forte à haute pression que sous une pression basse.

Une pareille variation des indications d'un manomètre à air avec le temps, probablement causée par une absorption d'oxygène par le mercure, a déjà été observée par MM. KUENEN et ROBSON [1]).

Pour les mélanges contenant 0,1 et 0,2 d'oxygène les changements dans le volume normal ont été inférieurs à $\frac{1}{1000}$. Comme volume normal j'ai alors admis la moyenne des valeurs avant et après les mesures.

Mais pour un mélange dont la teneur moléculaire était 0,3072, et qui avait été soumis pendant quelques semaines à une haute pression, le volume normal était descendu de 72,878[5] cm³. avant les expériences (15 juin 1903) à 70,980 cm³. après (13 août). Comme selon toute probabilité la variation du volume normal était accompagnée d'un changement notable de composition, je ne communiquerai pas les résultats obtenus avec ce mélange, pour lequel les déterminations de pression et de volume, à la fin de la condensation, avaient été poussées jusqu'à − 14,7° [2]).

On voit donc combien il est important de pouvoir répéter, après les mesures, la détermination du volume normal [3]).

De l'observation du volume occupé par le gaz à une température voisine de 20°, et sous une pression d'environ 1 atm. (= 75,9467 cm. de mercure à Leyden) [4]), j'ai déduit le volume que le gaz occuperait à

[1]) *Phil. Mag.*, jan. 1902, p. 150. Voir aussi JAQUEROD et PERROT. *Arch. des Sc. phys. et nat.*, (4) 20, 129, 1905.

[2]) J'ai reconnu plus tard que la variation du volume normal, constatée ici, a probablement été causée par la rupture du piézomètre, à l'endroit où il était mastiqué dans l'ajutage.

[3]) Voir *Versl. Kon. Akad.*, juin 1899 et juin 1901; *Comm. phys. lab. Leiden*, nos. 50 et 70 V.

[4]) *Versl. Kon. Akad.*, juin 1901, p. 122; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 70 V, p. 7.

20° et 1 atm. J'ai fait usage à cet effet des coefficients de pression mentionnés à la page 33 et j'ai appliqué la loi de MARIOTTE. En multipliant par les valeurs de A_{20} mentionnées sous O au tableau XIV (p. 34), on déduit de là le volume que le gaz occuperait si on le comprimait, à 20°, à partir d'un volume infiniment grand jusqu'à une pression de 1 atm., et s'il suivait pendant cette compression les lois des gaz parfaits. On trouve ensuite le volume normal théorique (à 0°) à l'aide du coefficient de pression (= coefficient de dilatation) pour l'état gazeux parfait. Comme au commencement de mes déterminations les calculs de la correction à apporter au coefficient de pression de l'hydrogène pur (d'après *Comm.* n°. 71, juin 1901), pour obtenir le coefficient d'un gaz parfait, n'étaient pas encore achevés [1]), j'ai admis pour ce dernier coefficient la valeur 0,0036625, donnée comme première approximation dans *Comm.* n°. 71. Mais la modification que mes résultats demanderaient de ce chef sera certainement bien inférieure au degré de précision que j'ai pu atteindre dans mes expériences relatives aux isothermes, pour les hautes pressions.

Après tout ce que je viens de communiquer au sujet des calibrages (voir chap. 1), la mesure du volume normal et la réduction au volume normal théorique, il ne me reste presque plus rien à dire de la mesure des volumes. J'ai lu à la loupe la situation du sommet et de la base du ménisque mercuriel, en évitant de la façon susdite les erreurs de parallaxe (voir p. 5). J'ai pu effectuer les lectures à 0,1 mm. près. J'ai admis que dans la tige graduée du tube piézométrique le ménisque mercuriel avait la forme d'une calotte sphérique; dans ces circonstances on obtient, vu la manière d'effectuer les lectures, un résultat suffisamment précis pour le volume du ménisque en multipliant la section par la demi-hauteur de la flèche. Chaque fois qu'il se produisait une séparation en deux phases, j'ai lu la situation du ménisque liquide. J'ai apporté des corrections pour la dilatation du verre par l'effet de la température et de la pression intérieure.

3. *La mesure des pressions.* Les pressions ont été mesurées à l'aide d'un manomètre à hydrogène, permettant d'aller de 62 à 196 atmosphères [2]).

[1]) Voir *Comm. phys. lab. Leiden* n° 92, p. 16.

[2]) J'ai reconnu que les manipulations au chalumeau de la tige des tubes manométrique et piézométrique, telles que le scellage du sommet de ce dernier

J'ai traité le calibrage du manomètre au chap. I et la détermination du volume normal au paragraphe précédent. Je n'ai plus qu'à mentionner que l'hydrogène était préparé par électrolyse d'acide chlorhydrique pur, suivant la méthode décrite par M. KAMERLINGH ONNES [1]).

Dans le tableau XVII la colonne d_A fait connaître la densité de l'hydrogène, quand le ménisque se trouve au niveau du trait Q, à la température de 20°; cette densité est exprimée en prenant comme unité la densité normale (0°, 1 atm. à 45° lat. N). Elle est déduite du tableau VII (p. 14) et du volume normal donné au § 2, en tenant compte du volume dans le capillaire étroit e (voir fig. 1, p. 4), entre le trait de repère et l'endroit où il a été scellé. Pour des valeurs comprises entre 25 et 50, Q augmente par degrés de 0,5; de cette manière l'erreur que l'on commet sur les hautes pressions (jusqu'à $Q = 40$), en effectuant une interpolation linéaire, est moindre que 0,01 atm.

Afin de pouvoir déduire de ces densités les pressions correspondantes, nous devons connaître l'isotherme de l'hydrogène à 20°. Des mesures relatives à cette isotherme ont été effectuées par M. SCHALKWIJK, mais elles ne s'étendent que jusqu'à la densité 54. Vu l'erreur moyenne commise dans la détermination du coefficient C de la série de KAMERLINGH ONNES (voir la dissertation de M. SCHALKWIJK, p. 115), il n'est pas permis de faire une extrapolation jusqu'aux densités dont nous avons besoin. Pour ces grandes densités nous disposons des observations de M. AMAGAT (de 100 à 3000 atmosphères). Mais l'isotherme de l'hydrogène à 20° que l'on déduit des données de M. AMAGAT, savoir:

$$pv_{A_{20}} = 1{,}07252 + 0{,}0007194\, d_A + 0{,}000000672\, d_A^2$$

(voir SCHALKWIJK, diss. p. 121), ne s'accorde point avec celle qui résulte des observations de M. SCHALKWIJK. Ce dernier auteur a trouvé p. ex., pour $d_A = 55$, $pv_{A_{20}} = 1{,}11194$ (l. c. p. 124), d'où $p = 61{,}157$, tandis que l'on déduit de l'isotherme suivant AMAGAT, pour $p = 61{,}157$,

tube, devaient être effectuées avec le plus grand soin, et que le tube devait être refroidi lentement; sans quoi il se produisait dans le verre des tensions qui provoquaient la rupture des tubes aux hautes pressions (dans mes expériences j'allais d'ordinaire jusqu'à 140 atmosphères, mais le manomètre a plus d'une fois supporté une pression de 195 atmosphères).

[1]) *Versl. Kon. Akad.*, mai 1896, p. 42; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 27, p. 11. Voir aussi *Comm.* n°. 60, p. 17.

Tableau XVII.

Q	d_A	$pv_{A_{20}}$	p	Q	d_A	$pv_{A_{20}}$	p
0	56,28	1,1130	62,64	31,5	95,46	1,1451	109,31
1	57,01 5	1,1135	63,49	32	96,53	1,1460	110,62 5
2	57,77	1,1141	64,36	32,5	97,62	1,1469	111,96
3	58,55	1,1147	65,27	33	98,73	1,1478	113,32
4	59,35	1,1154	66,20	33,5	99,87 5	1,1488	114,74
5	60,17 5	1,1160	67,16	34	101,04	1,1498	116,18
6	61,02	1,1167	68,14	34,5	102,23	1,1508 5	117,65
7	61,89 5	1,1174	69,16	35	103,45 5	1,1519	119,17
8	62,79	1,1181	70,21	35,5	104,71	1,1529 5	120,72 5
9	63,71 5	1,1189	71,29	36	106,00	1,1540	122,32
10	64,67	1,1197	72,41	36,5	107,31	1,1551 5	123,96
11	65,65	1,1205	73,56	37	108,66	1,1563	125,64
12	66,66	1,1213	74,75	37,5	110,05 5	1,1575 5	127,39
13	67,70	1,1221	75,97	38	111,48 5	1,1588	129,18
14	68,78	1,1230	77,24	38,5	112,95	1,1600 5	131,03
15	69,89	1,1239	78,55	39	114,45	1,1613	132,91
16	71,04	1,1248	79,91	39,5	116,00	1,1627	134,87
17	72,22	1,1258	81,31	40	117,59	1,1641	136,89
18	73,46	1,1268	82,77 5	40,5	119,23	1,1656 5	138,98
19	74,73	1,1278	84,28	41	120,92	1,1670	141,11
20	76,05	1,1289	85,85	41,5	122,66	1,1685 5	143,33
21	77,42	1,1300	87,48 5	42	124,45	1,1701	145,62
22	78,83 5	1,1312	89,18	42,5	126,29	1,1717 5	147,98
23	80,31 5	1,1324	90,95	43	128,19	1,1734	150,42
24	81,85	1,1337	92,97	43,5	130,16	1,1751	152,95
25	83,44	1,1350	94,70 5	44	132,22	1,1768	155,60
25,5	84,26	1,1357	95,69	44,5	134,32	1,1788	158,34
26	85,09	1,1364	96,70	45	136,45	1,1808	161,12
26,5	85,94	1,1371 5	97,73	45,5	138,68	1,1828 5	164,04
27	86,81	1,1379	98,78	46	140,99	1,1849	167,06
27,5	87,69 5	1,1386 5	99,85	46,5	143,37	1,1871	170,19
28	88,60	1,1394	100,95	47	145,84	1,1893	173,45
28,5	89,54	1,1401 5	102,04 5	47,5	148,40	1,1918	176,86
29	90,46	1,1409	103,20 5	48	151,04	1,1941	180,36
29,5	91,42	1,1417	104,37 5	48,5	153,78	1,1967	184,03
30	92,40	1,1425	105,57	49	156,63	1,1993	187,85
30,5	93,39 5	1,1433 5	106,78	49,5	159,58	1,2025 5	191,90
31	94,42	1,1442	108,03 5	50	162,64	1,2058	196,11

$d_A = 54{,}897$. Or les observations de M. SCHALKWIJK ont été effectuées avec grande précision; en particulier le volume normal a été déterminé avec le plus grand soin [1]). Si l'on y compare la manière dont M. AMAGAT a déterminé le volume normal [2]), il semble qu'il y ait tout lieu de multiplier par $\frac{54{,}897}{55}$ les volumes tels qu'ils ont été déterminés par M. AMAGAT, pour établir l'accord entre ses déterminations et celles de M. SCHALKWIJK, en attendant que nous disposions de mesures plus précises, relatives aux isothermes de l'hydrogène aux grandes densités.

Nous obtenons ainsi:

$$pv_{A_{20}} = 1{,}0705 + 0{,}000717\, d_A + 0{,}00000067\, d_A^2.$$

Pour établir un contrôle, on peut comparer la valeur de $pv_{A_{20}}$ que l'on en déduit pour $d_A = 1$, savoir 1,0712, avec celle qui résulte du coefficient de dilatation suivant M. CHAPPUIS, $\alpha_p = 0{,}0036606$ [3]), c. à d. $pv_{A_{20}} = 1{,}0732$. La différence est $\frac{1}{500}$; de sorte que l'équation que nous venons de trouver, qui s'écarte de $\frac{1}{500}$ des observations de M. AMAGAT aux grandes densités, ne s'écarte pas davantage de celles aux faibles densités.

Le terme suivant dans la série de M. KAMERLINGH ONNES serait $\frac{D_A}{v_A^4}$. Si l'on emprunte une valeur de D_A aux données relatives à l'hydrogène de 0°, 15,4°, 99,25° et 200,25° [4]), on trouve que pour $d_A = 150$ ce terme contribuerait pour 0,0009 dans la valeur de $pv_{A_{20}}$, ce qui fait qu'en négligeant ce terme on ne commet aux plus hautes pressions qu'une erreur de moins de $\frac{1}{1000}$. Puisque nous sommes encore dans l'incertitude au sujet de l'allure exacte de l'isotherme, j'ai omis ce terme.

---

[1]) Voir *Versl. Kon. Akad.*, juin 1901; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 70 V; dissertation, chapitre VI.

[2]) *Ann. de Chim. et de Phys.*, 29, 83, 1893.

[3]) Voir SCHALKWIJK, diss. p. 116.

[4]) *Versl. Kon. Akad.*, juin 1901, p. 143; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 71, p. 10.

Les valeurs de pv_{A20} ainsi calculées pour les diverses valeurs de d_A dans le tableau XVII, je les ai inscrites dans ce tableau avec les valeurs de p qui s'en déduisent. Une fois que l'isotherme de l'hydrogène aura été déterminée avec une plus grande précision dans la région des densités dont il est question ici, les pressions mentionnées pourront être corrigées, et le tableau précédent pourra rendre quelque service [1]).

La température du manomètre différait de deux dixièmes de degré au maximum de 20°. Les coefficients de température pour l'hydrogène à 20° ont été déterminés au moyen de la valeur de A_{A0} de la série de Kamerlingh Onnes, donnée dans la *Comm.* n°. 71, et au moyen des valeurs de B_A et C_A suivant Amagat [2]), pour les températures 0°, 15,4° et 47,3°, en tenant compte de la réduction communiquée ci-dessus, pour obtenir l'accord avec l'isotherme de M. Schalkwijk. Le tableau XVIII contient, dans la colonne $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$, les coefficients de température ainsi calculés pour les diverses valeurs de p.

Tableau XVIII.

p	$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$	p	$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$	p	$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$
200	0,714	150	0,531	100	0,349
190	0,677	140	0,494	90	0,314
180	0,640	130	0,458	80	0,279
170	0,603	120	0,422	70	0,243
160	0,567	110	0,385	60	0,208

J'ai apporté des corrections pour la différence de hauteur des niveaux du mercure dans le manomètre et dans le piézomètre, pour la dilatation du tube manométrique par la pression intérieure, et pour la

[1]) Dans le calcul des pressions observées au manomètre, pour le mélange contenant 0,1 O^2, j'ai fait usage des coefficients de la série de Kamerlingh Onnes, déduits des observations de M. Amagat relatives à l'air atmosphérique (voir aussi p. 26).

[2]) Voir Schalkwijk, diss. p. 120.

différence de dépression capillaire dans les deux tubes. Pour déterminer cette dernière correction, j'ai fait une expérience pour mesurer la dépression capillaire dans un tube de même diamètre intérieur que le tube manométrique. La correction n'atteignait que 0,01 atmosphère.

La lecture s'effectuait comme pour le piézomètre (voir p. 40). Le niveau du mercure dans le manomètre, ainsi que les températures, ont été lus avant et après la lecture du ménisque et de la température dans le tube piézométrique. La température du manomètre pouvait être déterminée jusqu'à 0,05° près.

Après les déterminations d'isothermes le manomètre à hydrogène a été comparé avec les manomètres étalons [1]), que M. SCHALKWIJK avait comparés d'une façon fort précise avec le manomètre ouvert [2]). Pour rendre possible cette comparaison, le manomètre à hydrogène avait été construit de telle sorte que la pression la plus basse que l'on pouvait y observer pouvait être déterminée à l'aide du manomètre étalon n°. IV [3]). On trouve sous *A*, au tableau XIX, la pression mesurée à l'aide du manomètre à hydrogène dont je me suis servi, et sous *B* la pression mesurée au manomètre étalon.

Tableau XIX.

A	*B*
64,04	64,040
64,02	64,024

L'accord est, comme on voit, fort satisfaisant. Cette comparaison remplace la détermination du volume normal après les mesures, ainsi que de nouvelles déterminations de la section normale de la tige graduée (voir p. 15). Comme l'erreur relative moyenne de 0,19 %, mentionnée à propos des calibrages, devait être attribuée surtout à la différence entre les deux déterminations de la section normale, la précision des indications du manomètre est considérablement augmentée par cette comparaison.

---

[1]) Voir *Versl. Kon. Akad.*, juin 1899; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 50.

[2]) *Versl. Kon. Akad.*, déc. 1900 et janv., mai et juin 1901; *Comm. phys. lab. Leiden*. nos. 67 et 70.

[3]) Au sujet de la manière dont cette comparaison fut faite, voir ces *Archives*, (2), 11, 409, 1906.

Tableau XX.

v	p_a	p_d	Δp	$v_{liq.a}$	$v_{liq.d}$	$\Delta v_{liq.}$
0,012159	58,66	58,60	+ 0,06			
11384	60,88	60,92	— 0,04			
10605	63,27	63,31	— 0,04			
0,009826	65,74^5	65,77^5	— 0,03			
9047	68,26	68,31	— 0,05			
8269	70,90	70,94	— 0,04			
7489^5	73,47	73,51	— 0,04			
6712^5	76,07	76,11	— 0,04			
5908^5	78,72^5			*c. c.* différence du volume saturé:		
5917^5		78,75^5	— 0,03	*c. c.* — 0,000009		
5546	79,95^5	79,98^5	— 0,03	0,000217	0,000180	+ 0,000037
5157	81,26^5	81,39^5	— 0,13	397	403	— 6
4768	82,88^5	82,89^5	— 0,01	612	583	+ 29
4379	84,70^5	84,76^5	— 0,06	746	672	+ 47
4309		85,05			591	
4278	85,22			625		
4258		85,35			288	
4243		85,40			95	
4219	85,54			125		
4215^5	85,54			*f.c.* différence du volume saturé:		
4220^5		85,52	+ 0,02	*f.c.* — 0,000005		
3991^5	87,10^5	86,95^5	+ 0,15			
3604	90,24	90,22	+ 0,02			
3049	99,29^5	99,08^5	+ 0,21			
2752	112,63	112,71	— 0,08			
2612	124,64	124,36	+ 0,28			

L'équilibre thermodynamique dans le tube piézométrique était obtenu au moyen d'un agitateur électromagnétique; pour être certain de l'établissement de l'équilibre de pression entre le tube piézométrique et le manomètre, j'ai toujours attendu 5 minutes après chaque installation avant de faire les lectures. J'ai fait en général deux séries de déterminations pour chaque isotherme, l'une commençant par la pression la plus basse et finissant par la plus élevée, l'autre en sens contraire. Les résultats de ces deux déterminations différaient rarement de $\frac{1}{500}$. Pour permettre d'en juger, j'ai dressé le tableau XX, qui se rapporte à l'isotherme 22,68° du mélange à 0,1047 d'oxygène. Dans ce tableau v représente le volume, p_a et p_d les pressions observées dans les deux séries, l'une ascendante, l'autre descendante, Δp la différence, $v_{liq.\,a}$ et $v_{liq.\,d}$ les volumes du liquide dans les deux séries, et $\Delta v_{liq.}$ la différence entre les deux.

L'accord entre les pressions est satisfaisant, mais celui entre les volumes liquides laisse à désirer. Bien que cela puisse s'expliquer en partie par le fait, que le volume liquide ne saurait être observé d'une manière fort précise, parce que la forme du ménisque liquide n'est pas déterminée aussi nettement que pour le mercure, et qu'il n'est pas aussi facile d'y éviter des erreurs de parallaxe que dans le cas de ménisques mercuriels, il n'en résulte pas moins que, si l'on désire augmenter la précision de ces mesures, on doit prendre de plus grandes précautions encore pour établir l'équilibre, en agitant encore plus fortement et en attendant plus longtemps encore avant de faire les lectures.

4. *La constance et la mesure des températures.* Le manomètre était enveloppé d'un manteau, par lequel circulait de l'eau dont la température était maintenue constante par un thermostat, décrit par M. Schalkwijk [1]). Dans cet appareil l'eau de la conduite passe par un moteur actionnant les agitateurs et se déverse dans une cuve en cuivre (cuve de chauffage); l'excès s'échappe par une décharge et le reste est chauffé à la température voulue par un système de deux flammes, l'une fixe, l'autre variable. L'accès du gaz d'éclairage à cette dernière flamme

---

[1]) *Versl. Kon. Akad.*, mai 1901; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 70 III, diss. chap. III.

était réglé au moyen d'un thermorégulateur au xylène [1]), composé d'un tube en spirale en cuivre rouge, portant une pièce en verre recourbée d'abord vers le bas, puis vers le haut. Ce tube est évacué, puis rempli de xylène, d'où l'air a été chassé par chauffage, et ce liquide est séparé de l'air par une colonne de mercure, qui empêche le passage du gaz d'éclairage dans la branche recourbée vers le haut, quand le xylène se dilate par élévation de température. Pour diminuer en outre les changements de température qui subsistent encore dans la cuve de chauffage, l'eau venant de cette cuve vient se mélanger, dans une cuve de mélange bien empaquetée, avec une grande quantité d'eau chauffée à la température voulue. C'est de cette cuve de mélange que l'eau est dirigée vers le manteau de l'appareil d'observation, en passant par des conduites bien isolées.

Le tube piézométrique était maintenu de la même façon à une température constante, au moyen d'un deuxième thermostat, qui ne différait du précédent que par les points suivants:

La communication entre le bain de chauffage et la cuve de mélange, cette cuve elle-même et le raccordement de cette cuve avec le manteau sont isolés avec plus de soin encore, à l'aide de laine, de papier et de feutre; cette précaution plus grande était nécessaire parce que la température différait davantage de celle de l'enceinte.

La pièce de verre du thermorégulateur porte un tube latéral avec robinet, permettant d'introduire aisément dans le thermo-régulateur, ou d'en soutirer, une petite quantité de mercure d'un petit réservoir, rélié à ce tube latéral par un tube en caoutchouc; de cette façon il est possible d'installer sur diverses températures [2]). La partie étroite du tube de verre, où se produit le réglage de l'accès du gaz, est divisée en millimètres sur une longueur de 4 cm. environ, ce qui facilite une installation précise par le déplacement du tube adducteur du gaz.

Pour obtenir des températures supérieures à 35°, l'eau passait successivement par deux bains de chauffage, munis chacun d'un thermorégulateur; le premier bain portait l'eau à 35°, l'autre à la température

---

[1]) Voir Schalkwijk, *loc. cit.* et Kamerlingh Onnes et Hyndman, *Versl. Kon. Akad.*, mars 1902, p. 810; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 78, p. 4.

[2]) Un pareil dispositif a été recommandé par M. Friedländer, *Zeitschr. f. physik. Chem.*, 38, 401 1901.

voulue. Pour éviter les échanges thermiques avec l'enceinte, le dernier bain était enveloppé d'asbeste, sauf à l'endroit où il venait en contact avec les flammes.

L'un des thermorégulateurs, destiné aux hautes températures, était rempli de xylène et permettait d'atteindre 90°; l'autre, devant servir à des températures basses, était rempli de benzène, dont j'avais évalué à 0,0011 le coefficient de dilatation, et permettait d'aller de — 10° à + 40°.

Dans les cas où la température était inférieure à celle de l'eau de la distribution, l'eau traversait, entre la décharge et le bain de chauffage, une cuve en zinc à double paroi, tapissée de feutre; dans la cuve on introduisait continuellement de la glace en petits fragments.

En ramenant vers la décharge, au moyen d'une pompe à membrane [1]), et à travers des conduites enveloppées de laine, l'eau qui avait traversé le manteau du tube d'observation, il m'a été possible de faire des observations jusqu'à 1,9° C. Pour les expériences avec le mélange à 0,3 O^2, mentionnés à la page 39, j'ai fait usage d'un courant d'une solution de chlorure de calcium, de température constante [2]).

Pour les températures supérieures à 30°, ainsi que pour celles qui étaient d'autant inférieures à la température du laboratoire, j'ai reconnu qu'il était nécessaire de remplacer le bain d'observation, qui était d'abord un simple tube en verre, par un manteau à vide. En introduisant cette modification, la température ne variait, sur une hauteur de 33 cm., que de 0,02° à 34°, et cela sans agiter. J'ai d'ailleurs agité avant chaque observation.

Le manteau à vide M (pl. II, fig. 1) se compose de deux tubes en verre raccordés; conformément au modèle décrit par MM. Kamerlingh Onnes et Heuse [3]), la paroi extérieure repose dans une boîte élastique V, permettant à cette paroi de suivre les changements de longueur de la paroi interne, par suite des changements de température, sans qu'il se produise de fortes tensions dans le verre. Cette boîte est placée aussi bas que possible, pour ne pas entraver le mouvement d'une bobine K, qui doit produire le mouvement de l'agitateur électromagnétique, et

---

[1]) Voir de Haas, dissertation, Leyden 1894, fig. 1.

[2]) *Versl. Kon. Akad.*, juin 1903; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 87 (voir la planche II, où est dessinée toute l'installation avec thermostat et manteau d'observation).

[3]) *Versl. Kon. Akad.*, juin 1903, p. 214; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 85.

qui se déplace en même temps qu'un anneau en fer doux, attaché à l'agitateur R. Au-dessous du manteau double il y a encore une portion du manteau simple; celle-ci est fixée, au moyen d'un anneau en caoutchouc, à une pièce N, composée d'un tube de verre avec tube latéral N_1; c'est par ce tube latéral que le courant liquide de température constante entre dans le manteau. La pièce N est mastiquée au moyen de soufre dans un tube en cuivre N_2, avec écrou pouvant être vissé sur l'ajutage O. Pour éviter une conduction de la chaleur vers l'ajutage, dont le mastic pourrait devenir trop mou, j'ai versé dans N une couche de soufre N_3, dans laquelle restait libre un canal bien centré, livrant passage au tube piézométrique. En haut le manteau à vide se prolongeait en un tube long de 50 cm. [1]) avec tube abducteur, qui s'adaptait sur M au moyen d'un anneau en caoutchouc; un anneau en liège servait à empêcher qu'il ne se produisît de petites fissures dans la soudure des parois interne et externe, par suite de contact avec le tube de prolongement en verre. Les portions simples du manteau étaient bien isolées par de la laine [2]).

Afin d'éviter des changements de température du gaz comprimé dans le tube piézométrique par une conduction de chaleur, à travers la colonne mercurielle, vers le mercure dans les cylindres de compression, j'ai fait en sorte que, même dans les observations où le ménisque de mercure occupait la position la plus basse, il restait encore dans le manteau une colonne de mercure de 40 cm. de longueur.

La température du tube piézométrique était lue à la loupe, jusqu'à 0.01° près, sur un thermomètre à chemise (Einschlussthermometer) divisé en dixièmes de degré, avec échelle sur verre opale. J'ai comparé ce thermomètre de temps en temps, et à diverses températures, avec un thermomètre analogue, étalonné à la Reichsanstalt par comparaison avec un thermomètre à air; je tenais compte du déplacement que le point zéro du thermomètre étalon avait subi entretemps, et de la

[1]) J'ai donné à ce tube une aussi grande longueur, pour faire en sorte que, dans le cas de la circulation d'une solution de chlorure de calcium à basse température, il y restât une couche d'air froid, afin d'éviter une condensation continuelle de vapeur d'eau et la formation d'une croûte de glace, qui aurait empêché le fonctionnement de l'agitateur.

[2]) Je n'ai pas représenté, sur la planche II, l'enveloppe de laine couvrant ces parties, ainsi que les tubes adducteurs et même les tubes abducteurs dans le cas d'une circulation froide.

dépression temporaire du zéro, qui atteignait 0°,025 quand le thermomètre avait été exposé à 48° pendant un temps assez long.

5. *Réduction des observations.* Quand les circonstances n'exigeaient pas une constance aussi parfaite de la température que dans la détermination des points de plissement et de contact critique des mélanges et du point critique de l'anhydride carbonique, la température pouvait varier de quelques centièmes de degré pendant une détermination d'isothermes, qui durait en moyenne de 3 à 4 heures. Pour réduire ces observations à une seule et même température, j'ai déduit alors de ces observations les coefficients de pression pour les divers volumes.

Dans les deux séries, l'une pour des pressions continuellement croissantes, l'autre pour des pressions décroissantes, j'ai mesuré les pressions pour des volumes fort peu différents. J'ai déduit de là les pressions correspondant à un même volume, et j'ai pris la moyenne. Quand j'eus reconnu que les deux pressions concordaient suffisamment (voir § 3), je me suis contenté de prendre simplement les moyennes des volumes et des pressions des deux points correspondants.

---

4. Isothermes de l'anhydride carbonique pur, entre 25° et 60° C. et entre 60 et 140 atmosphères.

1. *Motif de l'examen de l'anhydride carbonique.* Bien que M. Amagat ait fait un examen détaillé des isothermes de l'anhydride carbonique, j'en ai néanmoins déterminé de nouveau quelques isothermes, ainsi que le point critique. J'y ai été conduit par les considérations suivantes:

1°. Je désirais me faire une idée du degré de pureté de l'anhydride carbonique que j'employais pour mes mélanges; or le meilleur moyen d'en juger était d'observer la variation de la tension de vapeur pendant la condensation isothermique [1]).

2°. Il s'était présenté des difficultés au sujet de quelques grandeurs, au point critique de l'anhydride carbonique, importantes pour la théorie des mélanges. Ainsi p. ex. M. Amagat avait trouvé 72,9 atm. comme

[1]) *Versl. Kon. Akad.*, mars 1902; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 79; voir chap. 8.

pression critique de l'anhydride carbonique, tandis que M. VERSCHAFFELT déduisit du réseau d'isothermes de M. AMAGAT une pression critique de 73.6 atmosphères [1]. Il va de soi que ce désaccord peut donner lieu à une erreur dans la détermination des éléments critiques des mélanges considérés comme homogènes, par la superposition de deux réseaux logarithmiques d'isothermes, suivant les méthodes en usage dans ce genre de recherches au laboratoire de physique de Leyden [2]. J'ai d'ailleurs déduit antérieurement [3]) des isothermes de M. AMAGAT qu'au point critique $\frac{T_k}{p_k}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = 7{,}3$, et de ses déterminations de tension des vapeurs saturées $\frac{T_k}{p_k}\left(\frac{dp}{dT}\right)_{coex.} = 6{,}5$. Ce désaccord semble indiquer une incertitude dans la détermination du volume critique. M. AMAGAT a déterminé le point critique et les tensions de vapeur dans un autre appareil, et probablement aussi avec un autre échantillon d'anhydride carbonique que les isothermes; en faisant les deux déterminations dans le même tube, et avec le même gaz, j'espérais donc obtenir sur ces points une plus grande certitude.

3°. En comparant, suivant la méthode de M. RAVEAU, les isothermes des mélanges avec celles d'anhydride carbonique, observées dans le même piézomètre, je comptais éliminer de la détermination des éléments critiques des mélanges, supposés homogènes, quelques erreurs systématiques qui auraient pu exister dans les observations. C'est ainsi qu'une erreur dans la détermination du diamètre de la tige graduée du piézomètre n'aurait aucune influence sur la pression ni la température critiques du mélange homogène.

2. Dans les tableaux suivants v est le volume mesuré au moyen du volume normal théorique, p est la pression en atmosphères (0°, 45° lat. N), v_{liq} est le volume du liquide. Les points où la condensation commence ou s'achève sont indiqués par *cc* et *fc*. Pour *cc* j'ai pris le point où l'on observe pour la première fois, par diminution de volume accompagnée d'une bonne agitation, une traînée liquide sur la paroi, ou bien où il reste une pareille traînée quand le volume augmente. Les deux points s'accordaient suffisamment bien. Le point *fc* pouvait être nettement

[1]) *Versl. Kon. Akad.*, mars 1900; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 55.

[2]) Voir ces *Archives*, (2), 11, 376, 1906.

[3]) *Versl. Kon. Akad.*, nov. 1901, p. 337, *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 75, p. 9.

observé, car il suffisait d'une légère variation du volume pour faire disparaître la dernière portion de la seconde phase ou la faire réapparaître. Mais ici surtout il fallait bien remuer pour éviter tout retard dans l'établissement de l'équilibre. Puis V_{Nth} représente le volume normal théorique, et la signification de $A_{K_{20}}$ a été exposée au chap. 2, p. 32.

Premier échantillon d'anhydride carbonique.

Avant les mesures: $V_{Nth} = 71{,}020^5$ cm³.
$A_{K_{20}} = 1{,}00570$.

a. Isotherme de 25,55°.

N°.	v	p	pv	v_{liq}
1	0,008573	63,12	$0{,}5411^5$	
2	7812	64,36	5028	*cc*
3	7046	64,42	4539	0,000420
4	6227^5	64,41	4011	859
5	5504	64,41	3545	0,001276
6	4837	64,40	3115	1664
7	4068	64,39	2619	2088
8	3205	64,42	2065	2597
9	3085	64,37	1986	2652
10	2869	64,41	1848	[2])
11	2798	64,43 [1])	1802^5	*fc*
12	2645	70,91	1876	
13	2520	$80{,}65^5$	2033	
14	2438	92,97	2267	
15	2366	105,79	2503	
16	2309	$122{,}55^5$	2830	
17	2270	138,42	3142	

[1]) Je reviendrai sur la pureté de CO^2, ainsi qu'elle ressort de l'augmentation de pression par condensation (chap. 8).

[2]) Ici le ménisque liquide était venu dans la partie du tube où les traits n'étaient plus visibles, par suite du scellage à la lampe.

b. Isotherme de 28,15°.

N°.	v	p	pv	v_{liq}
1	0,009338	63,44	0,5924	
2	8565	65,19	5583	
3	7807 5	66,75 5	5212	
4	7030	67,99 5	4780	
5	6950	68,19	4739 5	
6	6673	68,39	4564	*cc*
7	6300	68,41	4310	0,000290
8	5502	68,41	3764	947
9	4712	68,43 5	3224 5	0,001625
10	3974	68,48	2721	2189
11	3119	68,45	2135	[1])
12	3011	68,43	2060	*fc*
13	2813	72,40 5	2037	
14	2670	78,55	2097	
15	2546	89,54	2279	
16	2446	103,47	2531	
17	2369	119,61	2834	
18	2315	136,58	3161	

c. Courbe limite près du point critique.

Commencement condensation.

Temp.	v	p
30,05	0,005594	71,47
30,82	4833	72,72 5

Fin condensation.

Temp.	v	p
30,11	0,003328	71,53
30,81	3725	72,74

[1]) Voir la note au bas du précédent tableau.

d. Point critique:

Temp.: 30,98, Pression: 72,93, Volume: 0,00443 [1]).

e. Isotherme critique (30,98°).

N°	v	p	pv	N°	v	p	pv
1	0,010068	63,36	0,6379	12	0,003959	72,96	0,2888
2	0,009314	65,39	0,6090	13	3656	72,99	0,2669
3	8582	67,22	0,5769	14	3296	73,53	0,2423
4	7809	69,08	0,5395	15	3230	73,89	0,2387
5	7031	70,73	0,4973	16	3051	75,43	0,2302
6	6275	71,95	0,4515	17	2862	79,43	0,2273
7	5483	72,74	0,3988	18	2721	86,10	0,2343
8	5102	72,87	0,3718	19	2593	95,70	0,2482
9	4777	72,93	0,3484	20	2509	106,18	0,2664
10	4403	72,94	0,3211	21	2435	119,35	0,2906
11	4254	72,98	0,3104	22	2362	138,65	0,3275

f. Isotherme de 31,89°.

N°	v	p	pv	N°	v	p	pv
1	0,010086	63,87	0,6442	11	0,003942	74,69	0,2944
2	0,009314	65,99	0,6147	12	3610	75,00	0,2707
3	8570	67,94	0,5823	13	3228	76,20	0,2460
4	7771	70,03	0,5442	14	2883	82,02	0,2365
5	7017	71,68	0,5030	15	2717	89,90	0,2443
6	6267	73,03	0,4577	16	2593	99,77	0,2587
7	5528	73,94	0,4087	17	2503	111,45	0,2790
8	5117	74,24	0,3799	18	2439	122,79	0,2995
9	4742	74,44	0,3530	19	2377	136,71	0,3249
10	4364	74,56	0,3254				

[1]) Pour la détermination de ce volume voir § 5.

g. Isotherme de 34,02°.

N°	*v*	*p*	*pv*	N°	*v*	*p*	*pv*
1	0,010067	65,18	0,6562	9	0,003971	78,38 5	0,3113
2	0,009337	67,29 5	0,6283	10	3243	81,11	0,2630 5
3	8560	69,49	0,5948	11	2955	86,16	0,2546
4	7791	71,64	0,5581 5	12	2746	95,02	0,2609
5	7023 5	73,65	0,5173	13	2614	105,95	0,2770
6	6255	75,34	0,4712	14	2510	119,53	0,3000
7	5529 5	76,60 5	0,4236	15	2426	136,66	0,3316
8	4672	77,57 5	0,3624				

h. Isotherme de 37,09°.

N°	*v*	*p*	*pv*	N°	*v*	*p*	*pv*
1	0,010863	64,56	0,7013	8	0,005525 5	80,47	0,4446
2	10093	66,90	0,6752	9	4770	82,11	0,3917
3	0,009339	69,29	0,6471	10	4011	83,89	0,3365
4	8554	71,73	0,6135 5	11	3230	88,89	0,2871
5	7810	74,11	0,5788	12	2799	103,08	0,2885
6	7059	76,40	0,5394	13	2609	119,27	0,3112
7	6287	78,58 5	0,4940	14	2495	136,01	0,3393

Deuxième échantillon d'anhydride carbonique [1]).

Avant les mesures: $V_{Nth} = 69{,}647$ cm³., poids 2.
Après „ „ 69,629 „ „ 1.

moyenne = 69,641 cm³.

i. Isotherme de 41,95°.

N°	*v*	*p*	*pv*	N°	*v*	*p*	*pv*
1	0,011546	64,85	0,7487	8	0,006181	84,04	0,5194 5
2	10794 5	67,28	0,7262 5	9	5320	87,18	0,4638
3	10047	69,81	0,7014	10	4530	90,13	0,4082 5
4	0,009211	72,78	0,6704	11	3778	94,10	0,3555
5	8486	75,48	0,6405	12	3087	105,01	0,3242
6	7640	78,57	0,6003	13	2817	117,96	0,3323
7	6915	81,31	0,5622 5	14	2642	134,85	0,3563

k. Isotherme de 48,10°.

N°	*v*	*p*	*pv*	N°	*v*	*p*	*pv*
1	0,012311	65,20	0,8027	8	0,006899	87,07	0,6007
2	11572	67,69	0,7833	9	6118	90,90	0,5561
3	10787 5	70,52	0,7607	10	5380	94,78	0,5099
4	0,009970	73,61	0,7339	11	4570	99,62	0,4552
5	9232	76,61	0,7073	12	3823	105,50	0,4033
6	8442	80,07	0,6760	13	3129 5	119,38	0,3736
7	7678	83,38	0,6402	14	2864	135,56	0,3883

[1]) Par la rupture du tube piézométrique je perdis le premier échantillon. Mais, comme le tube s'était rompu au-dessous de la partie graduée de la tige, j'avais conservé l'avantage mentionné au § 1, 3°.

l. Isotherme de 57,75°.

N°	v	p	pv	N°	v	p	pv
1	0,013171	66,27	0,8730	8	0,007668	91,16	0,6990
2	12356	69,20	0,8550	9	6930	95,79	0,6638
3	11586	72,18	0,8363	10	6113	101,32	0,6194
4	10807^5	75,42	0,8151	11	5372	107,06	0,5751
5	10009^5	78,99	0,7906	12	4596	114,45	0,5260
6	0,009271	82,49	0,7648	13	3795	126,10	0,4786
7	8482	86,62	0,7347	14	3421^5	135,81	0,4647

3. Pour simplifier des calculs ultérieurs, j'ai calculé pour les différentes isothermes les valeurs de pv pour des valeurs régulièrement croissantes de la densité $\left(\frac{1}{v}\right)$. Chaque valeur a été obtenue par interpolation entre 4 points directement empruntés aux observations; ce n'est que pour les valeurs extrêmes que j'ai interpolé entre trois points [1]. J'ai trouvé ainsi les valeurs mentionnées au tableau XXI; ce tableau est à double entrée: la première colonne fait connaître les densités (exprimées au

[1]) Je me suis servi à cet effet de la formule de LAGRANGE, que l'on peut mettre aisément sous la forme:

$$P = P_2 + (P_3 - P_2)\frac{d-d_2}{d_3-d_2} + (P_1 - P'_1)\frac{(d-d_2)(d-d_3)(d-d_4)}{(d_1-d_2)(d_1-d_3)(d_1-d_4)} +$$

$$+ (P_4 - P_4')\frac{(d-d_1)(d-d_2)(d-d_3)}{(d_4-d_1)(d_4-d_2)(d_4-d_3)},$$

où:

$$P_1' = P_2 + (P_3 - P_2)\frac{d_1-d_2}{d_3-d_2}$$

$$P_4' = P_3 + (P_3 - P_2)\frac{d_4-d_3}{d_3-d_2}.$$

Ici P représente pv, tandis que $\frac{1}{v}$ est représenté par d. Dans l'hypothèse où d est compris entre d_2 et d_3, les deux derniers termes deviennent relativement petits et on peut les calculer aisément à l'aide d'une bonne règle à calcul.

moyen de la densité normale théorique); les autres colonnes donnent les valeurs correspondantes de pv, chaque fois pour la température placée en tête de la colonne.

Tableau XXI.

Isothermes de CO^2.

$\frac{1}{v}$	25,55°	28,15°	30,98°	31,89°	34,02°	37,09°	41,95°	48,10°	57,75°
80									0,8583
100			0,6355	0,6411	0,6538	0,6719	0,6997^5	0,7349	0,7903
120		0,5467	0,5653	0,5715	0,5844	0,6036	0,6335	0,6712	0,7285
140		0,4839	0,5037	0,5094	0,5240	0,5440^5	0,5746	0,6135	0,6743
160			0,4499	0,4566	0,4708	0,4918	0,5237	0,5640	0,6273
180			0,4039	0,4106^5	0,4254	0,4466	0,4796	0,5212	0,5864
200			0,3646	0,3716	0,3863	0,4081	0,4416^5	0,4847	0,5521
220			0,3314	0,3387	0,3494	0,3754	0,4094	0,4536	0,5226^5
240			0,3041	0,3109	0,3226	0,3477	0,3819^5	0,4264	0,4991
260			0,2806	0,2875	0,3021	0,3243^5	0,3597^5	0,4048	0,4812
280			0,2611	0,2680	0,2825^5	0,3052	0,3423^5	0,3872	0,4692
300			0,2448	0,2521	0,2677	0,2915^5	0,3302	0,3763	
320			0,2333	0,2410	0,2590	0,2835	0,3245^5	0,3737	
340		0,2058	0,2273	0,2321	0,2554^5	0,2863	0,3255	0,3817	
360	0,1806	0,2043	0,2305	0,2401	0,2588	0,2900	0,3362		
380	0,1886	0,2140	0,2427	0,2530	0,2742	0,3073			
400	0,2084	0,2379	0,2690	0,2800	0,3031	0,3376			
420	0,2442	0,2780	0,3199^5	0,3230					
440	0,3118								

4. Voici de quelle manière j'ai réduit à la même température les v_{liq} pour les isothermes a et b. De l'endroit occupé par le ménisque liquide j'ai directement déduit le volume de la phase vapeur: v_{vap}. Si v_1 est le volume spécifique de la phase liquide et v_2 le volume spécifique de la vapeur (comme unité je prends toujours le volume normal théorique), on trouve:

$$\frac{dv_{vap}}{dT} = -\frac{v_{vap}}{v_2 - v_1}\left(\frac{v_1}{v_2}\frac{dv_2}{dT} - \frac{v_2 - v}{v - v_1}\frac{dv_1}{dT}\right).$$

Après avoir réduit, de cette façon, à une même température, les volumes occupés par la vapeur, on trouve les volumes du liquide. J'admets comme on voit que v_1 et v_2 sont uniquement fonction de la température, et non de v, ainsi que l'admettent M. DE HEEN et d'autres encore. Dans cette hypothèse on peut déduire v_1 et v_2 de chaque couple d'observations de v_{liq}, pour des valeurs différentes de v, mais à la même température [1]). Les valeurs ainsi calculées sont réunies dans le tableau XXII, avec celles directement fournies par l'observation.

Tableau XXII.

Isotherme de 25,55°.

Nos.	v_1	v_2
2		0,007812
3 et 7	0,002799	7736
4 „ 8	2819	7722
5 „ 9	2809	7747
11	2798	
moy.	$0,002803^5$	$0,007773^5$

Isotherme de 28,15°.

Nos.	v_1	v_2
6		0,006673
7 et 9	0,003043	6680
8 „ 10	2998	6709
12	3011	
moy.	0,003016	0,006684

On remarquera qu'il n'y a aucune régularité dans l'allure des valeurs de v_1 et v_2, de sorte notre hypothèse, que v_1 et v_2 dépendent seulement de la température, est justifiée par ces expériences.

[1]) Voir E. H. AMAGAT, *C. R.*, 114, pp. 1093 et 1322, 1892.

Dans le calcul des valeurs moyennes de c_1 et c_2 du tableau XXII, j'ai accordé un même poids à la valeur directement fournie par l'observation et à la moyenne des valeurs calculées au moyen des autres déterminations.

5. A propos de la détermination du point critique je rapporterai ce qui suit. Le thermostat fut installé à quelques centièmes de degré au-dessous de la température critique (c. à d. la température à laquelle on n'observe plus de ménisque permanent). En introduisant un peu d'eau chaude dans le bain de mélange, le tube piézométrique fut porté à quelques centièmes de degrés au-dessus de la température critique, et la substance fut bien agitée. La température alla maintenant en s'abaissant très lentement. Quand le volume était compris entre certaines limites, on observait ce qui suit. Il se forme d'abord une nuée bleuâtre; à mesure que la température s'abaisse, cette nuée devient de plus en plus épaisse à un certain niveau [1]). A un certain moment il se forme des stries (couches de réfractivités différentes qui remuent très rapidement), la substance bout et se résout en pluie, et en même temps apparaît un ménisque. Dès le premier moment de son apparition, ce ménisque est absolument net et plat; il reste au même niveau dans le tube, même quand on agite. J'ai observé la température immédiatement après la formation des stries, puis la pression et le volume, et finalement encore une fois la température. On obtient ainsi la pression à deux ou trois centièmes de degré au-dessous de la température critique; j'ai apporté une correction de ce chef.

Quand la température s'élève, on observe encore le ménisque quand la température du bain est déjà supérieure de quelques centièmes de degré à la température critique. Mais par agitation ce ménisque disparaît instantanément; ce ménisque n'est donc pas un phénomène d'équilibre.

On voit donc que la température et la pression critiques ont été empruntées directement à l'observation. Pour le volume cela est impossible, puisque par l'effet de la pesanteur les phénomènes susmentionnés peuvent se produire pour des valeurs différentes du volume. Ainsi p. ex. le ménisque se formait tout près du sommet du tube quand le volume

---

[1]) Si la température est maintenue constante, la nuée conserve le même aspect pendant un temps assez long (p. ex. 10 min.)

était 0,003924 (agitateur en bas), et il se formait à 1 mm. au-dessus du mercure quand le volume était 0,004281 (agitateur en haut).

La méthode que l'on emploie généralement pour la détermination du volume critique consiste à déterminer quelques densités de liquide et de vapeur, à des températures plus basses que la température critique, et à appliquer ensuite la règle du diamètre rectiligne de CAILLETET et MATHIAS. A cet effet j'ai construit, à l'aide des données des tableaux *c* (p. 54) et XXII, un tracé où les densités sont figurées comme fonction de la température, et j'y ai tracé le diamètre. Je n'ai pas pu constater avec certitude un écart de la rectilinéarité. J'ai trouvé ainsi la valeur 239 pour la densité critique, exprimée au moyen de la densité normale théorique, d'où l'on déduit pour le volume critique la valeur 0,00418.

Une autre méthode est la suivante: Au point critique on doit avoir [1]) $\left(\frac{dp}{dT}\right)_{coex.} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v}$, où $\left(\frac{dp}{dT}\right)_{coex.}$ représente le coefficient de température de la tension de vapeur saturée.

Pour déterminer $\left(\frac{dp}{dT}\right)_{coex.}$ j'ai réuni sous *O*, au tableau XXIII, les tensions de vapeur, telles qu'elles résultent du § 2; pour les températures 25,55° et 28,15° j'ai pris la moyenne des diverses valeurs obtenues pour la pression.

Tableau XXIII.

Temp.	*O*	*C*	*O* — *C*
25,55	64,40	64,41	— 0,01
28,15	68,43	68,43	0,00
30,05	71,45	71,44	+ 0,01
30,82	72,72	72,67	+ 0,05
30,98	72,93		

[1]) M. PLANCK, *Wied. Ann.*, 15, 457, 1882.

Si l'on calcule, pour les divers systèmes de valeurs de T et p, la valeur du coefficient f dans la formule de VAN DER WAALS [1])

$$log \frac{p}{p_k} = f \frac{T - T_k}{T},$$

on trouve qu'à mesure que la température s'élève la valeur de f s'abaisse régulièrement. Si l'on prend encore un terme du développement par rapport à $\frac{1}{T}$, on arrive à la formule :

$$log \frac{p}{p_k} = \frac{T - T_k}{T} \left(f + g \frac{T_k - T}{T}\right),$$

et, si l'on calcule alors les valeurs de f et g qui s'accordent le mieux avec les observations, on trouve à fort peu près $g = f$. J'ai donc posé :

$$log \frac{p}{p_k} = f \frac{(T - T_k) T_k}{T^2},$$

et j'ai trouvé $f = 2{,}914^5$. C'est ainsi que j'ai calculé les valeurs de p mentionnées sous C au tableau XXIII. L'accord est fort satisfaisant ; ce n'est que pour la température 30,82° que l'écart a quelque importance ; la même particularité se rencontre aussi quand on compare les volumes de saturation [2]).

On déduit de là qu'au point critique :

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{coex.} = 1{,}610 \text{ [3])}.$$

[1]) Continuität, I, p. 158.

[2]) On reviendra ailleurs sur ces écarts.

[3]) Voici de quelle manière on peut juger de l'influence de l'impureté de l'anhydride carbonique sur ce coefficient. L'augmentation de pression pendant la condensation à 25,55° peut s'expliquer en admettant dans CO^2 une teneur moléculaire de 0,00027 en oxygène (voir chap. 8, § 4). Si nous admettons que telle est réellement la cause de l'augmentation de pression, nous obtenons, à

Des déterminations d'isothermes il n'est pas possible de déduire avec certitude une variation du $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$, pour un même volume, avec la température [1]). Voilà pourquoi j'ai déduit les valeurs de $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$, pour les

l'aide de formules à développer au chap. 8, § 3, les tensions de vapeur suivantes pour l'anhydride carbonique pur.

Tableau XXIII *a*.

Temp.	Press.
25,55	64,33
28,15	68,36
30,05	71,38
31,00	72,90

En comparant avec le tableau XXIII, on reconnaît que la valeur de $\left(\frac{dp}{dT}\right)_{coex.}$ n'est pas par là notablement modifiée.

[1]) Le tableau suivant XXIV*a* permet d'en juger. Ce tableau (déduit de XXI) fait connaître les valeurs du moyen coefficient de pression $\frac{\Delta p}{\Delta T}$, déterminé pour des intervalles de $\pm$ 10°, pour les densités mentionnées dans la première colonne et les températures moyennes mentionnées en tête de chaque colonne:

Tableau XXIV*a*.

$\frac{1}{v}$	29,78°	32,62°	36,46°	42,59°	52,92°
100			0,586	0,572	0,574
120		0,763	0,746	0,737	0,713
140		0,942	0,904	0,883	0,882
160			1,077	1,050	1,050
180			1,242	1,220	1,217
200			1,404	1,392	1,396
220			1,564	1,562	1,575
240			1,704	1,716	1,807
260			1,876	1,901	2,059
280			2,069	2,086	2,380
300			2,336	2,310	
320			2,662	2,621	
340		3,060	3,043	2,946	
360	3,323	3,452	3,469		
380	3,842	3,967			
400	4,472	4,460			

A la rigueur, on pourrait voir dans ces nombres l'indication d'une diminution

différentes densités, des isothermes de 30,98° et 48,10°. J'ai trouvé ainsi les valeurs suivantes :

Tableau XXIV.

$\frac{1}{v}$	$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$	$\frac{1}{v}$	$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$	$\frac{1}{v}$	$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$
100	0,581	200	1,403	300	2,304
120	0,742	220	1,570	320	2,624
140	0,898	240	1,715	340	3,066
160	1,066	260	1,886		
180	1,233	280	2,062		

En interpolant de la même manière qu'au § 3, on trouve que la valeur $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = 1{,}610$ [1]) correspond à une densité 225,50; ce qui donne comme volume critique 0,00443.

Cette valeur ne s'accorde pas avec celle que j'ai déduite tantôt des densités. La différence est trop grande pour pouvoir être attribuée à des erreurs d'observation. L'écart est dans le même sens que celui qui résulte des observations de M. Amagat. Les considérations suivantes pourraient peut-être servir d'explication :

M. le Prof. Kamerlingh Onnes m'a fait remarquer que l'apparition d'un brouillard dans le voisinage du point critique semble indiquer qu'une partie de la substance se condense autour de nombreux centres, uniformément répartis dans l'espace. La netteté du phénomène dans le

---

du coefficient de pression du côté des températures élevées, pour des densités plus faibles que la densité critique, et d'une augmentation pour les densités plus fortes (comp. Young, *Proc. Phys. Soc. London*, 1894/95, p. 648). Mais, pour trouver avec certitude la manière dont le coefficient de pression varie avec la température, il faudrait des observations plus précises, ou dans un domaine de températures plus étendu; nous restons donc dans les limites de précision des observations présentes en admettant, pour la question qui nous occupe ici, que le coefficient de pression est indépendant de la température.

[1]) Une teneur moléculaire en oxygène de 0,00027 rendrait nécessaire une correction de —0,00003; elle est négligeable.

voisinage du point critique résulterait de ce que dans ce voisinage de petites forces suffisent déjà pour produire de grandes différences de densité. Or ces condensations pourront avoir une influence considérable sur le volume de saturation p. ex., sans que le changement de pression qui en résulte soit appréciable.

Dans la comparaison des mélanges avec les substances pures, basée sur la loi des états correspondants, nous devons faire abstraction de ces condensations, qui ne se produisent pas en des points correspondants (au voisinage du point de plissement pour les mélanges). Il résulte de là que pour notre but il convient probablement le mieux d'admettre comme valeur du volume critique 0,00443, puisque cette valeur résulte, d'après une relation thermodynamique, de déterminations qui ne sont pas fort voisines du point critique, et où par conséquent les phénomènes particuliers, qui se présentent dans son voisinage, ne jouent aucun rôle.

On trouve enfin les grandeurs suivantes, qui sont utiles dans la comparaison des observations avec les résultats théoriques relatifs à des mélanges contenant une faible proportion d'une des composantes:

$$C_4 = \frac{T_k}{T_0\, p_k\, v_k} = 3{,}45\,,\ ^{1})$$

$$\frac{T_k}{p_k}\left(\frac{dp}{dT}\right)_k = 6{,}712,$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T\, \partial v}\right)_k = -\,422, \text{ de sorte que } C_4\, \frac{v_k\, T_k}{p_k}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T\, \partial v}\right)_k = -\,26{,}9.$$

Conformément au coefficient de dilatation admis, à la page 40, pour un gaz parfait, j'ai posé ici $T_0 = 273{,}04$.

5. Isothermes de mélanges dont la teneur moléculaire en oxygène est 0,1047 et 0,1994.

1. Dans les paragraphes suivants je donnerai des tableaux relatifs à deux mélanges d'anhydride carbonique et d'oxygène. Pour la signification de v, p et v_{liq} et la détermination des points *cc* et *fc*, voir le précédent chapitre § 2. Pour ce qui regarde le point où la condensation

[1]) Pour la notation voir ces *Archives*, (2), 11, 363, 1906.

s'achève, je dois faire remarquer qu'il y a tout un domaine de températures, en partie au-dessus, en partie au-dessous de la température de plissement, où le ménisque disparaît dans le tube sous l'action de la pesanteur [1]).

Les données relatives au point de plissement ont été fournies directement par l'expérience. Au sujet des phénomènes dans le voisinage du point de plissement, voici ce que je trouve dans les notes faites pendant mes observations. Quand le volume augmente à partir de l'état homogène (liquide), il se forme peu à peu une nuée bleuâtre. A mesure que le volume s'agrandit (par petites quantités à la fois) cette nuée s'épaissit. Puis il arrive un moment où il se forme des couches différemment réfringentes, qui se meuvent rapidement les unes à travers les autres. En agitant on trouve qu'elles se résolvent encore dans le brouillard bleu, de plus en plus dense. A un moment donné, le volume étant devenu encore un peu plus grand, ces couches commencent à se concentrer vers le milieu du tube; en haut et en bas le tube devient limpide; on voit des bulles monter et des gouttelettes descendre, pour se réunir en un certain point du tube, où se forme enfin un ménisque. Ce ménisque reste au même endroit. La température à laquelle ces phénomènes ont été observés a été prise pour température de plissement du mélange considéré, le volume et la pression comme volume et pression de plissement.

Quand la température est un peu plus haute, le ménisque se forme à un niveau plus bas dans le tube. Le point d'apparition ne s'observe pas avec certitude: on voit que des gouttelettes descendent, et que des bulles s'élèvent de plus en plus régulièrement vers un certain endroit; c'est à cet endroit qu'apparaîtra le ménisque, mais cet endroit s'élève déjà avant que le ménisque s'est bel et bien formé. Une fois que le ménisque s'est formé, il s'élève généralement encore. Si la température est encore plus élevée, on voit nettement que le ménisque part du fond du tube. En bas viennent se rassembler les gouttelettes qui d'en haut tombent vers le ménisque. Les mêmes observations s'appliquent, mutatis mutandis, à des températures inférieures à la température de plissement.

Des données relatives au point de contact critique, seule la température a pu être fournie directement par l'expérience (à 0,01° près). Pour déterminer la pression j'ai observé quelques points où la conden-

[1]) J'y reviendrai au chap. 9.

sation commençait où s'achevait, jusqu'à moins de 0,1° du point de contact critique; ces points de condensation ont été représentés sur un tracé, d'où j'ai déduit le point où la tangente est perpendiculaire à l'axe des températures. Ce procédé m'a fourni la pression de contact avec une précision suffisante. Le volume de contact a été déterminé ensuite sur l'isotherme.

La teneur moléculaire en oxygène est représentée par x; V_{Nth} représente le volume normal théorique. Pour la signification de A_{K20} je renvoie au chap. 2, p. 32.

2. *Premier mélange de* CO^2 et O^2.

$$x = 0,1047.$$

Avant les mesures: $V_{Nth} = 69,743$ cm³.
Après „ „ 69,725 „

moyenne: 69,734 „

a. Courbe de saturation.

Commencement de la condensation.

Temp.	v	p	Temp.	v	p
17,53⁵	0,008552	66,08	22,06	0,006456	76,24
17,63	8483	66,40	22,38	6098	77,85
19,48	7708	69,48	22,83	5860	79,14
20,19	7362	71,59	22,87	5822	79,26
20,28	7288	71,94	22,98	5697	79,95
21,48	6709	74,85	23,23	5366	81,46

Fin de la condensation.

Temp.	v	p	Temp.	v	p
11,68	0,002597	85,52	21,48	0,003664	87,35
14,78	2757	87,09	22,09	3880	86,58
17,52^5	2949	88,25	22,43	4069	86,03
17,68	2986	88,29	22,80	4301	85,34
19,38	3195	88,46^5	22,88^5	4324	85,12
20,19	3292	88,35	22,98	4441	84,90
20,28	3323	88,35	23,18	4663	84,16

b. Isotherme de 17,60°.

N°.	v	p	pv	v_{liq}
1	0,011384	58,35	0,6642	
2	10605	60,46	0,6412	
3	0,009826	62,62	0,6153	
4	9047	64,84	0,5866	
5	8503	66,24	0,5632^5	*cc*
6	7489^5	67,85	0,5082	0,000338
7	6712^5	69,54	0,4668	571
8	6108	71,12	0,4344	826
9	5935	71,65	0,4252^5	879
10	5385	73,39	0,3952	0,001105
11	5157	74,26	0,3830	1194
12	4486^5	77,12	0,3460	1502
13	4379^5	77,68	0,3402	1556
14	3482	83,35	0,2902	2189
15	2954	88,30	0,2608	*fc*
16	2848	91,71^5	0,2612	
17	2719^5	97,38	0,2648	
18	2572	109,13	0,2807	
19	2466	123,34	0,3042	

c. Isotherme de 20,29°.

N°.	v	p	pv	v_{liq}
1	0,011699	58,86	0,6886	
2	11384	59,72	0,6798	
3	10605	61,94	0,6569	
4	0,009826	64,31	0,6319	
5	9047	66,62	0,6027	
6	8900	67,15	0,5976	
7	8269	69,04	0,5709	
8	7490	71,41	0,5348	
9	7291	71,98	0,5248	*cc*
10	6713	73,07	0,4905	0,000267
11	5935	75,32	0,4470	596^5
12	5157	77,94	$0,4019^5$	968
13	4468	80,88	0,3614	0,001360
14	4379	81,39	0,3564	1445
15	3640	85,85	0,3125	2230
16	3501	86,91	0,3043	2540
17	3335	88,28	0,2944	*fc*
18	3132	91,50	0,2866	
19	2959	95,64	0,2830	
20	2897	97,76	0,2832	
21	2759	104,46	$0,2882^5$	
22	2613	114,89	0,3002	
23	2527	$125,12^5$	0,3162	

d. Isotherme de plissement: 21,99°.

N°.	v	p	pv	v_{liq}
1	0,012159	58,36	0,7096	
2	11384	60,52	0,6889	
3	0,009826	65,32	0,6419	

N°.	v	p	pv	v_{liq}
4	0,008269	70,37	0,5819	
5	6713	75,37	0,5059^5	
6	6400	76,42	0,4891	*cc*
7	5935	77,64	0,4608	0,000210
8	5157	80,34	0,4143	638
9	4379	83,76	0,3668	0,001169
10	3878	86,60	0,3358	*pp* [1])
11	3613	88,74	0,3206	
12	3054	97,11^5	0,2966	
13	2769	109,26	0,3025	
14	2598	123,75	0,3215	

e. Isotherme de 22,68°.

N°.	v	p	pv	v_{liq}
1	0,012159	58,63	0,7129	
2	11384	60,90	0,6933	
3	10605	63,29	0,6712	
4	0,009826	65,76	0,6461^5	
5	9047	68,28^5	0,6178	
6	8269	70,92	0,5865	
7	7489^5	73,49	0,5504	
8	6712^5	76,09	0,5108	
9	5913	78,74	0,4656	*cc*
10	5546	79,97	0,4435	0,000198^5
11	5157	81,33	0,4194	400
12	4768	82,89	0,3952	597^5
13	4379	84,73^5	0,3711	709
14	4309	85,05	0,3664^5	591
15	4278	85,22	0,3646	625

[1]) Point de plissement.

N°.	v	p	pv	v_{liq}
16	0,004258	85,35	0,3634	0,000288
17	4243	85,40	0,3623^5	95 [1])
18	4219	85,54	0,3609	125
19	4218	85,53	0,3608	*fc*
20	3991^5	87,03	0,3474	
21	3604	90,23	0,3252	
22	3049	99,19	0,3025	
23	2752	112,67	0,3101	
24	2612	124,50	0,3252	

f. Isotherme du point de contact: 23,29°.

N°	v	p	pv	N°	v	p	pv
1	0,012159	58,95	0,7168	11	0,005546	80,80	0,4481
2	11785	60,04	0,7075^5	12	5157	82,23	0,4241
3	11384	61,21	0,6968	13	4768	83,78	0,3995
4	10605	63,59	0,6744	14	4379	85,88	0,3761
5	0,009826	66,09	0,6494	15	3991	87,97	0,3511
6	9047	68,70	0,6215	16	3605	91,26	0,3290
7	8269	71,34	0,5899	17	3046	101,03	0,3077
8	7490	74,04	0,5545	18	2791^5	112,40	0,3138
9	6712^5	76,71	0,5149	19	2646	124,08	0,3283
10	5935	79,48	0,4717				
				Point de contact:	0,005005	82,83	

[1]) Voir au chap. 3, p. 47, l'explication de l'allure irrégulière de v_{liq}. Je dois d'alleurs faire remarquer que, dans ce domaine, les variations de v_{liq} avec la température aussi bien qu' avec le volume sont très grandes, de sorte qu'une légère erreur dans la détermination de ces deux derniers éléments entraîne une erreur considérable sur v_{liq} (voir aussi fig. 2, p. 79).

g. Isotherme de 25,20°.

N°	*v*	*p*	*pv*	N°	*v*	*p*	*pv*
1	0,012159	59,81	0,7272^5	10	0,005156^5	84,85	0,4376
2	11384	62,14	0,7074	11	4768	86,61	0,4130
3	10605	64,59	0,6850	12	4379	88,70	0,3885
4	0,009826	67,23	0,6606	13	3991^5	91,40	0,3648
5	9047	69,97	0,6330	14	3609	94,97	0,3427
6	8269	72,78	0,6018	15	3229	101,13	0,3266
7	7490	75,69	0,5669	16	2846	114,98	0,3273
8	6712^5	78,59	0,5276	17	2710	124,35	0,3370
9	5935	81,69	0,4848				

A propos de ce mélange j'ai à dire qu'il a été préparé dans un appareil de mélange plus simple que celui décrit au chap. 2 [1]), et que les pressions ont été mesurées à l'aide d'un manomètre à air et réduites ensuite aux indications du manomètre à hydrogène employé plus tard, ainsi que je l'ai déjà mentionné au chap. 3, § 2.

De la courbe de saturation j'ai à dire qu'au-dessous de 19,38° la pression de fin condensation diminue quand la température s'abaisse, une circonstance que M. VERSCHAFFELT n'a pas rencontrée, dans l'étude de ses mélanges d'anhydride carbonique et d'hydrogène, aux températures où il a observé.

Entre la température de plissement et celle du point de contact critique j'ai observé la condensation rétrograde de première espèce (la phase liquide est la phase temporaire).

3. *Second mélange de* CO^2 et O^2.

$$x = 0,1994$$

$$A_{K_{20}} = 1,00413$$

Avant les mesures: $V_{Nth} = 69,608$ cm^3.
Après „ „ 69,555 „

moyenne: 69,581^5 „

[1]) Voir l'appareil de mélange décrit par M. VERSCHAFFELT (ces *Archives*, (2), 11, 412, 1906).

a. Courbe de saturation.

Comm. condensation.				Fin condensation.			
N°	Temp.	*v*	*p*	N°	Temp.	*v*	*p*
1	10,06	0,009233 5	66,35	1	10,09	0,003205	102,48 5
2	12,15 5	8190 5	71,57	2	12,20	3633	100,05 5
3	14,12 5	7125 5	77,29	3	14,11	3994 5	97,37 5
4	16,01	5803	86,02	4	16,00	4784	92,57
5	16,23	5530	87,84	5	16,22	5156	90,55

b. Isotherme de 9,62°.

N°.	*v*	*p*	*pv*	v_{liq}
1	0,009795	64,05	0,6274	
2	9412	65,36	0,6152	*cc*
3	8792	66,89	0,5881	0,000124
4	7948	69,16	0,5497	308
5	7147	71,79	0,5131	470
6	6404	74,92	0,4798	672
7	5500	79,65	0,4381	909
8	4811	84,23	0,4052	0,001122
9	4022	91,55	0,3682	1464
10	3338	100,07	0,3340	2221
11	3164	102,67	0,3248	*fc*
12	2874	112,50	0,3233	
13	2742	121,35	0,3327	
14	2699	125,18	0,3379	
15	2632	129,33	0,3404	
16	2581	135,67	0,3502	

c. Isotherme de 11,35°.

N°.	v	p	pv	v_{liq}
1	0,010341	63,46	0,6562	
2	0,009505	66,25	0,6298	
3	8763	68,90[5]	0,6038	
4	8629	69,37	0,5986	*cc*
5	7950	70,95	0,5640[5]	0,000217
6	7203	73,53[5]	0,5297	384
7	6396	77,02	0,4926	573
8	5608	81,14	0,4550	781
9	4829	86,40	0,4172	0,001097
10	4097	92,84	0,3804	1376
11	3712	96,79	0,3593	1707
12	3446	100,08	0,3449	2336
13	3397	100,89	0,3427	*fc*
14	3280	103,21	0,3385	
15	3028	110,48	0,3345	
16	2853	119,11	0,3398	
17	2718	128,44	0,3491	
18	2621	137,56	0,3605	

d. Isotherme de plissement: 12,51°.

N°.	v	p	pv	v_{liq}
1	0,010259	64,42	0,6609	
2	0,009570	66,77	0,6390	
3	8741	69,74	0,6096	
4	8040	72,27	0,5811	*cc*
5	7197	75,16	0,5409	0,000201
6	6378	78,56	0,5010[5]	439
7	5597	82,66	0,4627	674

N°.	v	p	pv	v_{liq}
8	0,004772	88,24	0,4211	0,0001041
9	3981	95,61	0,3806	1360
10	3606	99,65	0,3593	*pp*
11	3299	105,38	0,3476[5]	
12	3057	112,34	0,3434	
13	2870	121,71	0,3493	

e. Isotherme de 14,04°.

N°.	v	p	pv	v_{liq}
1	0,010318	65,06	0,6713	
2	0,009504	67,91	0,6454	
3	8726	70,87	0,6184	
4	7926	74,06	0,5870	
5	7272	76,79	0,5584	*cc*
6	7095	77,46	0,5496	0,000043
7	6337	80,59	0,5107	0,000265
8	5694	84,05	0,4786	457
9	4761	90,15	0,4292	786
10	4402	93,16	0,4101	888
11	4066	96,35	0,3918	933
12	3947	97,55	0,3850	*fc* [1]
13	3700	100,97	0,3736	
14	3287	109,15	0,3588	
15	3002	118,66	0,3562	
16	2823	128,20	0,3619	

[1]) Bien que cela ne résulte pas des valeurs v_{liq} ici communiquées, j'ai observé ici aussi une condensation rétrograde de première espèce.

f. Isotherme de 15,41°.

N°.	v	p	pv	v_{liq}
1	0,010276	66,02	0,6784	
2	0,009515	68,77	0,6543^5	
3	8763	71,71	0,6284	
4	7991	74,91	0,5986	
5	7159	78,62	0,5628	
6	6435	82,05	0,5280	*cc*
7	5971	84,32^5	0,5035	0,000139
8	5604	86,34	0,4838	228
9	5229	88,71	0,4639	327
10	4999	90,31	0,4515	367
11	4844	91,44	0,4429	387
12	4667	92,81	0,4331	361
13	4538	93,84	0,4258	273
14	4460	94,43	0,4211^5	164
15	4419	94,87	0,4192	*fc*
16	4045	98,88	0,4000	
17	3692	103,36	0,3816	
18	3253	113,06	0,3678	
19	3008	122,03	0,3671	
20	2821	133,17	0,3757	
21	2732	141,72	0,3872	

g. Isotherme du point de contact: 16,27°.

N°.	*v*	*p*	*pv*	N°.	*v*	*p*	*pv*
1	0,010312	66,34^5	0,6841^5	10	0,004824	92,72	0,4473
2	0,009519	69,28	0,6595	11	4434	96,05	0,4259
3	8701	72,58	0,6315	12	4031	100,54	0,4053
4	7955	75,77	0,6028	13	3647	106,62	0,3888
5	7163	79,37	0,5685	14	3284	114,28	0,3753
6	6389	83,20	0,5316	15	3053	122,29	0,3734
7	5984	85,31	0,5105	16	2857	133,27^5	0,3808
8	5592	87,57	0,4897	17	2759	140,71	0,3882
9	5228	89,80	0,4695				
		Point de contact:			0,005322	89,20	

h. Isotherme de 17,66°.

N°.	*v*	*p*	*pv*	N°.	*v*	*p*	*pv*
1	0,010273	67,26	0,6910	8	0,004843	94,59	0,4581
2	0,009510	70,17	0,6673	9	4087	102,08	0,4172
3	8683	73,60	0,6391	10	3688	108,02	0,3984
4	7920	76,98	0,6097	11	3280	117,36	0,3849
5	7161	80,58^5	0,5771	12	2973	129,44	0,3848
6	6359	84,77	0,5390^5	13	2816	141,18	0,3976
7	5610	89,15	0,5001				

4. *Courbes de plissement et de contact critique.* Si dans un diagramme p, T on trace les courbes de plissement et de contact critique, on constate qu'elles se touchent mutuellement à leur extrémité (anhydride carbonique pur), conformément à ce que l'on verra au chapitre 7, § 4. Dans la partie que j'ai examinée, ces courbes ne présentent pas le point

d'inflexion que M. VERSCHAFFELT a observé pour des mélanges d'hydrogène et d'anhydride carbonique [1]); elles tournent partout leur concavité vers l'axe des T.

5. *Condensation rétrograde.* La fig. 2 reproduit, pour les deux

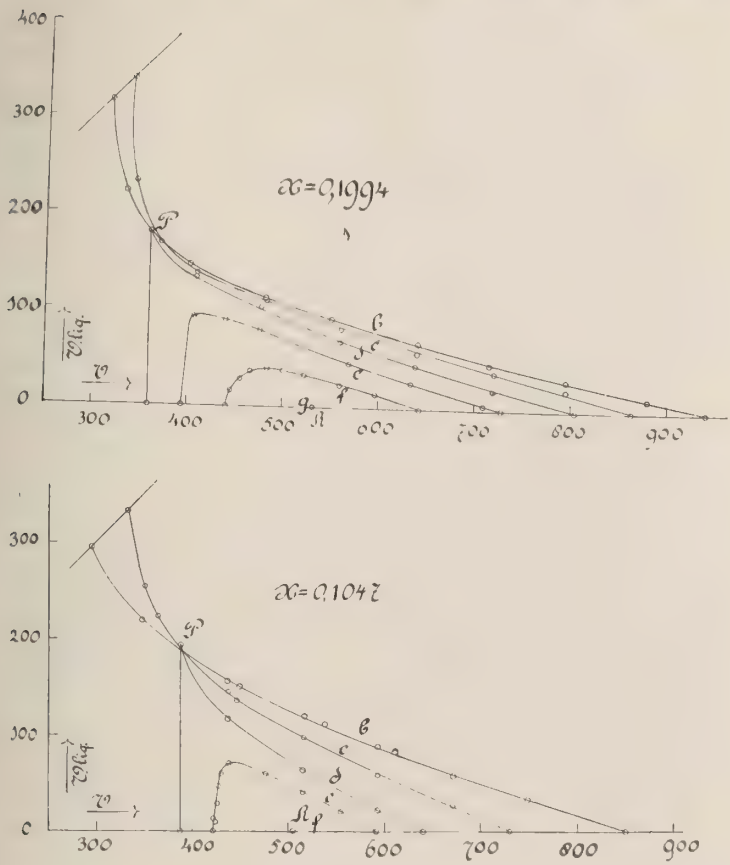


Fig. 2.

mélanges examinés, les courbes qui représentent v_{liq} comme fonction de v, d'après les tableaux des §§ 2 et 3 de ce chapitre. Les courbes relatives aux diverses températures sont affectées des mêmes lettres

[1]) Ces *Archives*, (2), 11, 432, 1906.

que celles qui ont servi à distinguer les isothermes dans ces tableaux. Les nombres marqués sur cette planche se rapportent à l'unité 0,00001 [1]).

---

6. Comparaison des mélanges avec l'anhydride carbonique, basée sur la loi des états correspondants.

1. Au chapitre II des Contributions à la connaissance de la surface ψ de van der Waals [2]) ont été traitées des méthodes pour comparer, par un procédé graphique, les isothermes des mélanges avec celles d'une substance simple, en faisant usage de la loi des états correspondants. Pour effectuer une pareille comparaison entre les isothermes des mélanges d'anhydride carbonique et d'oxygène que j'ai examinés et l'anhydride carbonique même, j'ai construit, tant pour l'anhydride carbonique pur que pour les mélanges, des diagrammes où $Log \frac{pv}{T}$ [3]) était représenté comme fonction de $Log\ v$ [4]). (Pour la température du zéro absolu j'ai pris — 273,04°). Si la loi des états correspondants s'applique à des mélanges comme aux substances simples, il faut que les isothermes correspondantes des divers diagrammes puissent être superposées, rien que par un déplacement dans le sens de l'axe des $Log\ v$.

J'ai constaté qu'il n'était pas possible de superposer les diagrammes de telle façon que les isothermes se confondaient dans toute l'étendue du tracé; la coïncidence n'avait lieu que pour les grands volumes.

D'après M. Kamerlingh Onnes cela signifie que pour les mélanges les coefficients A, B, C, D, E et F de sa série ne se laissent pas déduire des coefficients correspondants de la substance pure de la façon qu'exi-

---

[1]) A comparer avec la fig. 2 de la pl. X du tome XI de ces *Archives*.

[2]) Ces *Archives*, (2), 11, 375, 1906.

[3]) J'emploie ici, comme on le fait souvent, le signe *Log* pour indiquer des logarithmes vulgaires.

[4]) Puisque les températures sont assez élevées pour que la pression ne devienne pas négative dans la portion théorique des isothermes, l'emploi de la fonction $Log \frac{pv}{T}$ ne donne pas de difficultés. L'emploi de cette fonction a d'ailleurs cet avantage que non seulement les calculs sont un peu plus simples, mais encore que des écarts numériques de même grandeur relative sont représentés sur le tracé par des écarts linéaires de même grandeur absolue.

gerait la loi des états correspondants; mais, pour des volumes où les termes en D, E, F sont encore assez petits par rapport aux autres pour que l'on puisse négliger les différences entre ces termes et ceux donnés par des coefficients qui obéiraient à la loi des états correspondants, les diagrammes coïncideront sur toute l'étendue où B et C peuvent encore être considérés comme des fonctions correspondantes de la température; il sera donc possible de déduire de la loi des états correspondants une température et une pression critiques valables pour ce domaine.

Sur la planche III on voit les divers diagrammes superposés de telle façon que l'accord est aussi parfait que possible pour les grands volumes, pour autant qu'il soit possible d'en juger dans ce dessin. Dans le sens horizontal j'ai mesuré $Log\, v$, dans le sens vertical $Log \frac{pv}{T}$. Les traits pleins se rapportent à l'anhydride carbonique pur, les pointillés au mélange avec 0,1047 mol. O^2 et le trait interrompu au mélange avec 0,1994 mol. O^2. Les points représentant les observations relatives à l'anhydride sont entourés de petits cercles, ceux relatifs au premier mélange sont entourés de triangles, et de petits carrés encadrent les points du second mélange. Les diverses isothermes sont caractérisées par les lettres a, b etc., sous lesquelles elles ont été communiquées au chap. 4, § 2 et au chap. 5, §§ 2 et 3. Les points où la condensation commence ou s'achève sont indiqués respectivement par bc et ec; ils ont été reliés par des courbes, qui séparent donc la région homogène de celle où il y a séparation en liquide et vapeur. Enfin P et R représentent respectivement les points de plissement et les points de contact critique; K est le point critique de l'anhydride carbonique, conformément aux éléments communiqués au chap. 4, § 5. L'échelle se rapporte à l'anhydride carbonique.

On voit que pour des volumes plus grands que les volumes critiques l'accord est très satisfaisant. Pour les petits volumes, au contraire, il se manifeste des écarts systématiques de la loi des états correspondants, et ces écarts sont plus grands que ceux que l'on constate entre l'oxygène et l'anhydride carbonique purs [1]).

2. Des déplacements qu'ont subis les isothermes des deux mélanges,

[1]) *Versl. Kon. Akad.* juin 1901, pp. 154 et suiv.; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 71, pp. 21 et suiv., 1901.

sur la planche III, et des températures des isothermes coïncidantes, on pourrait déduire les éléments du point critique pour le domaine des grands volumes et des températures où les observations ont été faites, dans le sens qui a été expliqué au § 1. Mais les observations permettent de déterminer ces éléments avec une plus grande précision encore. J'ai notamment construit, à une échelle deux fois plus grande, des diagrammes pour les points de la région homogène où le volume est plus grand que 0,005. Dans ces diagrammes, une valeur de 0,0005, pour $Log \frac{pv}{T}$ aussi bien que pour $Log\, v$, était représentée par 1 mm.

Du déplacement dans le sens de l'axe $Log\, v$, nécessaire pour faire coïncider les diagrammes, on déduit le rapport du volume critique v_{xk} du mélange à celui v_k de l'anhydride carbonique, et des valeurs des températures des isothermes correspondantes le rapport des températures critiques T_{xk} et T_k. Enfin, de la relation

$$\frac{p_{xk}\, v_{xk}}{T_{xk}} = \frac{p_k\, v_k}{T_k}$$

on tire le rapport des pressions critiques. Ce dernier rapport n'étant obtenu ainsi qu'à la suite de deux opérations (la superposition des diagrammes et l'évaluation des températures correspondantes), il m'a paru désirable de déterminer le rapport des pressions directement à l'aide de diagrammes où, pour le même domaine, $Log \frac{pv}{T}$ était représenté comme fonction de $Log\, p$. Ces diagrammes permettent aussi de déterminer le rapport des températures critiques, et de comparer ce rapport, à titre de contrôle, avec la valeur déduite des diagrammes avec $Log\, v$ comme abscisse. Dans ces nouveaux diagrammes, 1 mm. avait une valeur 0,00025 pour $Log\, p$ et 0,0005 pour $Log \frac{pv}{T}$.

3. Le diagramme du mélange, copié sur du papier transparent sur lequel étaient tracés au milieu deux axes perpendiculaires entr'eux, pour permettre de constater avec précision si les axes des deux diagrammes correspondaient, a été placé sur celui de l'anhydride carbonique, de telle manière que les axes $Log\, v$ (ou $Log\, p$) se confondaient et il a été déplacé jusqu'à ce que l'on jugeait que les isothermes du mélange cadraient aussi bien que possible dans le système d'isothermes de l'anhydride carbonique. On a mesuré ensuite, pour les isothermes de CO^2

qui étaient venues se placer entre celles du mélange, la situation des premières par rapport aux deux isothermes du mélange les plus voisines, et cela pour un certain nombre de points régulièrement espacés. Si l'on nomme T_1 et T_2 les températures des deux isothermes les plus rapprochées du mélange, et T' la température du mélange qui correspond à celle de l'isotherme considérée de l'anhydride carbonique, on trouve ainsi un certain nombre de valeurs pour le rapport $\theta = \frac{T' - T_1}{T_2 - T_1}$.

Tableau XXV.

θ	Δ
0,695	+ 0,065
0,655	+ 0,025
0,660	+ 0,030
0,604	— 0,026
0,551	— 0,079
0,556	— 0,074
0,679	+ 0,049
0,583	— 0,047
0,628	— 0,002
0,690	+ 0,060

moy. 0,6301

Le tableau XXV peut servir à donner une idée de la précision avec laquelle les isothermes se recouvraient mutuellement; il se rapporte à la superposition IV du diagramme *Log p* du 1er mélange; la valeur 1,85 de *Log p* pour le mélange correspondait à la valeur 1,8821 pour l'anhydride carbonique, et l'isotherme 41,95° pour CO^2 tombait entre les isothermes 23,29° (T_2) et 22,68° (T_1) du mélange. Sous Δ on trouve les écarts de θ de la moyenne. La moyenne des carrés des écarts Δ est 0,002636. L'isotherme 37,09° de CO^2 tombait entre les isothermes 20,29° et 17,60° du mélange, et j'ai trouvé pour la moyenne de

$\frac{T' - 17,60}{20,29 - 17,60}$ la valeur 0,399; quant à la moyenne des carrés des différences, elle atteignait 0,000093. Pour rendre cette dernière valeur comparable avec la valeur correspondante pour la première isotherme, on doit la multiplier par $\left(\frac{20,29 - 17,60}{23,29 - 22,68}\right)^2 = 19,4$, ce qui donne 0,001804. La somme de cette dernière valeur et de celle trouvée pour la première isotherme nous fournit un nombre, qui permet de juger de l'exactitude des diverses superpositions; je le représenterai dans la suite par $\overline{\Delta^2}$. Dans le tableau suivant XXVI j'ai réuni les résultats ainsi obtenus pour les diverses superpositions du mélange 0,1; la première colonne donne le numéro, la deuxième la valeur de *Log p* pour CO^2 qui coïncidait avec la valeur 1,85 du mélange; la troisième donne les valeurs de $\overline{\Delta^2}$ que s'y rapportent.

Tableau XXVI.

II	1,8850	0,012165
I	1,8840	0,010535
III	1,8829	0,004783
IV	1,8821	0,004440
V	$1,8810^5$	0,006221

On déduit de là que Δ^2 prend la plus petite valeur quand on fait coïncider la valeur 1,85 pour le mélange avec 1,88235 pour l'anhydride carbonique. On trouve alors comme températures correspondantes pour l'anhydride et le mélange 0,1 : 41,95° et 23,02°, 37,09° et 18,64°. Il en résulte pour T_{ck} les valeurs 285,75° et 285,94°. Les diverses valeurs ainsi obtenus par T_{ck} sont réunies dans le tableau XXVII. La deuxième et la troisième colonne font connaître les températures qui correspondent à celles de l'anhydride carbonique, mentionnées dans la première colonne, notamment telles qu'elles résultent respectivement des diagrammes *Log p* et *Log v*; la quatrième et la cinquième colonne font connaître les valeurs de T_{xk} que l'on en déduit.

Tableau XXVII.

Mélange 0,1 :

CO^2	*Log p*	*Log v*	T_{xk}	
41,95	23,02	22,71	285,75	285,44
37,09	18,64	18,29	285,94	285,60

Mélange 0,2 :

48,10	15,16	15,08	272,83	272,75
41,95	10,08	10,17	273,26	273,34

4. Dans le tableau suivant XXVIII on trouve les éléments ainsi obtenus pour les points critiques des mélanges; j'y ai ajouté les données relatives aux points de plissement et de contact critique, ainsi que les éléments critiques de l'anhydride carbonique et de l'oxygène (les derniers suivant M. Olszewski [1]).

Tableau XXVIII.

x	T_{xpl}	T_{xr}	T_{xk}	p_{xpl}	p_{xr}	p_{xk}	v_{xpl}	v_{xr}	v_{xk}
0	304,02	304,02	304,02	72,93	72,93	72,93			0,00443
0,1047	295,03	296,33	285,68	86,60	82,83	67,70	0,003878	0,005005	450
0,1994	285,55	289,31	272,92	99,65	89,20	67,30	3606	5322	431
1	154,2	154,2	154,2	50,7	50,7	50,7			

[1]) On voit que, pour obtenir une correspondance aussi parfaite que possible dans la région des grands volumes, pour le diagramme communiqué au § 1 (pl. III), les isothermes du mélange 0,1 devraient être déplacées de 5 mm. vers la gauche, celles du second mélange de 6 mm. vers la droite. Mais les conclusions relatives à la mauvaise correspondance aux petits volumes subsistent; le désaccord devient même plus grand.

Les mélanges 0,1 et 0,2 fournissent respectivement pour l'expression $C_1 = \frac{T_{xk}}{T_0 p_{xk} v_{xk}}$ les valeurs 3,435 et 3,446; l'accord avec la valeur 3,45 que j'ai trouvée pour l'anhydride carbonique, au chap. 4, p. 66, est satisfaisant.

Au sujet de ces données critiques j'ai encore à remarquer ce qui suit: v_{xk} présente un maximum dans la région examinée [1]; p_{xk} diminue bien plus lentement entre 0,1 et 0,2 qu'entre 0 et 0,1; il en est de même pour T_{xk}, mais à un degré beaucoup moindre.

---

7. Les éléments du point de plissement et du point de contact critique de mélanges binaires avec une faible proportion d'une des composantes.

1. Les observations communiquées au chap. 5 nous permettent de mettre à l'epreuve les résultats des considérations théoriques relatives à l'allure des phénomènes critiques et des phénomènes de condensation présentés par des mélanges binaires, contenant une faible proportion d'une des composantes [2]. Je commencerai par développer les formules dont j'ai besoin.

Etant données les deux composantes d'un système binaire, les éléments du point de plissement et du point de contact critique sont des fonctions déterminées de x, qui, si les dérivées par rapport à x ne deviennent jamais infinies, ce que nous supposons, peuvent être développées en série suivant Maclaurin. Nous obtenons p. ex.

$$T_{xpl} = T_k + x\left(\frac{dT_{xpl}}{dx}\right) + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2T_{xpl}}{dx^2}\right) + \ldots,$$

---

[1]) D'après les nombres obtenus par M. Verschaffelt pour les mélanges d'anhydride carbonique et d'hydrogène, v_{xk} passe aussi par un maximum; mais ce maximum ne tombe pas dans la région examinée. Voir ces *Archives*, (2), 11, 444, 1906.

[2]) Voir van der Waals, ces *Archives*, 30, 278, 1896; en particulier les équations (5) et (9). Voir aussi D. J. Korteweg, ces *Archives*, (2), 8, 235, 1903.

où T_k est la température critique de la première composante (substance principale; x fait connaître la proportion de la composante additionnelle); les dérivées doivent être prises pour $x = 0$.

Dans la suite nous nous bornerons à considérer le premier terme, qui est important pour le mélange. Nous avons donc à determiner les grandeurs:

$$\frac{dT_{xpl}}{dx}, \quad \frac{dp_{xpl}}{dx}, \quad \frac{dv_{xpl}}{dx}, \quad \frac{dT_{xr}}{dx}, \quad \text{etc.},$$

pour $x = 0$; l'indice pl se rapporte au point de plissement, l'indice r au point de contact.

Quand nous aurons déduit de la théorie thermodynamique générale des mélanges, développée par M. VAN DER WAALS, des formules générales pour les grandeurs en question, nous les simplifierons en introduisant la loi des états correspondants, conformément aux idées exposées dans l'introduction.

Il est vrai qu'au chapitre précédent nous avons trouvé des écarts à cette loi, à propos des volumes critiques des mélanges contenant 0,1 et 0,2 d'oxygène. Mais aussi longtemps que nos connaissances sur la grandeur de ces écarts, et leur dépendance de x, ne sont pas plus étendues, il peut être utile d'examiner ce que l'on peut déduire de cette loi. D'ailleurs, aussi longtemps que les valeurs de x sont très petites, les points de plissement p. ex. seront situés, pour les divers mélanges, dans un domaine de températures et de pression où, suivant M. KAMERLINGH ONNES (voir chap. 6, § 1), la loi des états correspondants est du moins applicable en première approximation.

Nous verrons que la façon dont se comportent les mélanges binaires, avec une faible teneur en une des composantes, est complètement déterminée par des coefficients que l'on peut déduire de l'équation d'état d'une substance simple, et en outre par les deux grandeurs:

$$\alpha = \frac{1}{T_k}\left(\frac{dT_{xk}}{dx}\right)_{x=0} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{T_k}\left(\frac{dp_{xk}}{dx}\right)_{x=0},$$

où T_{xk} et p_{xk} sont la température et la pression au point critique du mélange supposé homogène.

2. *Température et pression de plissement.* Le point de plisse-

ment d'un mélange binaire est caractérisé par les relations suivantes:

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right) = 0, \qquad \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\right) = 0, \tag{1}$$

où $\zeta = \psi + pv$, ψ étant l'énergie libre [1]).

La première de ces équations exprime que le point de plissement de la surface ψ est situé sur la ligne spinodale, la seconde que l'isobare passant par le point de plissement touche la ligne spinodale.

Des équations (1) on déduit:

$$\left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial p}\right)\left(\frac{dp}{dT}\right)_{pl} + \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial T}\right) = 0 \tag{2a}$$

$$\left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}\right)\left(\frac{dx}{dT}\right)_{pl} + \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^3 \partial p}\right)\left(\frac{dp}{dT}\right)_{pl} + \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^3 \partial T}\right) = 0. \tag{2b}$$

En égard à

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial p}\right) = v, \qquad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial T}\right) = -\eta,$$

l'équation (2a) peut s'écrire:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{pl} = \frac{\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)_{pT}}{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{pT}},$$

et cette équation peut encore être mise sous la forme:

$$T\left(\frac{dp}{dT}\right)_{pl} = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v,x} + \frac{\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}\right)_{vT} + 2\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial v}\right)_{T}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{pT} + \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial v^2}\right)_{xT}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2_{pT}}{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{pT}}$$

(voir VAN DER WAALS, Cont. II, p. 144).

---

[1]) Partout où les dérivées de ζ et ψ ne sont pas affectées d'indices indiquant quelles sont les grandeurs qui restent constantes, on doit considérer ces fonctions comme des fonctions caractéristiques à la manière de MASSIEU (*C. R.*, 69, 858 et 1057, 1869).

Pour $x = 0$, cette équation se réduit à [1]):

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{pl} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{vx} - \frac{MRT_k \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v \partial T}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT}}{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2_{vT} + MRT_k \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v \partial x}\right)_T}, \qquad (3a)$$

en tenant compte de cette circonstance, qu'au point critique d'une substance simple

$$\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial v^2}\right)_{xT} = T_k \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v \partial T}\right).$$

L'équation (3*a*) suppose que l'on admet les unités choisies par M. VAN DER WAALS: nous nous figurons donc que nous avons affaire à une molécule-gramme de la substance; v est le volume exprimé en cm³., p la pression en atmosphères; R est la constante du gaz, c. à d. le volume en cm³. occupé par 1 gr. de la substance à 0° et 1 atm., dans l'hypothèse où cette masse est comprimée à partir d'un volume infiniment grand jusqu'à 1 atm. de pression, tout en suivant les lois des gaz parfaits, divisé par la température absolue du point de fusion de la glace sous la pression normale. En première approximation nous pouvons poser, pour une très petite valeur de x:

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) = \frac{MRT_k}{x} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}\right) = -\frac{MRT_k}{x^2}.$$

Il suit alors de

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v}\right) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{pT} = 0:$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{pT} = \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT}} \frac{MRT_k}{x},$$

et de

$$\left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}\right) + 2\left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial v}\right) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{pT} + \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial v^2}\right) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2_{pT} + \\ + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v}\right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{pT} = 0:$$

---

[1]) Ces *Archives*, 30, 280, 1896, form 5.

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{pT} = -\frac{MRT_k}{x^2\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT}^3}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT}^2 + MRT_k\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial v}\right)\right\}.$$

Par substitution nous arrivons, pour $x = 0$, à l'équation (3a).

De même, nous déduisons de l'équ. (2b) la valeur de $\left(\frac{dx}{dT}\right)_{pl}$ pour $x = 0$ en observant que

$$\left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^3\,\partial p}\right) = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_{pT} = \frac{(MRT_k)^4}{x^4}\,\frac{\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_{xT}}{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT}^5},$$

c. à d. est une quantité infiniment grande du 4e ordre;

$$\left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}\right) = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_{pT};$$

$$\left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^3\,\partial T}\right) = -\left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}\right)_{pT} = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{vx}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_{pT}.$$

Nous obtenons ainsi [1])

$$\left(\frac{dT_{xpl}}{dx}\right) = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT}^2 + MRT_k\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial v}\right)_T}{MRT_k\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v\,\partial T}\right)}, \qquad (3b)$$

où nous supposons également $x = 0$. Des deux équations (2a) et (2b) il résulte

$$\frac{dp_{xpl}}{dx} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT} - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT}^2 + MRT_k\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v\,\partial x}\right)_T}{MRT_k\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v\,\partial T}\right)}. \qquad (3c)$$

Dans ces formules $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ et $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v\,\partial T}\right)$ se rapportent à la composante principale, au point critique.

Je vais introduire maintenant la loi des états correspondants dans les équations précédentes. A l'aide des relations:

$$p = \mathfrak{p}\,p_{xk}, \qquad v = \mathfrak{v}\,v_{xk}, \qquad T = \mathfrak{t}\,T_{xk}, \text{ [2])}$$

---

[1]) Ces *Archives*, 30, 285, 1896, form. 9.

[2]) Voir ces *Archives*, (2), 11, 363, 1906.

où p_{xk}, v_{xk} et T_{xk} représentent respectivement la pression, le volume et la température critiques du mélange supposé homogène, de sorte que

$$\mathfrak{p} = f(\mathfrak{v}, \mathfrak{t})$$

est l'équation d'état réduite du mélange, nous obtenons:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT} = \mathfrak{p}\frac{dp_{xk}}{dx} - \frac{p_{xk}}{v_{xk}}\frac{dv_{xk}}{dx}\mathfrak{v}\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}}\right) - \frac{p_{xk}}{T_{xk}}\frac{dT_{xk}}{dx}\mathfrak{t}\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial v}\right)_T = \frac{1}{v_{xk}}\frac{dp_{xk}}{dx}\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}}\right) - \frac{p_{xk}}{v_{xk}^2}\frac{dv_{xk}}{dx}\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}}\right) -$$

$$- \frac{p_{xk}}{v_{xk}^2}\frac{dv_{xk}}{dx}\mathfrak{v}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}^2}\right) - \frac{p_{xk}}{T_{xk}\,v_{xk}}\frac{dT_{xk}}{dx}\mathfrak{t}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}\,\partial \mathfrak{t}}\right).$$

Au point critique de la substance pure, où $x = 0$, $\mathfrak{p} = 1$, $\mathfrak{v} = 1$, $\mathfrak{t} = 1$, $\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}}\right) = 0$ et $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}^2}\right) = 0$, nous aurons donc

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT} = p_k\left\{\beta - \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right)\right\}$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial v}\right)_T = -\frac{p_k}{v_k}\alpha\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}\,\partial \mathfrak{t}}\right),$$

où nous avons posé, comme au § 1,

$$\frac{1}{T_k}\frac{dT_{xk}}{dx} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{1}{p_k}\frac{dp_{xk}}{dx} = \beta.$$

En vertu de ces relations les équations (3*b*) et (3*c*) peuvent s'écrire:

$$\frac{1}{T_k}\left(\frac{dT_{xpl}}{dx}\right) = \alpha - \frac{\left\{\beta - \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right)\right\}^2}{C_4\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}\,\partial \mathfrak{t}}\right)} \tag{4a}$$

et

$$\frac{1}{p_k}\left(\frac{dp_{xpl}}{dx}\right) = \beta - \left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right)\frac{\left\{\beta - \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right)\right\}^2}{C_4\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}\,\partial \mathfrak{t}}\right)} \tag{4b}$$

où

$$C_4 = \frac{MRT_k}{p_k v_k}.$$

Ces deux équations font connaître immédiatement l'inclinaison de la courbe de plissement, dans le diagramme $p\ T$, au point critique de la substance pure. Nous voyons donc que la variation de la température et de la pression de plissement, due à la présence d'une petite proportion d'impuretés, est complètement déterminée par les quantités α et β.

Combinées avec cette propriété que, pour une substance simple,

$$\left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v\right]_k = \left(\frac{dp}{dT}\right)_k,$$

ces deux équations nous apprennent qu'au point critique, pour de très petites valeurs de x,

$$\frac{p_{xpl} - p_{xk}}{T_{xpl} - T_{xk}} = \left(\frac{dp}{dT}\right)_k.$$

$\left(\frac{dp}{dT}\right)_k$ est la valeur de $\frac{dp}{dT}$, au point critique, pour la courbe de la tension de vapeur saturée de la substance pure. Nous retrouvons ainsi une relation déjà donnée en 1897 par M. VAN DER WAALS [1]).

Il s'ensuit que, si nous réunissons dans le diagramme $p\ T$ les points critiques des mélanges homogènes avec les points de plissement de ces mélanges, nous obtenons des droites qui, au point critique de la substance pure, deviennent parallèles à la courbe de tension de vapeur de cette dernière.

3. *Volume de plissement.* Pour déterminer la variation du volume de plissement avec la composition, je partirai de l'équation:

$$\frac{dv_{xpl}}{dx} = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{xT} \frac{dp_{xpl}}{dx} + \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{px} \frac{dT_{xpl}}{dx} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{pT} \qquad (6).$$

Dans cette équation, $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{xT}$, $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{px}$ et $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{pT}$ sont, pour $x = 0$, des quantités infiniment grandes, et notamment d'un ordre tel que les termes infiniment grands s'entredétruisent. En développant $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{xT}$ etc. nous devons donc conserver les termes d'ordre fini, tandis que nous

[1]) *Versl. Kon. Akad.*, 1897, p. 298.

devons tenir compte des premières puissances de x dans les développements de $\frac{dp_{xpl}}{dx}$ et $\frac{dT_{xpl}}{dx}$.

En substituant dans l'équation (6) les valeurs de $\frac{dp_{xpl}}{dx}$ et $\frac{dT_{xpl}}{dx}$ que l'on trouve en différentiant les équations (1) totalement par rapport à x, on obtient :

$$\frac{dv_{xpl}}{dx} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{pT} + \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}\right) \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{xT}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)_{pT} + \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{px}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{pT}}{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{pT}\left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}\right)_{pT} - \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)_{pT}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_{pT}}. \quad (7)$$

Nous déterminerons $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{pT}$ de la même façon que dans le paragraphe précédent, mais nous devons écrire un terme en plus. A cet effet nous posons :

$$\psi = MRT\left\{(1-x)\log(1-x) + x\log(x)\right\} + \Phi$$

où

$$\Phi = -\int^{v} p\,dv.$$

Mettons

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{vT} = \Phi', \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_{vT} = \Phi'';$$

alors

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) = \frac{MRT}{x(1-x)} + \Phi''.$$

On a donc :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{pT} = \frac{MRT}{x(1-x)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT}} + \frac{\Phi''}{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT}} = \frac{MRT}{x\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT}} + \frac{MRT + \Phi''}{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT}} +$$

+ des termes en x au numérateur.

On peut développer d'une façon analogue chacune des dérivées dans la formule (7), en conservant chaque fois un terme en plus que celui d'ordre le plus élevé.

Pour le calcul des dérivées de η je partirai de la formule fondamentale :

$$d\varepsilon = T d\eta - p dv + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{pT} dx.$$

Au point de plissement:

$$T\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)_{pT} = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{vx}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{pT} + \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}\right)_{vT} +$$
$$+ 2\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x\,\partial v}\right)_T\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{pT} + \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial v^2}\right)_{xT}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2_{pT}.$$

On détermine de même $\left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}\right)_{pT}$ au moyen de ε.

Finalement on obtient, pour $x = 0$,

$$\left(\frac{dv_{xpl}}{dx}\right) = -\frac{MRT_k}{\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_T}\left[\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^3_{vT}}{(MRT_k)^3} + \frac{\left(\frac{\partial^3 p}{\partial x\,\partial v^2}\right)_T}{MRT_k} + 3\frac{\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial v}\right)_T\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT}}{(MRT_k)^2} -\right.$$
$$\left. - \frac{\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^2\,\partial T}\right)}{\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v\,\partial T}\right)(MRT_k)^2}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2_{vT} + MRT_k\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial v}\right)_T\right\}\right]. \qquad (3d)$$

Si nous introduisons comme au § 2 la loi des états correspondants, cette formule se transforme en:

$$\frac{1}{C_4}\cdot\frac{1}{v_k}\left(\frac{dv_{xpl}}{dx}\right) = \frac{1}{C_4}(\alpha - \beta) - \frac{\beta - \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right)}{C_4{}^3\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}^3}\right)\cdot C_4\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}\,\partial \mathfrak{t}}\right)} \times$$
$$\times\left[C_4\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}\,\partial \mathfrak{t}}\right)\left\{\beta - \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right)\right\}^2 -\right.$$
$$\left. - C_4{}^2\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}^2\,\partial \mathfrak{t}}\right)\left\{\beta - \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right)\right\} - 3\,C_4{}^2\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}\,\partial \mathfrak{t}}\right)^2\alpha\right]; \qquad (4c)$$

à la place de $\alpha - \beta$ nous pourrions du reste mettre $\frac{1}{v_k}\frac{dv_{xk}}{dx}$.

4. *Le point de contact critique.* Les formules relatives au point de contact critique s'obtiennent aisément à l'aide de celles que M. Korteweg

a données dans son travail sur les points de plissement [1]). A cet effet, nous appliquerons à la surface ψ de VAN DER WAALS la transformation projective dont M. KORTEWEG a fait usage [2]):

$$\left.\begin{aligned} \psi'' &= \psi' - v'\left(\frac{\partial\psi'}{\partial v'}\right)_{pl} - x'\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x'}\right)_{pl} \\ x'' &= x' - m\,v' \\ v'' &= v'. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(équ. 38)}$$

Ici nous avons:

$$\begin{aligned} \psi' &= \psi - \psi_{Tpl} \\ x' &= x - x_{Tpl} \\ v' &= v - v_{Tpl}, \end{aligned}$$

où x_{Tpl}, v_{Tpl} et ψ_{Tpl} sont les coordonnées du point de plissement sur la surface ψ qui correspond à la température considérée, tandis que m est déterminé par:

$$m\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial v}\right) = 0\,, \qquad \text{(équ. 34)}$$

les dérivées se rapportant au point de plissement.

Or, comme

$$\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x''}\right)_1 = \left(\frac{\partial\psi''}{\partial x''}\right)_2$$

$$\left(\frac{\partial\psi''}{\partial v''}\right)_1 = \left(\frac{\partial\psi''}{\partial v''}\right)_2$$

$$\psi_1'' - x_1''\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x''}\right)_1 - v_1''\left(\frac{\partial\psi''}{\partial v''}\right)_1 = \psi_2'' - x_2''\left(\frac{\partial\psi''}{\partial x''}\right)_2 - v_2''\left(\frac{\partial\psi''}{\partial v''}\right)_2$$

lorsque

$$\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x'}\right)_1 = \left(\frac{\partial\psi'}{\partial x'}\right)_2, \text{ etc.,}$$

les phases coexistantes sur la surface ψ'' s'obtiennent également par le roulement d'un plan tangent à cette surface. ψ'', considéré comme fonction de x'' et v'', a la forme

$$\psi'' = c_1\,x''^2 + d_3\,x''\,v''^2 + e_5\,v''^4 + \ldots, \qquad \text{(équ. 4)}$$

---

[1]) *Wien. Sitz. Ber.*, 98, 1154, 1889.

[2]) *Loc. cit.*, équ. 38.

de sorte que nous pouvons déduire l'équation de la ligne connodale à la façon de KORTEWEG, et que nous obtenons pour équation de cette courbe:

$$x'' = -2\frac{e_5}{d_3}v''^2. \qquad \text{(équ. 8)}$$

Pour une température fort peu différente de la température critique de la substance pure [1]) il vient, en première approximation,

$$m = \frac{1}{MRT_k}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT} x_{Tpl},$$

et, négligeant les termes d'ordre plus élevé, on peut poser, d'après l'équation 39 de M. KORTEWEG [2]):

$$d_3 = -\frac{1}{2MRT_k}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2_{vT} + MRT_k\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial v}\right)_T\right\},$$

$$e_5 = -\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_{xT}.$$

Faisant maintenant usage du caractère qu'au point de contact critique $\frac{dx}{dv} = 0$, nous déduisons de là

$$v_{Tr} - v_{Tpl} = 3\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT}}{(MRT_k)^2 \cdot \left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2_{vT} + MRT_k\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial v}\right)_T\right\} x_{Tpl} \qquad (3e)$$

et

$$x_{Tr} - x_{Tpl} = \frac{3}{2}\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2_{vT}}{(MRT_k)^3 \cdot \frac{\partial^3 p}{\partial v^3}}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2_{vT} + MRT_k\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial v}\right)\right\} x^2_{Tpl}. \qquad (3f)$$

[1]) Nous nous figurons cette température telle que x_{Tpl} soit positif.

[2]) Puisque e_1 ne figure pas dans nos formules, le fait que ce coefficient devient infiniment grand pour une très petite valeur de x_{Tpl} ne donne aucune difficulté, du moins aussi longtemps que $x - x_{Tpl}$ reste très petit par rapport à x_{Tpl} même, comme c'est le cas ici.

Il suit de là que, pour $x = 0$, $\left(\frac{dx_{Tr}}{dT}\right) = \left(\frac{dx_{Tpl}}{dT}\right)$, ou $\left(\frac{dT_{xr}}{dx}\right) = \left(\frac{dT_{xpl}}{dx}\right)$, d'où l'on déduit aisément que l'on a aussi $\left(\frac{dp_{xr}}{dx}\right) = \left(\frac{dp_{xpl}}{dx}\right)$; de sorte que dans le diagramme pT les courbes des points de plissement et des points de contact critique [1]) sont tangentes l'une à l'autre à leurs extrémités.

Il vient en outre, pour un mélange de composition x:

$$T_{xr} - T_{xpl} = \frac{3}{2} \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2_{vT}}{(MRT_k)^4 \cdot \left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v \partial T}\right)} \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2_{vT} + MRT_k \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial v}\right)_T \right\}^2 x^2, \qquad (3g)$$

une formule d'où $p_{xr} - p_{xpl}$ résulte aisément.

Introduisant comme aux §§ 2 et 3 la loi des états correspondants, on trouve :

$$v_{Tr} - v_{Tpl} = 3 C_4 v_k \frac{\beta - \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right)}{C_4^3 \left(\frac{\partial^3 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}^3}\right)} \left[\left\{ \beta - \alpha \left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right) \right\}^2 - C_4 \alpha \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v} \partial \mathfrak{t}}\right) \right] x, \qquad (4d)$$

$$T_{xr} - T_{xpl} = \frac{3}{2} \frac{\left\{ \beta - \alpha \left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right) \right\}^2}{C_4^3 \left(\frac{\partial^3 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}^3}\right) \cdot C_4 \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v} \partial \mathfrak{t}}\right)} \left[\left\{ \beta - \alpha \left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right) \right\}^2 - C_4 \alpha \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v} \partial \mathfrak{t}}\right) \right]^2 x^2. \qquad (4e)$$

5. *Comparaison avec les observations* [2]). Pour le calcul des grandeurs:

---

[1]) Les grandeurs relatives au point de contact critique sont caractérisées par l'indice r.

[2]) Dans un article qui fut publié dans *Versl. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam*, après mes recherches, mais qui a déjà été traduit dans ces *Archives*, (2), 11, 115, 1906, M. VAN DER WAALS compare les résultats de mes recherches avec des relations qu'il déduisit pour la courbe de plissement au voisinage d'une des composantes, en appliquant son équation d'état. Pour obtenir un accord

$$\alpha = \frac{1}{T_k}\left(\frac{dT_{xk}}{dx}\right)_{x=0}, \qquad \beta = \frac{1}{p_k}\left(\frac{dp_{xk}}{dx}\right)_{x=0}, \text{ etc.},$$

introduites au § 1, j'ai représenté comme fonctions de x les diverses grandeurs du tableau XXVIII. Pour déterminer avec certitude la manière dont v_{xk} p. ex. dépend de x, un plus grand nombre d'observations seraient nécessaires. Comme j'avais constaté que, eu égard au volume critique de l'oxygène, il ne suffisait pas de représenter v_{xk} par une fonction quadratique, j'ai ajouté un terme en x^3 et j'ai calculé les coefficients en faisant usage des données relatives à l'anhydride carbonique, à l'oxygène (pour ce gaz j'ai donné à C_4 la valeur trouvée pour l'anhydride carbonique) et aux deux mélanges. J'ai opéré de même pour les autres grandeurs. Voici les formules que j'ai obtenues.

$$\begin{aligned}
T_{xk} &= T_k \{1 - 0{,}6563\ x + 0{,}8350\, x^2 - 0{,}6715\, x^3\} \\
p_{xk} &= p_k \{1 - 1{,}0871\ x + 4{,}1885\, x^2 - 3{,}4063\, x^3\} \\
v_{xk} &= v_k \{1 + 0{,}5422^5\ x - 4{,}0310\, x^2 + 3{,}2183^5 x^3\} \\
T_{xpl} &= T_k \{1 - 0{,}25792\, x - 0{,}2349\, x^2\} \\
p_{xpl} &= p_k \{1 + 1{,}6639\ x + 1{,}5775\, x^2 - 3{,}5462\, x^3\} \\
T_{xr} &= T_k \{1 - 0{,}2474\ x + 0{,}0898\, x^2 - 0{,}3352\, x^3\} \\
p_{xr} &= p_k \{1 + 1{,}4953\ x - 1{,}9113\, x^2 + 0{,}1112\, x^3\}.\ ^{1)}
\end{aligned}$$

Pour des valeurs de x plus grandes que celles auxquelles se rapportent les observations, on peut prévoir que ces formules s'écarteront notablement de ce que l'expérience fournira; des erreurs commises dans les observations relatives à $x = 0{,}1$ et $x = 0{,}2$ se retrouveront augmen-

satisfaisant pour les grandeurs qu'il considère, M. VAN DER WAALS est conduit à supposer que b varie avec le volume, d'une manière conforme à ce que les substances pures ont appris. Ainsi l'hypothèse d'où je suis parti, qu'en première approximation les mélanges suivent la loi des états correspondants, se trouve confirmée par ces considérations.

[1]) Les données relatives à T_{xpl} se laissaient parfaitement représenter par une formule quadratique.

Il semble résulter de ces formules que la pression de plissement atteint un maximum de 132 atm. pour $x = 0{,}57$, et que la plus grande valeur de $T_{xr} - T_{xpl}$ est de 15.7° (pour $x = 0{,}63$). Mais cette dernière valeur est probablement trop grande, car les formules expriment à peu près que les courbes T_{xr} et T_{xpl} sont tangentes l'une à l'autre au point $x = 0$, mais non qu'elles le sont au point $x = 1$; pour de grandes valeurs de x elles fournissent donc des valeurs trop grandes pour $T_{xr} - T_{xpl}$.

tées dans les valeurs calculées en dehors du domaine de l'observation. Cela s'applique surtout à T_{xk}, p_{xk} et v_{xk}, dont la détermination est sujette à des causes d'erreurs plus nombreuses que celle des autres quantités.

6. Des formules précédentes nous déduisons:

$$\alpha = -0{,}6563 \qquad \beta = -1{,}0871$$

et

$$\gamma = \frac{1}{v_k}\left(\frac{dv_{xk}}{dx}\right)_{x=0} = 0{,}5422^5;$$

on voit que $\alpha - \beta = 0{,}4308$, alors que, en vertu de la loi des états correspondants, on devrait avoir $\gamma = \alpha - \beta$. Nous venons de voir que la relation $\frac{p_{xk}\, v_{xk}}{T_{xk}} = \text{Cte.}$ est suffisamment bien vérifiée pour les mélanges; si malgré cela la relation $\gamma = \alpha - \beta$ l'est mal, cela doit être attribué à la manière dont nous avons représenté les grandeurs comme fonctions de x. C'est en effet aux bords que l'on peut s'attendre à ce que les dérivées présentent les plus grands écarts.

Pour cette raison on peut considérer comme satisfaisant l'accord entre $\frac{1}{T_k}\left(\frac{dT_{xpl}}{dx}\right)_{x=0}$ et $\frac{1}{T_k}\left(\frac{dT_{xr}}{dx}\right)_{x=0}$ et entre $\frac{1}{p_k}\left(\frac{dp_{xvl}}{dx}\right)_{x=0}$ et $\frac{1}{p_k}\left(\frac{dp_{xr}}{dx}\right)_{x=0}$.

Dans le tableau suivant XXIX je compare les valeurs de α et β, déduites de $\frac{1}{T_k}\left(\frac{dT_{xpl}}{dx}\right)_{x=0}$ et $\frac{1}{p_k}\left(\frac{dp_{xpl}}{dx}\right)_{x=0}$ au moyen des formules (4*a*) et (4*b*) du § 2 et des valeurs trouvées au § 5 du chap. 4 pour les constantes $C_1, \left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right)$ et $C_4 \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}\, \partial \mathfrak{t}}\right)$, avec celles que l'on déduit de $\frac{1}{T_k}\left(\frac{dT_{xr}}{dx}\right)_{x=0}$ et $\frac{1}{T_k}\left(\frac{dp_{xr}}{dx}\right)_{x=0}$ (nous avons vu plus haut, § 4, que les mêmes formules (4*a* et 4*b* du § 2) s'appliquent au point de contact critique) et avec celles qui résultent du point critique homogène. La première colonne nous apprend de quels éléments les valeurs ont été déduites.

Tableau XXIX.

	α	β
K	$-0{,}6563$	$-1{,}0871$
P	$-0{,}6864$	$-1{,}2120$
R	$-0{,}6174$	$-0{,}9892$

Il résulte de ces nombres que les valeurs de α et β, déduites des éléments des points de plissement et de contact critique, et qui s'appliquent donc, dans le sens qui a été exposé plus haut (§ 1), au domaine où ces points sont encore situés pour de petites valeurs de x, s'accordent [1]), en première approximation du moins, avec celles qui se rapportent au point critique des mélanges, que nous avons admis pour la région des grands volumes.

Pour l'inclinaison à l'origine des courbes de plissement et de contact critique, dans le diagramme pT, on trouve

$$\frac{T_k}{p_k}\left(\frac{dp}{dT}\right)_{pl} = -6{,}451, \quad \frac{T_k}{p_k}\left(\frac{dp}{dT}\right)_{r} = -6{,}044;$$

ces valeurs concordent suffisamment.

Pour les droites qui joignent, dans le même diagramme, le point critique homogène K au point de plissement P, nous trouvons comme inclinaison:

pour le mélange 0,1 : $\dfrac{p_{xpl} - p_{xk}}{T_{xpl} - T_{xk}} = 2{,}021$

et pour le mélange 0,2 : $2{,}561.$

Pour les droites qui joignent le point critique homogène K au point de contact critique R:

pour le mélange 0,1 : $\dfrac{p_{xr} - p_{xk}}{T_{xr} - T_{xk}} = 1{,}421,$

pour le mélange 0,2 : $1{,}336.$

---

[1]) Ainsi que l'a fait remarquer M. VAN DER WAALS (ces *Archives*, (2), **11**, 125, 1906), le fait que l'accord que lui-même trouva entre les quantités $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v$, déduites des données des points de plissement, des points de contact critique et des points critiques homogènes, n'est pas aussi bon que celui que je viens de trouver, doit être principalement attribué à cette circonstance, que sa comparaison était fondée sur les quantités $\frac{\Delta T_{xpl}}{\Delta x}$ etc., Δx étant 0,1047 ou 0,1995. En effet, si l'on calcule, à l'aide des formules de M. VAN DER WAALS, $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT}$ pour $x = 0$, $T = T_k$, $v = v_k$, en faisant usage de quantités $\left(\frac{dT_{xpl}}{dx}\right)_{x=0}$ etc. déduites ici, l'accord devient satisfaisant.

Des deux côtés nous constatons donc une tendance vers la valeur 1.610, que ces deux quotients doivent prendre à la limite (équ. (5), p. 92).

Avant de pouvoir entamer la vérification des formules 1c, d et e des §§ 3 et 4, nous devrons attendre des données expérimentales plus nombreuses, permettant de calculer la constante $\frac{\partial^3 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}^3}$.

Il résulte des valeurs trouvées pour α et β que les mélanges d'anhydride carbonique et d'une faible quantité d'oxygène sont représentés par un point du champ 6 de la planche donnée par M. Korteweg [1]).

---

8. L'augmentation de pression par condensation d'une substance contenant une petite quantité d'une autre substance.

1. Pour juger de la pureté d'une substance, on détermine souvent l'augmentation que subit la pression quand la substance passe, à température constante, de l'état gazeux à l'état liquide. Dans le présent chapitre cette augmentation de pression sera exprimée au moyen des grandeurs

$$\alpha = \frac{1}{T_k}\left(\frac{dT_{xk}}{dx}\right)_{x=0} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{p_k}\left(\frac{dp_{xk}}{dx}\right)_{x=0},$$

et de coefficients à emprunter à l'équation d'état d'une substance simple, en faisant usage de la loi des états correspondants (voir le chapitre précédent, § 1). Connaissant la nature de l'impureté contenue dans une certaine substance, cette formule permet de déterminer la quantité de cette impureté, et l'on peut alors, au moyen des formules données au chapitre précédent, apporter des corrections aux données relatives au point de plissement et au point de contact critique, pour trouver les éléments critiques de la substance pure.

2. Afin de trouver la relation entre les compositions des phases coexistantes, je pars de la relation bien connue:

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\right) = \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\right), \tag{1}$$

[1]) Ces *Archives*, (2), 8, 235, 1903.

où ψ représente l'énergie libre; l'indice 1 se rapportera toujours au liquide, l'indice 2 à la vapeur [1]).

Tout comme au chapitre précédent, § 3, nous poserons [2])

$$\psi = MRT \{(1-x)\, log\,(1-x) + x\, log\,(x)\} + \Phi,$$

où l'on a donc $\Phi = -\int^{v} p dv$.

Si nous écrivons de nouveau $\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}\right)_{vT} = \Phi_1'$, la relation (1) se transforme en

$$MRT\, log\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right) + \Phi_1' = MRT\, log\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right) + \Phi_2';$$

et si x est très petit il s'ensuit [3]):

$$x_1 = x_2 e^{\frac{\Phi_2' - \Phi_1'}{MRT}}. \tag{2}$$

Or

$$\Phi_1' = -\int^{v_1 x_1} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\substack{vT \\ x = x_1}} dv,$$

ce qui, développé en série suivant Maclaurin, donne

$$\Phi_1' = -\int^{v_1} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\substack{vT \\ x=0}} dv - x_1 \int^{v_1} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)_{\substack{vT \\ x=0}} dv - x_1 \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\substack{vT \\ x=0}} \left(\frac{dv_1 x}{dx}\right)_{x=0} + \text{etc.}$$

Pour une valeur infiniment petite de x nous pouvons écrire

$$\Phi_2' - \Phi_1' = -\int_{v_1}^{v_2} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT} dv,$$

du moins si nous ne sommes pas trop près de la température cri-

[1]) Pour la signification des dérivées, voir la note au bas de la page 88.

[2]) Voir van der Waals, Cont. II, p. 147. Pour les unités voir le précédent chapitre, § 2.

[3]) Voir van der Waals, Cont. II, p. 148; ces *Archives*, 26, 96, 1892.

tique de la substance pure, puisqu'à cette température $\frac{dv_{1x}}{dx}$ et $\frac{dv_{2x}}{dx}$ deviennent infiniment grands. v_1 et v_2 représentent les volumes moléculaires du liquide et de la vapeur saturés de la substance pure. Si nous introduisons la loi des états correspondants, en recourant à la relation suivante, déjà mentionnée au chapitre précédent, § 2,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT} = \mathfrak{p}\frac{dp_{xk}}{dx} - \frac{p_{xk}}{v_{xk}}\frac{dv_{xk}}{dx}\mathfrak{v}\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}}\right) - \frac{p_{xk}}{T_{xk}}\frac{dT_{xk}}{dx}\mathfrak{t}\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right),$$

et que nous fassions usage du théorème de MAXWELL:

$$\int_{\mathfrak{v}_1}^{\mathfrak{v}_2} \mathfrak{p}\, d\mathfrak{v} = \mathfrak{p}_m(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1)$$

et de la relation [1]):

$$\int_{\mathfrak{v}_1}^{\mathfrak{v}_2} \left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right) d\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{p}_m}{d\mathfrak{t}}(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1),$$

où $\mathfrak{p}_m$ représente la pression de coexistence réduite, $\mathfrak{v}_1$ et $\mathfrak{v}_2$ les volumes réduits du liquide et de la vapeur saturés, nous trouvons

$$\frac{\Phi_2' - \Phi_1'}{MRT} = \frac{1}{C_4}\left\{\alpha\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{p}_m}\frac{d\mathfrak{p}_m}{d\mathfrak{t}} - \beta\right\}\frac{\mathfrak{p}_m(\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_1)}{\mathfrak{t}}, \tag{3}$$

où α et β ont la signification déjà mentionnée, et $C_4 = \frac{MRT_k}{p_k v_k}$; ou bien

$$\frac{\Phi_2' - \Phi_1'}{MRT} = \left\{\alpha\frac{T}{p_m}\frac{dp_m}{dT} - \beta\right\}\frac{p_m(v_2 - v_1)}{MRT}. \tag{4}$$

3. A présent que nous venons de trouver une relation entre x_1 et x_2, nous pouvons déduire de l'équation [2]):

$$\left\{v_2 - v_1 - (x_2 - x_1)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)_{pT}\right\}\frac{dp}{dx_1} = (x_2 - x_1)\left(\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x_1^2}\right)_{pT} \tag{5}$$

comment la pression de saturation varie par l'addition d'une petite

[1]) Cette équation s'obtient en différentiant la précédente par rapport à $\mathfrak{t}$.
[2]) VAN DER WAALS, Cont. II, p. 108.

quantité d'une deuxième substance. Quand x_1 et x_2 sont infiniment petits, cette équation devient en effet:

$$(v_2 - v_1)(p_1 - p) = MRT\,x\,(e^{-k} - 1), \tag{6}$$

à condition toutefois que nous ne soyons pas trop près de la température critique de la substance pure, sans quoi $\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)_{pT}$ serait infiniment grand.

v_2 et v_1 sont les volumes moléculaires de la vapeur et du liquide saturés. p est la tension de vapeur saturée de la substance pure, p_1 est la tension au-dessus du liquide de composition x et

$$k = \frac{\Phi_2' - \Phi_1'}{MRT} = \left\{\alpha \frac{T}{p}\frac{dp}{dT} - \beta\right\}\frac{p(v_2 - v_1)}{MRT}. \tag{7}$$

De même

$$(v_2 - v_1)(p_2 - p) = MRT\,x\,(1 - e^{k}), \tag{8}$$

p_2 étant la pression de la vapeur saturée, quand sa composition est x. L'augmentation de la pression pendant la condensation de la vapeur de composition x en liquide de même composition est donc déterminée par

$$(v_2 - v_1)(p_1 - p_2) = MRT\,x\,(e^{k} + e^{-k} - 2). \tag{9}$$

Cette équation peut servir à déduire la composition d'une substance de déterminations relatives à l'augmentation de pression.

4. *Pureté de l'anhydride carbonique.* Les valeurs de α et β trouvées au chapitre précédent. § 6, et l'augmentation de tension de vapeur de 0,07 atm. observée pendant la condensation à 25,55° (voir chap. 4, p. 53) nous permettent de juger de la pureté de l'anhydride carbonique employé. A l'aide de la formule (9), que j'écrirai, en faisant usage des unités employées dans les chapitres 4 et 5 (atmosphère et volume normal théorique):

$$(v_2 - v_1)(p_1 - p_2) = A_t\,x\,(e^{k} + e^{-k} - 2), \tag{10}$$

où

$$A_t = 1 + 0{,}0036625\,t,$$

et

$$k = \left\{\alpha \frac{T}{p}\frac{dp}{dT} - \beta\right\}\frac{p(v_2 - v_1)}{A_t}, \tag{11}$$

nous trouvons, dans l'hypothèse que l'impureté est de l'oxygène, et en prenant pour α et β les valeurs empruntées au point K:

$$x = 0{,}00027.$$

---

9. L'influence de la pesanteur sur les phénomènes dans le voisinage du point de plissement d'un mélange binaire.

1. Au § 1 du chapitre 5 j'ai fait remarquer qu'il y a tout un domaine de températures dans lequel la condensation s'achève par une disparition du ménisque à l'intérieur du tube. Ce phénomène a été expliqué pour la première fois par M. Kuenen [1]), au moyen de la théorie que M. van der Waals a donnée de l'influence de la pesanteur sur l'équilibre thermodynamique dans les mélanges. Ce qui va suivre servira à montrer qu'il y a aussi un accord quantitatif entre cette théorie et les phénomènes observés.

2. Pour le mélange dont la teneur moléculaire en oxygène était 0,1047, j'ai constaté qu'à 21°,86 une augmentation du volume faisait apparaître le ménisque au sommet du tube, tandis qu'à 21°,94[5] il se formait à la hauteur du trait 44,99 (l'agitateur étant en bas et le ménisque mercuriel au niveau 41,66); à 22°,17 le ménisque apparaissait en bas du tube et à 22°,09[5] il se formait au niveau 43,93 (agitateur en bas, ménisque mercuriel à 41,57). Le sommet du tube correspondait au trait 47,40 (cm.).

Pour le mélange de composition moléculaire 0,1994 le ménisque apparaissait à 13°,12 à la base du tube; à 13°,07 il se formait au niveau 38,5 (agitateur en bas, ménisque mercuriel à 37,4); à 11°,89 le ménisque se montrait tout en haut, et à 11°,92 au niveau 42,3 (agitateur en bas, ménisque mercuriel à 37,7). Le sommet du tube correspondait à la division 42,97. Nous pouvons donc dire que, pour ce second mélange, les températures extrêmes entre lesquelles le ménisque apparaissait dans le tube étaient 13°,10 et 11°,90.

---

[1]) Ces *Archives*, (2), 1, 342, 1898.

Dans ces observations j'ai eu soin d'augmenter le volume, par petits changements graduels, à partir de l'état homogène; dans ces conditions il n'est même pas nécessaire d'agiter pour que le ménisque vienne occuper rapidement sa position définitive, qu'une agitation ultérieure ne modifie pas d'ailleurs. Mais inversement, quand on part de l'état où la substance est séparée en deux phases, et que l'on diminue le volume, le ménisque ne disparaît que par agitation, et alors brusquement; il paraît donc que l'équilibre est atteint beaucoup plus rapidement dans le premier cas que dans le second [1]).

3. Pour pouvoir comparer ces observations avec la théorie, j'ai examiné ce que l'on pouvait déduire de cette dernière dans le cas où l'on suppose que la valeur de x est très petite. Des considérations de M. VAN DER WAALS (Cont. II, pp. 30 et suiv.) on déduit aisément que les phases, qui sont en équilibre les unes avec les autres, sont déterminées par le suivant système d'équations:

$$\left.\begin{aligned} F\,dv &= \left\{\frac{M_1(1-x)+M_2x}{v}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)+(M_2-M_1)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial v\,\partial x}\right)\right\} g\,dh \\ F\,dx &= -\left\{\frac{M_1(1-x)+M_2x}{v}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial v\,\partial x}\right)+(M_2-M_1)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\right\} g\,dh \end{aligned}\right\}. \quad (1)$$

Dans ces équations ψ est l'énergie libre pour une molécule-gramme du mélange, v le volume moléculaire en cm^3., M_2 le poids moléculaire de la substance dont la proportion dans le mélange est représentée par x (composante additionnelle) et M_1 le poids moléculaire de la composante principale; ensuite,

$$F=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial v\,\partial x}\right)^2.$$

Les équations déterminent, sur la surface ψ, une courbe que j'appellerai courbe de gravitation, comme M. KUENEN (l. c. p. 348, voir aussi fig. 2). De (1) on déduit:

[1]) A comparer avec ce que j'ai fait remarquer au chap. 4, p. 61, au sujet du retard dans l'établissement de l'équilibre lorsqu'on chauffe de l'anhydride carbonique près du point critique, Voir aussi GOUY, *C. R.*, 116, 1291 et MATHIAS, Le point critique des corps purs, p. 89.

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{gr} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{pT} - \frac{F}{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right) \cdot \frac{M_1(1-x)+M_2 x}{v} \cdot \frac{\frac{M_1(1-x)+M_2 x}{v}}{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v}\right) + (M_2 - M_1)\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right)}}.$$

Il résulte de cette équation qu'au point de plissement $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{gr} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{pT}$, ce qui veut dire que la courbe de gravitation est tangente à l'isobare, donc aussi à la courbe spinodale, le long de laquelle on a $F = 0$. Au point suivant de la courbe de gravitation qui passe par le point de plissement, on aura donc, en première approximation, $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{gr} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{pT}$, et par conséquent, au point de plissement même [1]):

$$\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)_{gr} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{pT}.$$

Ces relations nous apprennent, qu'en un point de la courbe de gravitation voisin du point de plissement on a:

$$F = \frac{1}{2}(x - x_{Tpl})^2 \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{pT} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2_{pT} + \right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{pT} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) \right\},$$

où l'on doit donner aux dérivées de F et v les valeurs qu'elles ont au point de plissement. Si l'on suppose que x_{Tpl} est très petit et que l'on fasse usage des mêmes réductions qu'au chap. 7, §§ 2 et 3, on peut écrire, en première approximation,

$$F = -\frac{1}{2}(x - x_{Tpl})^2 \frac{(M_1 R T_k)^3}{x^3{}_{Tpl}} \frac{\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_T}{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2_{vT}},$$

où l'on doit donner aux dérivées de p les valeurs qu'elles ont au point critique de la substance simple.

---

[1]) C'est ce que M. Kuenen a démontré d'autre manière (l. c. p. 348), pour la courbe de gravitation sur la surface ψ relative à une masse constante.

Si l'on introduit dans le second membre des équations (1) la simplification que x est très petit, la seconde de ces équations donne, par intégration,

$$\frac{1}{3}(x - x_{Tpl})^3 = -2\,\frac{x^3{}_{Tpl}}{(M_1 R T_k)^3}\,\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^3_{vT}}{\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_T}\,\frac{M_1}{v_k}\,gh + \text{constante}. \qquad (2)$$

Cette équation permet de trouver la valeur de x_{Tpl} quand on connaît la composition moyenne X, la hauteur H du tube et l'endroit où le ménisque apparaît, c. à d. la valeur de $x_{Tpl} - X$ quand cette apparition a lieu au sommet ou à la base du tube, et aussi les températures auxquelles cette apparition se produit. Si nous appelons T_{Xpl} la température de plissement qui appartient à la composition X, T_{hpl} la température à laquelle le ménisque se forme tout au fait en haut du tube, T_{bpl} celle à laquelle il se forme en bas, nous trouvons:

$$T_{hpl} - T_{Xpl} = -\frac{3}{4}\,\frac{X}{M_1 R T_k}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{vT} \cdot \sqrt[3]{\frac{M_1 g H}{v_k\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_T}} \cdot \left(\frac{dT_{xpl}}{dx}\right),$$

et pour T_{bpl} la même formule mais avec le signe contraire.

Si nous introduisons la loi des états correspondants, comme aux chapp. 7 et 8, cette formule peut s'écrire:

$$T_{hpl} - T_{Xpl} = -\frac{3}{4}\,X\left\{\beta - \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right)\right\} \cdot \left(\frac{dT_{xpl}}{dx}\right) \sqrt[3]{\frac{M_1 g H}{p_k v_k C_4{}^3\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}^3}\right)}}, \qquad (3)$$

où l'on pourrait encore remplacer $\left(\frac{dT_{xpl}}{dx}\right)$ par la formule ($4a$), qui a été donnée au chapitre 7.

4. Pour comparer la formule (3) avec les observations rapportées au § 2, j'ai supposé que, dans le domaine des points de plissement, la loi des états correspondants était applicable en première approximation; pour α et β j'ai introduit d'ailleurs les valeurs qui ont été déduites des observations relatives aux points de plissement (chap. 7, § 6).

Pour $\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}^3}\right)$ j'ai admis la valeur $-5{,}3$, que M. VERSCHAFFELT a calculée [1]) en partant des développements en série de M. KAMERLINGH ONNES; avec $C_4 = 3{,}45$ [2]), cela donne $C_4^{\,3}\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}^3}\right) = -218$. Introduisant en outre $H = 5{,}8$ cm., et la densité critique de l'anhydride carbonique, telle que je l'ai déduite de mes propres observations (chap. 4), savoir $\frac{M_1}{v_k} = 0{,}143$, et supposant d'ailleurs que la formule (3) soit encore applicable pour $x = 0{,}1047$, je trouve:

$$T_{hpl} - T_{bpl} = 0{,}23^\circ.$$

L'accord avec la valeur trouvée au § 2 (0,15° à 0,31°) est meilleur que l'on ne serait en droit de s'y attendre, eu égard aux hypothèses que nous avons faites. Puisque nous trouvons pour le deuxième mélange une différence de 1,20°, nous voyons que pour cette valeur de x les termes en x^2, et peut-être de degré plus élevé encore, ont déjà une influence prépondérante.

---

[1]) *Versl. Kon. Akad.*, mai 1903, p. 76; *Comm. phys. lab. Leiden*, suppl. n°. 6. Voir plus loin, au chap. VII des contributions à la connaissance de la surface ψ de VAN DER WAALS.

[2]) Voir chap. 4, p. 66.

SUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE D'ÉQUATIONS

DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES DU SECOND ORDRE

PAR

W. KAPTEYN.

1. On sait que l'équation différentielle de LEGENDRE:

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}-2z\frac{dy}{dz}+n(n+1)y=0, \tag{1}$$

où n représente un nombre entier et positif, est satisfaite par un polynome $P_n(z)$ du n^e degré, et par une fonction $Q_n(z)$ qui peut s'écrire:

$$Q_n(z)=R_n(z)-P_n(z)\,log\frac{z-1}{z+1}, \tag{2}$$

où

$$R_n=-2\left[\frac{2n-1}{1.n}P_{n-1}+\frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}+\frac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5}+\text{etc.}\right].$$

Cette fonction $Q_n(z)$, la fonction sphérique de deuxième espèce, peut encore s'écrire

$$Q_n(z)=\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{z-x}dx. \tag{3}$$

Pourtant, les formes (2) et (3) ne sont pas tout à fait équivalentes. En effet, la dernière forme détermine une fonction qui n'a de signification qu'aussi longtemps que z n'est pas un nombre réel compris entre -1 et $+1$. La droite qui joint ces deux points est donc une ligne de discontinuité. Pour savoir comment se comporte la fonction au voisinage de cette ligne de discontinuité, nous déterminerons

$$\Delta=Q_n(a+i\varepsilon)-Q_n(a-i\varepsilon),$$

où a est l'abscisse d'un point quelconque de la droite qui va de -1 à $+1$, et ε une petite valeur positive, afin d'examiner ensuite ce que devient Δ à la limite, quand ε tend vers zéro.

On a d'abord:

$$\Delta = \int_{-1}^{1} P_n(x) \left[\frac{1}{a + i\varepsilon - x} - \frac{1}{a - i\varepsilon - x} \right] dx$$

$$= -2i\varepsilon \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)\,dx}{(x-a)^2 + \varepsilon^2}.$$

Or, soit h une constante positive plus petite que $1 - a$ et plus petite aussi que $1 + a$; alors

$$\Delta = -2i\varepsilon \int_{-1}^{a-h} \frac{P_n(x)\,dx}{(x-a)^2 + \varepsilon^2} - 2i\varepsilon \int_{a-h}^{a+h} \frac{P_n(x)\,dx}{(x-a)^2 + \varepsilon^2} + 2i\varepsilon \int_{a+h}^{1} \frac{P_n(x)\,dx}{(x-a)^2 + \varepsilon^2}.$$

Supposons maintenant que ε devienne infiniment petit; la première et la dernière des intégrales disparaîtront, de sorte que

$$\lim \Delta = \lim_{\varepsilon = 0} \left\{ -2i\varepsilon \int_{a-h}^{a+h} \frac{P_n(x)\,dx}{(x-a)^2 + \varepsilon^2} \right\}.$$

Si l'on admet que dans l'intervalle de $a - h$ à $a + h$

$$A < P_n(x) < B,$$

on a

$$A \int_{a-h}^{a+h} \frac{\varepsilon\,dx}{(x-a)^2 + \varepsilon^2} < \int_{a-h}^{a+h} \frac{\varepsilon P_n(x)\,dx}{(x-a)^2 + \varepsilon^2} < B \int_{a-h}^{a+h} \frac{\varepsilon\,dx}{(x-a)^2 + \varepsilon^2},$$

où

$$\int_{a-h}^{a+h} \frac{\varepsilon\,dx}{(x-a)^2 + \varepsilon^2} = arctg\,\frac{h}{\varepsilon} - arctg\left(-\frac{h}{\varepsilon}\right).$$

Et si h représente une valeur fixe et qu'on laisse tendre ε vers zéro, le second membre de cette équation devient égal à π, de sorte que

$$A\pi < lim \int_{a-h}^{a+h} \frac{\varepsilon P_n(x)\,dx}{(x-a)^2+\varepsilon^2} < B\pi.$$

En faisant tendre maintenant h vers zéro, on peut rapprocher A et B tant qu'on veut l'un de l'autre. En vertu de la continuité de $P_n(x)$ nous pouvons donc écrire

$$A = B = P_n(a),$$

de sorte que

$$\lim_{\varepsilon=0} \Delta = -2i\pi P_n(a). \tag{4}$$

Les valeurs que prend la fonction (3) de part et d'autre de la ligne de discontinuité, au voisinage du point $x = a$, diffèrent donc de $2i\pi P_n(a)$.

Pour faire comprendre maintenant la relation qui existe entre cette fonction et la fonction (2), je ferai remarquer que, si l'on convient que la variable z de la dernière fonction ne peut pas franchir la ligne de -1 à $+1$, c. à d. qu'on l'oblige à passer du point $a + i\varepsilon$ à $a - i\varepsilon$ suivant une courbe enveloppant le point $+1$ (ou -1), on arrive au même résultat. Au bout de ce trajet, en effet, ε étant infiniment petit, les fonctions $R_n(z)$, $P_n(z)$ et $log(z+1)$ reprennent la même valeur, tandis que $log(z-1)$ augmente de $-2i\pi$; de sorte que

$$\lim_{\varepsilon=0} Q_n(a - i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon=0} Q_n(a + i\varepsilon) + 2i\pi P_n(a).$$

2. Dans les pages suivantes je me propose d'examiner s'il y a encore d'autres équations différentielles de la forme

$$R(x)\frac{d^2y}{dx^2} + S(x)\frac{dy}{dx} + T(x)\,y = 0, \tag{5}$$

où $R(x)$, $S(x)$ et $T(x)$ représentent des polynomes, qui possèdent une propriété du même genre, notamment celle-ci que, si y_1 est une intégrale première, l'intégrale seconde peut s'écrire sous la forme:

$$y_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{y_1(z)\,dz}{x-z}; \tag{6}$$

je suppose évidemment que cette intégrale a une signification en dehors de la ligne de discontinuité.

3. Admettons tout d'abord que les polynomes R, S et T soient d'un degré quelconque et que α et β représentent des valeurs réelles. Il suit alors de (6) que

$$\frac{dy_2}{dx} = -\int_\alpha^\beta \frac{y_1(z)\,dz}{(x-z)^2} = -\left[\frac{y_1(z)}{x-z}\right]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \frac{y_1'(z)\,dz}{x-z},$$

ou

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{y_1(\beta)}{\beta - x} - \frac{y_1(\alpha)}{\alpha - x} + \int_\alpha^\beta \frac{y_1'(z)\,dz}{x-z}.$$

De la même façon on trouve

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = \frac{y_1(\beta)}{(x-\beta)^2} - \frac{y_1(\alpha)}{(x-\alpha)^2} - \frac{y_1'(\beta)}{x-\beta} + \frac{y_1'(\alpha)}{x-\alpha} + \int_\alpha^\beta \frac{y_1''(z)\,dz}{x-z}.$$

Posant maintenant

$$y_1(\alpha) = A \qquad y_1(\beta) = B$$
$$y_1'(\alpha) = A' \qquad y_1'(\beta) = B'$$

et

$$R(x) = R(z) + (x-z)\,R'(z) + \frac{(x-z)^2}{2\,!}\,R''(z) + \text{etc.}$$

$$S(x) = S(z) + (x-z)\,S'(z) + \frac{(x-z)^2}{2\,!}\,S''(z) + \text{etc.}$$

$$T(x) = T(z) + (x-z)\,T'(z) + \frac{(x-z)^2}{2\,!}\,T''(z) + \text{etc.}$$

il vient

$$R(x)\frac{d^2y_2}{dx^2} = R(x)\left[\frac{B}{(x-\beta)^2} - \frac{A}{(x-\alpha)^2} - \frac{B'}{x-\beta} + \frac{A'}{x-\alpha}\right] +$$
$$+ \int_\alpha^\beta y_1''(z)\,dz\left[\frac{R(z)}{x-z} + R'(z) + \frac{x-z}{2\,!}\,R''(z) + \ldots\right]$$

$$S(x)\frac{dy_2}{dx} = S(x)\left[\frac{A}{x-\alpha} - \frac{B}{x-\beta}\right] +$$

$$+ \int_\alpha^\beta y_1'(z)\,dz\left[\frac{S(z)}{x-z} + S'(z) + \frac{x-z}{2!}S''(z) + \ldots\right]$$

$$T(x)\,y_2 = \int_\alpha^\beta y_1(z)\,dz\left[\frac{T(z)}{x-z} + T'(z) + \frac{x-z}{2!}T''(z) + \ldots\right].$$

Si l'on additionne ces trois équations membre à membre, on trouve que la somme des premiers membres est nulle, parce que y_2 représente une intégrale particulière. En outre, dans le second membre, la somme

$$\int_\alpha^\beta \frac{R(z)\,y_1''(z) + S(z)\,y_1'(z) + T(z)\,y_1(z)}{x-z}\,dz$$

s'évanouit, parce que y_1 aussi est une intégrale particulière. On obtient donc l'équation:

$$0 = R(x)\left[\frac{B}{(x-\beta)^2} - \frac{A}{(x-\alpha)^2} - \frac{B'}{x-\beta} + \frac{A'}{x-\alpha}\right] + S(x)\left[\frac{A}{x-\alpha} - \frac{B}{x-\beta}\right] +$$

$$+ \int_\alpha^\beta y_1''(z)\,dz\left[R'(z) + \frac{x-z}{2!}R''(z) + \ldots\right] +$$

$$+ \int_\alpha^\beta y_1'(z)\,dz\left[S'(z) + \frac{x-z}{2!}S''(z) + \ldots\right] +$$

$$+ \int_\alpha^\beta y_1(z)\,dz\left[T'(z) + \frac{x-z}{2!}T''(z) + \ldots\right]. \qquad (7)$$

4. Il résulte de cette équation que les intégrales sont des polynomes en x; il faut donc que la première partie

$$I = R(x)\left[\frac{B}{(x-\beta)^2} - \frac{A}{(x-\alpha)^2} - \frac{B'}{x-\beta} + \frac{A'}{x-\alpha}\right] + S(x)\left[\frac{A}{x-\alpha} - \frac{B}{x-\beta}\right]$$

représente aussi un polynome. Cela exige que $R(x)$ et $S(x)$ satisfassent à certaines conditions. Pour les trouver, nous développerons l'expression ci-dessus dans le voisinage de $x = \alpha$ et $x = \beta$.

Dans le voisinage de $x = \alpha$ on trouve:

$$I = [R(\alpha) + (x-\alpha) R'(\alpha) + \ldots] \left[-\frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{A'}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\beta)^2} - \frac{B'}{x-\beta} + \ldots \right]$$
$$+ [S(\alpha) + (x-\alpha) S'(\alpha) + \ldots] \left[\frac{A}{x-\alpha} - \frac{B}{\alpha-\beta} + \ldots \right].$$

Comme cette expression ne peut pas contenir des puissances négatives de $(x - a)$, il faut que

$$-A\,R(\alpha) = 0$$
$$-A\,R'(\alpha) + A'\,R(\alpha) + A\,S(\alpha) = 0,$$

c. à d. que les polynomes $R(x)$ et $S(x)$ doivent satisfaire aux conditions

$$\left.\begin{aligned} R(\alpha) &= 0 \\ R'(\alpha) &= S(\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

En développant de même au voisinage de $x = \beta$, on trouve les conditions:

$$\left.\begin{aligned} R(\beta) &= 0 \\ R'(\beta) &= S(\beta). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Je suppose ici que A et B ne sont pas nuls; en effet, si l'on avait $A = 0$ et $A' = 0$, il suffirait d'avoir, dans le premier cas, $R(\alpha) = 0$.

Les conditions ainsi trouvées donnent:

$$\left.\begin{aligned} R(x) &= (x-\alpha)(x-\beta)\,r(x) \\ S(x) - R'(x) &= (x-\alpha)(x-\beta)\,h(x) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

où $r(x)$ et $h(x)$ représentent de nouveau des polynomes.

En introduisant la première de ces équations, la dernière devient

$$S(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\,[r'(x) + h(x)] + (2x - \alpha - \beta)\,r(x); \tag{11}$$

et, si l'on substitue maintenant ces valeurs dans I, on trouve

$$I = r(x)\left[\frac{B(x-\alpha)}{x-\beta} - \frac{A(x-\beta)}{x-\alpha} - B'(x-\alpha) + A'(x-\beta)\right] +$$
$$+ [r'(x) + h(x)][A(x-\beta) - B(x-\alpha)] +$$
$$+ r(x)\left[A - \frac{B(x-\alpha)}{x-\beta} + \frac{A(x-\beta)}{x-\alpha} - B\right].$$

Les puissances négatives disparaissent réellement, de sorte que

$$I = r(x)[(A' - B')x + \alpha B' - \beta A' + A - B] +$$
$$+ [r'(x) + h(x)][(A - B)x + \alpha B - \beta A]. \quad (12)$$

Afin d'ordonner cette expression par rapport à x, nous supposerons que les polynomes $R(x)$, $S(x)$ et $T(x)$ soient tous de même degré λ. Alors le degré des polynomes $r(x)$ et $h(x)$ est plus bas de deux unités; donc

$$r(x) = \sum_{p=0}^{\lambda-2} \rho_p x^p, \qquad h(x) = \sum_{p=0}^{\lambda-2} h_p x^p.$$

Il vient ainsi

$$r'(x) + h(x) = \sum_{p=0}^{\lambda=2} [h_p + (p+1)\rho_{p+1}] x^p,$$

où l'on doit évidemment poser $\rho_{\lambda-1} = 0$.

Soit maintenant

$$\left.\begin{array}{ll} A' - B' = M, & \alpha B' - \beta A' + A - B = N \\ A - B = m, & \alpha B - \beta A = n; \end{array}\right\} \quad (13)$$

alors

$$I = \sum_{p=0}^{\lambda-1} (\rho_p N + \rho_{p-1} M) x^p +$$
$$+ \sum_{p=0}^{\lambda-1} [\{h_p + (p+1)\rho_{p+1}\} n + \{h_{p-1} + p\rho_p\} m] x^p, \quad (14)$$

où de nouveau tous les coefficients qui n'existent pas, comme ρ_{-1}, $\rho_{\lambda-1}$, h_{-1}, $h_{\lambda-1}$, doivent être laissés de côté.

Si nous ordonnons également $R(x)$ et $S(x)$ par rapport à x, il vient

$$R(x) = \sum_{p=0}^{\lambda} [\alpha\beta\rho_p - (\alpha+\beta)\rho_{p-1} + \rho_{p-2}] x^p \quad (15)$$

et

$$S(x) = \sum_{p=0}^{\lambda} [\alpha\beta \{h_p + (p+1)\rho_{p+1}\} - (\alpha+\beta)(h_{p-1} + p\rho_p) +$$

$$+ h_{p-2} + (p-1)\rho_{p-1}] x^p + \sum_{p=0}^{\lambda-1} [-(\alpha+\beta)\rho_p + 2\rho_{p-1}] x^p; \qquad (16)$$

de sorte que, si l'on écrit

$$R(x) = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \ldots + r_\lambda x^\lambda$$
$$S(x) = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots + s_\lambda x^\lambda$$
$$T(x) = t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots + t_\lambda x^\lambda,$$

il est aisé d'exprimer au moyen de α, β et des coefficients ρ et h les valeurs des coefficients des deux premiers polynomes.

5. Examinons maintenant la somme des intégrales (7), que nous indiquerons par J. Posons à cet effet:

$$U(x,z) = R'(z) + \frac{x-z}{2!} R''(z) + \frac{(x-z)^2}{3!} R''(z) + \ldots + \frac{(x-z)^{\lambda-1}}{\lambda!} R^{(\lambda)}(z).$$

Si nous développons cette fonction suivant les puissances de z, il vient

$$U(x,z) = U(x,0) + z\,U'(x,0) + \frac{z^2}{2!} U''(x,0) + \ldots \frac{z^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} U^{\lambda-1}(x,0),$$

où les coefficients peuvent être déterminés de la manière suivante.

De

$$U(x,z) = \frac{R(x) - R(z)}{x - z}$$

il suit

$$U'(x,z) = \frac{R(x) - R(z)}{(x-z)^2} - \frac{R'(z)}{x-z}$$

$$U''(x,z) = 2\frac{R(x) - R(z)}{(x-z)^3} - 2\frac{R'(z)}{(x-z)^2} - \frac{R''(z)}{x-z};$$

etc.

donc

$$U(x,0) = \frac{R(x) - R(0)}{x}$$

$$U'(x,0) = \frac{R(x) - R(0)}{x^2} - \frac{R'(0)}{x}$$

$$U''(x,0) = 2\,\frac{R(x) - R(0)}{x^3} - 2\,\frac{R'(0)}{x^2} - \frac{R''(0)}{x}$$

etc.

Mais, comme

$$U(0,0) = R'(0), \quad U'(0,0) = \frac{R''(0)}{2} \text{ etc.},$$

on peut encore écrire

$$U(x,0) = \frac{R(x) - R(0)}{x}$$

$$U'(x,0) = \frac{U(x,0) - U(0,0)}{x}$$

$$U''(x,0) = 2!\,\frac{U'(x,0) - U'(0,0)}{x}$$

etc.

Il résulte clairement de là de quelle façon chaque coefficient peut être déduit du précédent. On trouve de cette manière

$$U(x,z) = \sum_{p=0}^{\lambda-1} (r_{p+1} + r_{p+2}x + \ldots + r_\lambda x^{\lambda-p-1})\, z^p.$$

En opérant de même avec

$$V(x,z) = S'(z) + \frac{x-z}{2!}\,S''(z) + \ldots + \frac{(x-z)^{\lambda-1}}{\lambda}\,S^{(\lambda)}(z)$$

et

$$W(x,z) = T'(z) + \frac{x-z}{2!}\,T''(z) + \ldots + \frac{(x-z)^{\lambda-1}}{\lambda!}\,T^{(\lambda)}(z),$$

et en posant, pour abréger,

$$G_p'' = \int_\alpha^\beta z^p y_1''(z)\,dz, \quad G_p' = \int_\alpha^\beta z^p y_1'(z)\,dz, \quad G_p = \int_\alpha^\beta z^p y_1(z)\,dz,$$

on trouve

$$J = \sum_{p=0}^{\lambda-1} (r_{p+1} + r_{p+2}\,x + \ldots + r_\lambda\,x^{\lambda-p-1})\,G_p'' +$$
$$+ \sum_{p=0}^{\lambda-1} (s_{p+1} + s_{p+2}\,x + \ldots + s_\lambda\,x^{\lambda-p-1})\,G_p' +$$
$$+ \sum_{p=0}^{\lambda-1} (t_{p+1} + t_{p+2}\,x + \ldots + t_\lambda\,x^{\lambda-p-1})\,G_p.$$

Il s'ensuit que

$$J = \sum_{p=0}^{\lambda-1} (r_{p+1}\,G_p'' + s_{p+1}\,G_p' + t_{p+1}\,G_p) +$$
$$+ x \sum_{p=0}^{\lambda-2} (r_{p+2}\,G_p'' + s_{p+2}\,G_p' + t_{p+2}\,G_p) +$$
$$+ x^2 \sum_{p=0}^{\lambda-3} (r_{p+3}\,G_p'' + s_{p+3}\,G_p' + t_{p+3}\,G_p) +$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad +$$
$$+ x^{\lambda-2} \sum_{p=0}^{1} (r_{p+\lambda-1}\,G_p'' + s_{p+\lambda-1}\,G_p' + t_{p+\lambda-1}\,G_p) +$$
$$+ x^{\lambda-1} \sum_{p=0} (r_{p+\lambda}\,G_p'' + s_{p+\lambda}\,G_p' + t_{p+\lambda}\,G_p). \quad (17)$$

On trouve donc les conditions cherchées en égalant à zéro la somme des coefficients des mêmes puissances de x, dans les expressions (14) et (19) pour I et J. Mais il importe d'exprimer encore les grandeurs M, N, m et n au moyen des intégrales G'', G' et G_0. On a notamment:

$$G_0'' = \int_\alpha^\beta y_1''(z)\,dz = B' - A'$$

$$G_1'' = \int_\alpha^\beta z y_1''(z)\,dz = \beta B' - \alpha A' + A - B$$

$$G_0' = \int_\alpha^\beta y_1'(z)\,dz = B - A$$

$$G_1' = \int_\alpha^\beta z y_1'(z)\,dz = \beta B - \alpha A - G_0\,;$$

donc

$$\left.\begin{aligned} M &= A' - B' = -G_0'' \\ N &= \alpha B' - \beta A' + A - B = (\alpha + \beta) G_0'' - G_1'' - 2 G_0' \\ m &= A - B = -G_0' \\ n &= \alpha B - \beta A = (\alpha + \beta) G_0' - G_1' - G_0. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

6. Après ces considérations générales nous allons examiner les cas les plus simples. Soit d'abord $\lambda = 2$. Les polynomes $r(x)$ et $h(x)$ sont alors de degré zéro, c. à d. que seuls les coefficients ρ_0 et h_0 existent. Il suit donc de (14) et (17):

$$\begin{aligned} I &= \rho_0 N + h_0 n + (\rho_0 M + h_0 m) x \\ J &= r_1 G_0'' + s_1 G_0' + t_1 G_0 + r_2 G_1'' + s_2 G_1' + t_2 G_1 + \\ &\quad + (r_2 G_0'' + s_2 G_0' + t_2 G_0) x, \end{aligned}$$

et il faut par conséquent que

$$\begin{aligned} &\rho_0 N + h_0 n + r_1 G_0'' + s_1 G_0' + t_1 G_0 + r_2 G_1'' + s_2 G_1' + t_2 G_1 = 0 \\ &\rho_0 M + h_0 m + r_2 G_0'' + s_2 G_0' + t_2 G_0 = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

où, en vertu de (15)

$$\begin{aligned} r_1 &= -(\alpha + \beta) \rho_0 \\ r_2 &= \rho_0 \\ s_1 &= -(\alpha + \beta) h_0 + 2 \rho_0 \\ s_2 &= h_0. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs et les valeurs (18) dans les deux équations (19), on trouve

$$\left.\begin{aligned} h_0 - t_1 &= 0 \\ t_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Si nous posons encore $\rho_0 = 1$, ce qui ne nuit pas à la généralité des considérations, nous arrivons à cette conclusion que l'équation différentielle

$$(x - \alpha)(x - \beta) \frac{d^2 y}{dx^2} + [t_1 (x - \alpha)(x - \beta) + \\ + 2x - \alpha - \beta] \frac{dy}{dx} + [h_0 + t_1 x] y = 0 \quad (21)$$

possède cette propriété, qu'entre les deux intégrales y_1 et y_2 existe la relation

$$y_2 = \int_\alpha^\beta \frac{y_1(z)\,dz}{x-z}.$$

7. Prenons comme exemple:

$$\alpha = 0, \quad t_0 = -(n+1)\beta, \quad t_1 = 1 \quad \text{et} \quad \beta = \infty.$$

L'équation devient

$$x(x-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} + [x(x-\beta) + 2x - \beta]\frac{dy}{dx} + [x-(n+1)\beta]\,y = 0$$

ou bien, après division par $x-\beta$, et posant $\beta = \infty$,

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (x+1)\frac{dy}{dx} + (n+1)\,y = 0.$$

Cette équation est satisfaite par

$$y_1 = e^{-x}\,\Phi_n(x),$$

où

$$\Phi_n(x) = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\frac{x^3}{2.3} + \ldots \pm \frac{x^n}{2.3\ldots n},$$

un polynome que l'on trouve déjà dans Abel, 2e éd., II, p. 284. L' intégrale seconde peut donc s'écrire

$$y_2 = \int_0^\infty \frac{e^{-z}\,\Phi_n(z)}{x-z}\,dz.$$

Il va de soi que cette fonction n'est pas déterminée sur la droite qui s'étend de 0 à ∞; les valeurs que prend cette fonction de part et d'autre de cette ligne sont différentes, ainsi que je l'ai déjà fait observer au § 1.

8. Lorsque $\lambda = 3$, les équations (14) et (17) donnent:

$$I = \rho_0 N + (h_0 + \rho_1) n + [\rho_1 N + \rho_0 M + h_1 n + (h_0 + \rho_1) m] x + \\ + [\rho_1 M + h_1 m] x^2$$

$$J = r_1 G_0'' + s_1 G_0' + t_1 G_0 + r_2 G_1'' + s_2 G_1' + t_2 G_1 + r_3 G_2'' + s_3 G_2' + t_3 G_2 \\ + [r_2 G_0'' + s_2 G_0' + t_2 G_0 + r_3 G_1'' + s_3 G_1' + t_3 G_1] x \\ + [r_3 G_0'' + s_3 G_0' + t_3 G_0] x^2,$$

où, suivant (15),

$$\begin{aligned} r_1 &= \alpha\beta\rho_1 - (\alpha+\beta)\rho_0 \\ r_2 &= -(\alpha+\beta)\rho_1 + \rho_0 \\ r_3 &= \rho_1 \\ s_0 &= \alpha\beta(h_0+\rho_1) - (\alpha+\beta)\rho_0 \\ s_1 &= \alpha\beta h_1 - (\alpha+\beta)(h_0+\rho_1) - (\alpha+\beta)\rho_1 + 2\rho_0 \\ s_2 &= -(\alpha+\beta) h_1 + (h_0+\rho_1) + 2\rho_1 \\ s_3 &= h_1. \end{aligned}$$

De $I + J = 0$ résultent donc trois équations. Mais les diverses intégrales G y sont liées par des relations. Pour les trouver, nous remarquerons que

$$\begin{aligned} G_0'' &= B' - A' \\ G_1'' &= \beta B' - \alpha A' + A - B \\ G_2'' &= \beta^2 B' - \alpha^2 A' + 2\alpha A + 2\beta B + 2 G_0 \\ G_0' &= B - A \\ G_1' &= \beta B - \alpha A - G_0 \\ G_2' &= \beta^2 B - \alpha^2 A - 2 G_1. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$A' = \frac{1}{\beta-\alpha}[G_1'' - \beta G_0'' + G_0'] \quad B' = \frac{1}{\beta-\alpha}[G_1'' - \alpha G_0'' + G_0']$$

$$A = \frac{1}{\beta-\alpha}[G_1' - \beta G_0' + G_0] \quad B = \frac{1}{\beta-\alpha}[G_1' - \alpha G_0' + G_0]$$

En substituant ces valeurs dans G''_2 et G'_2 il vient

$$\begin{aligned} G_2'' &= (\alpha+\beta)(G_1'' + G_0') - \alpha\beta G_0'' - 2 G_1' \\ G_2' &= (\alpha+\beta)(G_1' + G_0) - \alpha\beta G_0' - 2 G_1. \end{aligned}$$

Les 3 équations sont donc

$$\rho_0[(\alpha+\beta)G_0''-G_1''-2G_0']+(h_0+\rho_1)[(\alpha+\beta)G_0'-G_1'-G_0]$$
$$+[\alpha\beta\rho_1-(\alpha+\beta)\rho_0]G_0''+[\alpha\beta h_1-(\alpha+\beta)(h_0+\rho_1)$$
$$-(\alpha+\beta)\rho_1+2\rho_0]G_0'+t_1G_0+$$
$$+[-(\alpha+\beta)\rho_1+\rho_0]G_1''+[-(\alpha+\beta)h_1+(h_0+\rho_1)+2\rho_1]G_1'+t_2G_1+$$
$$+\rho_1G_2''+h_1G_2'+t_3G_2=0$$

$$\rho_1[(\alpha+\beta)G_0''-G_1''-2G_0']-\rho_0G_0''+$$
$$+h_1[(\alpha+\beta)G_0'-G_1'-G_0]-(h_0+\rho_1)G_0'+$$
$$+[-(\alpha+\beta)\rho_1+\rho_0]G_0''+[-(\alpha+\beta)h_1+(h_0+\rho_1)+2\rho_1]G_0'+t_2G_0+$$
$$+\rho_1G_1''+h_1G_1'+t_3G_1=0$$

$$-\rho_1G_0''-h_1G_0'+\rho_1G_0''+h_1G_0'+t_3G_0=0.$$

Après introduction des valeurs de G''_2 et G'_2, trouvées ci-dessus, elles deviennent

$$[(\alpha+\beta)h_1+t_1-h_0-\rho_1]G_0+[t_2-2h_1]G_1+t_3G_2=0$$
$$(t_2-h_1)G_0+t_3G_1=0$$
$$t_3G_0=0.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes sont donc

$$\left.\begin{aligned} t_3&=0\\ h_1&=t_2\\ [(\alpha+\beta)t_2+t_1-h_0-\rho_1]G_0-t_2G_1&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

Si, étant donnée une équation de la forme

$$(x-\alpha)(x-\beta)(\rho_1x+\rho_0)\frac{d^2y}{dx^2}+$$
$$+(s_3x^3+s_2x^2+s_1x+s_0)\frac{dy}{dx}+(t_2x^2+t_1x+t_0)y=0,$$

on veut examiner si elle satisfait à ces conditions, il importe d'introduire les coefficients s dans ces conditions.

Si l'on tire donc des relations

$$s_3=h_1$$
$$s_2=-(\alpha+\beta)h_1+h_0+3\rho_1$$
$$s_1=\alpha\beta h_1-(\alpha+\beta)(h_0+2\rho_1)+2\rho_0$$
$$s_0=\alpha\beta(h_0+\rho_1)-(\alpha+\beta)\rho_0$$

les grandeurs

$$h_1 = s_3$$
$$h_0 = s_2 + (\alpha + \beta)\, s_3 - 3\,\rho_1\,,$$

les deux autres donnent

$$s_1 + (\alpha + \beta)\, s_2 + (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)\, s_3 = 2\,\rho_0 + (\alpha + \beta)\,\rho_1$$
$$s_0 - \alpha\beta\, s_2 - \alpha\beta(\alpha + \beta)\, s_3 = -(\alpha + \beta)\,\rho_0 - 2\,\alpha\beta\,\rho_1\,.$$

Pour que l'équation satisfasse à ces conditions, il faut encore

$$s_3 = t_2$$
$$(t_1 - s_2 + 2\,\rho_1)\, G_0 - t_2\, G_1 = 0.$$

Indépendamment de la valeur des intégrales G_0 et G_1, on peut satisfaire aux conditions (22) en posant

$$t_3 = t_2 = h_1 = 0 \quad \text{et} \quad h_0 = t_1 - \rho_1.$$

Il résulte de là que l'équation

$$(x - \alpha)(x - \beta)(\rho_1 x + \rho_0)\frac{d^2y}{dx^2} + [t_1 (x - \alpha)(x - \beta) +$$
$$+ (2\,x - \alpha - \beta)(\rho_1 x + \rho_0)]\frac{dy}{dx} + (t_0 + t_1 x)\, y = 0 \qquad (23)$$

possède la propriété demandée.

9. Si l'on pose $\lambda = 4$, on trouve de même les conditions

$$\left.\begin{array}{l} t_4 = 0 \\ h_2 = t_3 \\ [(\alpha + \beta)\, t_3 + t_2 - h_1 - 2\,\rho_2]\, G_0 - t_3\, G_1 = 0 \\ [(\alpha + \beta)(\rho_2 + h_1) - \alpha\beta\, t_3 + t_1 - h_0 - \rho_1]\, G_0 + \\ \qquad + [2\,(\alpha + \beta)\, t_3 - 2\,(\rho_2 + h_1) + t_2]\, G_1 - 2\, t_3\, G_2 = 0. \end{array}\right\} \qquad (24)$$

Si l'équation est donnée sous la forme

$$(x - \alpha)(x - \beta)(\rho_2 x^2 + \rho_1 x + \rho_0)\frac{d^2y}{dx^2} +$$
$$+ (s_4 x^4 + s_3 x^3 + s_2 x^2 + s_1 x + s_0)\frac{dy}{dx} + (t_3 x^3 + t_2 x^2 + t_1 x + t_0)\, y = 0,$$

il résulte des relations

$$
\begin{aligned}
s_4 &= h_2 \\
s_3 &= h_1 + 2\rho_2 - (\alpha+\beta)\, h_2 + 2\,\rho_2 \\
s_2 &= h_0 + \rho_1 - (\alpha+\beta)\,(h_1 + 2\,\rho_2) + \alpha\beta\, h_2 + 2\,\rho_1 - (\alpha+\beta)\,\rho_0 \\
s_1 &= -(\alpha+\beta)\,(h_0 + \rho_1) + \alpha\beta\,(h_1 + 2\,\rho_2) - (\alpha+\beta)\,\rho_1 + 2\,\rho_0 \\
s_0 &= \alpha\beta\,(h_0 + \rho_1) - (\alpha+\beta)\,\rho_0
\end{aligned}
$$

en premier lieu

$$
\begin{aligned}
h_2 &= s_4 \\
h_1 &= s_3 + (\alpha+\beta)\, s_4 - 4\,\rho_2 \\
h_0 &= s_2 + (\alpha+\beta)\, s_3 + (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)\, s_4 - 2\,(\alpha+\beta)\,\rho_2 - 3\rho_1 + (\alpha+\beta)\rho_0,
\end{aligned}
$$

puis

$$
\left.
\begin{aligned}
&s_1 + (\alpha+\beta)\, s_2 + (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)\, s_3 + (\alpha+\beta)\,(\alpha^2+\beta^2)\, s_4 = \\
&\qquad = 2\,(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)\,\rho_2 + (\alpha+\beta)\,\rho_1 + [2 - (\alpha+\beta)^2]\,\rho_0 \\
&s_0 - \alpha\beta\, s_2 - \alpha\beta\,(\alpha+\beta)\, s_3 - \alpha\beta\,(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)\, s_4 = \\
&\qquad = -2\,\alpha\beta\,(\alpha+\beta)\,\rho_2 - 2\,\alpha\beta\,\rho_1 + (\alpha\beta - 1)\,(\alpha+\beta)\,\rho_0.
\end{aligned}
\right\} \quad (25)
$$

Pour que l'équation donnée satisfasse à ces deux conditions, il faut encore

$$
\left.
\begin{aligned}
s_4 &= t_3 \\
(t_2 - s_3 + 2\rho_2)\, G_0 - t_3\, G_1 &= 0 \\
[t_1 - s_2 - (\alpha+\beta)\,(\rho_2 + \rho_0) + 2\,\rho_1]\, G_0 &+ \\
+ (t_2 - 2\,s_3 + 6\,\rho_2)\, G_1 - 2\, t_3\, G_2 &= 0.
\end{aligned}
\right\} \quad (26)
$$

Soit, par exemple,

$$
(x^2 - 1)\,(17\,x^2 + 21\,x + 12)\,\frac{d^2y}{dx^2} + \\
+ (21\,x^2 + 58\,x + 21)\,\frac{dy}{dx} - (34\,x^2 + 33\,x + 3)\,y = 0
$$

l'équation différentielle donnée; alors

$$
\alpha = -1, \quad \beta = 1, \quad \rho_2 = 17, \quad \rho_1 = 21, \quad \rho_0 = 12, \quad s_4 = s_3 = 0, \\
s_2 = 21, \quad s_1 = 58, \quad s_0 = 21, \quad t_4 = t_3 = 0, \quad t_2 = -34, \\
t_1 = -33, \quad t_0 = -3.
$$

Il est donc satisfait aux conditions (25), ainsi qu'à la première condition (26). Les autres conditions exigent la connaissance des intégrales

G_0 et G_1. Pour y arriver, nous remarquerons que l'on satisfait à l'équation donnée au moyen du polynome

$$y_1 = 2x^2 + 3x + 5;$$

de sorte que

$$G_0 = \int_{-1}^{1} (2z^2 + 3z + 5)\,dz = \frac{34}{3}$$

$$G_1 = \int_{-1}^{1} z(2z^2 + 3z + 5)\,dz = 2,$$

et par là les conditions (26) sont remplies. Nous pouvons donc conclure que l'intégrale seconde de l'équation donnée peut s'écrire

$$y_2 = \int_{-1}^{1} \frac{2z^2 + 3z + 5}{x - z}\,dz,$$

une fonction qui est parfaitement déterminée pour toutes les valeurs de x, sauf pour celles qui sont situées sur l'axe réel, entre -1 et $+1$.

Ici aussi on peut satisfaire aux conditions (24), indépendamment des valeurs des intégrales G_0, G_1 et G_2, en choisissant

$$t_4 = t_3 = s_4 = h_1 = h_2 = 0$$
$$t_2 = 2\rho_2$$
$$h_0 = (\alpha + \beta)\rho_2 + t_1 - \rho_1.$$

L'équation prend alors la forme

$$(x - \alpha)(x - \beta)(\rho_2 x^2 + \rho_1 x + \rho_0)\frac{d^2y}{dx^2} +$$
$$+ [(x - \alpha)(x - \beta)\{2\rho_2 x + (\alpha + \beta)\rho_2 + t_1\} +$$
$$+ (2x - \alpha - \beta)(\rho_2 x^2 + \rho_1 x + \rho_0)]\frac{dy}{dx} + (2\rho_2 x^2 + t_1 x + t_0)y = 0.$$

SUR LE SPECTRE DES ÉTOILES

PAR

A. PANNEKOEK.

I.

Les intensités lumineuses d'étoiles de divers types spectraux.

1. L'examen des spectres des étoiles a appris que, à quelques exceptions près, ces spectres peuvent être groupés en une série continue. De là cette opinion, généralement admise, que ces divers spectres représentent divers degrés d'évolution, par lesquels chaque étoile passe successivement. La classification de M. Vogel, qui groupe les étoiles en trois types, est considérée comme un système naturel; l'un de ces types représente l'état le plus jeune, le plus chaud; le second type caractérise un état plus avancé du développement stellaire, et le dernier est l'état le plus fortement refroidi. Mais les subdivisions de ces types ne sont pas aussi naturelles; l'apparence différente des raies, sur laquelle on se base pour établir cette subdivision, ne répond pas à des degrés divers de l'évolution en question. Bien plus artificielle encore est la classification par lettres, admise par M. Pickering dans son Draper Catalogue; elle s'impose par la nécessité pratique de classer les milliers de spectres stellaires observés au moyen de l'objectif à prisme. Après avoir éliminé les influences que pouvait avoir sur cette classification une netteté insuffisante des spectres, par suite d'une dispersion ou d'une clarté trop faibles, on retrouve cependant la relation naturelle des spectres, et alors ce mode de classification a, sur celui de Vogel, l'avantage réel de présenter une subdivision du 2^{d} type. Voici quels sont les groupes naturels que l'on peut distinguer: classe *A*, la majorité des étoiles blanches (type Sirius; I*a* chez Vogel); classe *B*, un

nombre assez restreint d'étoiles, nommées quelquefois type Orion, qui se distinguent des premières par la présence, dans leur spectre, des raies de l'hélium (I *b* de Vogel). Dans la série continue, les dernières étoiles devraient être placées avant les premières, une raison pour laquelle on les appelle parfois des étoiles du type 0. La classe *F* constitue le passage au deuxième type (Procyon); la classe *G* est le type auquel appartiennent le soleil et Capella (les étoiles *E* en sont les représentants peu nets); la classe *K* comprend les étoiles rouges du 2^d^ type, se rapprochant du troisième, comme Arcturus (M. Pickering y rattache les groupes *H* et *I*, comme représentants peu nets). Dans le Draper Catalogue le 3me type est nommé *M*.

La continuité des spectres stellaires résulte encore plus clairement de la division proposée par Miss A. Maury (*Annals Harv. Coll. Obs.*, t. 28). Dans son système, la majorité des spectres stellaires est groupée en 20 classes, passant les unes dans les autres, et entre lesquelles l'auteur admet encore des transitions. Les classes I à IV sont les étoiles du type Orion; les classes VI à VIII correspondent au premier type; les classes IX à XI constituent le passage au 2^d^ type; XIII et XIV sont le 2^d^ type pur, comme le soleil; XV répond aux étoiles rouges dans le genre d'Arcturus, enfin XVII à XX forment le troisième type. Si l'on songe que de la classe I à la classe III il disparaît un groupe de raies, savoir les raies de l'hydrogène des autres séries, qui sont caractéristiques pour les étoiles de Wolf-Rayet, ce que l'on appelle le 5e type (II *b* de Vogel), il est tout naturel de placer ces étoiles en avant de la série, comme l'a fait Miss Cannon, dans son examen des spectres des étoiles méridionales [1]) (*H. C. O. Ann.*, t. 28),

[1]) D'après les resultats obtenus par M. Campbell (Astronomy and Astrophysics, XIII, p. 448), les raies caractéristiques des étoiles de Wolf-Rayet peuvent être partagées en deux groupes; d'après l'intensité relative de ces deux groupes ces étoiles peuvent être classées en une série continue. Le premier groupe est formé par la première série accessoire et la première raie de la série principale de l'hydrogène: $H\beta'$ 5414, $H\gamma'$ 4542, $H\delta'$ 4201, raie principale 4686; c'est ce groupe qui figure comme raies sombres et qui disparaît dans les classes I à III de Maury, tandis que de l'autre côté (classes 0*e* à 0*b* de Cannon), il se transforme de plus en plus en raies d'émission, en même temps que les raies *H* ordinaires. L'autre groupe qui, à partir de cette classe, devient de plus en plus éclatant par rapport aux raies de l'hydrogène, se compose de larges bandes, d'origine inconnue, dont les milieux correspondent aux longueurs d'onde 5807, 5692, 5594, 5470, 4654 et 4443, d'après les

Pour une partie de ces étoiles l'intensité relative des raies métalliques s'écarte de celle des autres; MM. VOGEL et SCHEINER en avaient déjà fait la remarque pour α Cygni et α Persei (*Public. Potsdam*, t. 7, 2e partie). Miss MAURY trouva des représentants de ce groupe dans presque toutes les classes de III à XIII; elle en fit une série parallèle, indiquée par III c — XIII c, tandis qu'elle indiqua par a la série formée par la masse principale des étoiles.

L'opinion la plus généralement admise, c'est qu'une étoile parcourt successivement, et d'une façon continue, ces divers états de développement. Elle commence par être une masse gazeuse excessivement raréfiée, dont la température s'élève par contraction jusqu'à atteindre un maximum, après quoi elle se refroidit tout en se contractant davantage. Avant d'atteindre la température maxima, l'étoile présente un maximum d'intensité lumineuse; au-delà du maximum de température, les deux causes réunies, abaissement de température et diminution de volume, font que l'intensité lumineuse décroît rapidement. Il est assez bien établi, vu leur couleur plus blanche, que les étoiles du 1er type sont plus chaudes que celles du second, mais on ne sait pas au juste si elles présentent le maximum de température ou si ce maximum se rencontre dans les étoiles du genre Orion.

Cette transformation d'une masse gazeuse peu dense en un corps dense et froid, où la température s'élève d'abord pour diminuer ensuite, est d'accord avec les lois physiques. Mais la correspondance des divers types spectraux avec les diverses phases de ce développement n'est qu'une hypothèse, une conjecture plus ou moins probable; car on n'a jamais observé le passage d'une étoile de l'un des types à un autre. Mais cette supposition peut être mise indirectement à l'épreuve par un examen de l'intensité lumineuse des étoiles. D'après l'esquisse que nous venons de donner de l'évolution d'une étoile, son intensité lumineuse doit augmenter d'abord et diminuer ensuite; l'éclat apparent moyen des étoiles, réduit à une même distance de notre système solaire, doit donc varier avec la classe spectrale, en ce sens qu'il doit atteindre un maximum là où l'intensité lumineuse est la plus grande, et diminuer dans les états de développement suivants.

---

mesures de Miss CANNON sur γ Velorum. La bande la plus lumineuse est 4654; son intensité relative par rapport à la raie de l'hydrogène 4689 augmente continuellement dans la série des étoiles 4, 47, 5, 48, 42 (nos de M. CAMPBELL).

2. Dans un pareil examen, l'emploi de parallaxes directement mesurées pour l'évaluation des distances est exclu, parce que le nombre des parallaxes ainsi déterminées est trop restreint. Mieux vaut se servir du mouvement propre des étoiles, en partant de cette hypothèse, que la vitesse linéaire vraie est la même pour des classes spectrales différentes. Cette méthode a été appliquée par M. W. H. S. Monck [1]), en 1892, sur les étoiles de Bradley dans le Draper Catalogue. Il trouva que le mouvement propre était le plus faible pour les étoiles de Bradley, puis venaient ceux des étoiles *A*; bien plus grand est le mouvement propre moyen des étoiles *F* [2]), qui dépasse même notablement celui des étoiles *G*, *H* et *K*, ainsi que des étoiles *M*. Il en conclut que ces étoiles *F* (les étoiles du 2e type les plus voisines du 1er) sont les plus rapprochées de nous, et ont par conséquent un pouvoir émissif moindre que les étoiles plus jeunes et plus rouges du second type. „Researches on binary stars seem to establish that this is not due to smaller average mass and it would therefore appear, that these stars are of the dullest or least light-giving class — more so not only than the Arcturian stars but than those of the type of Antares or Betelgeux" (p. 878). Ce résultat est en désaccord avec l'idée généralement admise, que les étoiles *F* donnent, par contraction et refroidissement, successivement naissance aux étoiles *G*, *K* et *M*.

Ce résultat est néanmoins confirmé par une étude récente de M. Ejnar Hertzsprung: Zur Strahlung der Sterne [3]), qui suit la classification des spectres de Maury. Comme grandeurs moyennes des étoiles, réduites à un mouvement propre de 0″,01, il trouve les valeurs du tableau ci-dessous, qui contient en outre les mouvements propres correspondant à une grandeur 4,0.

D'après ce tableau, le m. p., réduit à la grandeur 4,0, est le plus grand, donc l'éclat le plus faible, pour les classes XII et XIII, qui constituent le passage des formes *F* à *G*; pour les états de développement suivants l'éclat augmente de nouveau.

---

[1]) Astronomy and Astrophysics, XI, 874.

[2]) Il leur donne à tort le nom de „Capellan stars", parce que Capella est indiquée par *F* dans le Dr. Cat., bien qu'elle appartienne a vrai dire au type du soleil et des étoiles *G*.

[3]) *Zeitschr. f. wissensch. Photogr.*, III, 429.

Spectre		Grand. pour	M. P. pour
Maury	Draper C.	M. P. 0″01	Grand. 4,0
II—IV	B	4,37	0″,012
V—VI	B—A	7,25	0 ,045
VII—VIII	A	8,05	0 ,065
IX—XI	F	9,06	0 ,103
XII—XIII	F—G	11,23	0 ,279
XIII—XIV [1])	G	7,93	0 ,061
XV	K	9,38	0 ,119
XV—XVI	K—M	7,77	0 ,057
XVII—XVIII	M	8,28	0 ,072

3. Une mesure de la moyenne distance d'un groupe d'étoiles, bien meilleure que le m. p., est fournie par le déplacement parallactique. La publication du n°. 9 des *Publications of the astronomical Laboratory at Groningen*, où ont été calculées pour toutes les étoiles de Bradley les composantes τ et v du m. p., ainsi que les autres grandeurs auxiliaires, a permis de faire aisément cet examen. Si τ et v sont les composantes du m. p., l'une perpendiculaire à la direction vers l'antapex et l'autre dans cette direction, et si λ est la distance sphérique de l'étoile à l'apex, le déplacement parallactique d'un groupe d'étoiles, c. à d. la vitesse du système solaire divisée par la moyenne distance du groupe, est

$$q = \frac{\Sigma\, v \sin \lambda}{\Sigma \sin^2 \lambda}.$$

Pour une distribution sans ordre des directions, la moyenne $\frac{1}{n} \Sigma \tau$ des autres composantes est égale à la moitié de la vitesse linéaire moyenne, divisée par la distance.

La moyenne grandeur des divers groupes n'est pas la même. Or,

[1]) Des chiffres romains imprimés en italique indiquent, chez Maury, la transition à une classe suivante de numéro d'ordre plus élevé.

comme il s'agit ici de tirer des conclusions relatives à l'intensité lumineuse, et que la grandeur aussi bien que le m. p. dépendent de la distance, le calcul a été repris après réduction à la grandeur 4,0; cela veut dire que chaque étoile a été remplacée par une autre, ayant exactement la même vitesse et la même intensité lumineuse que l'étoile réelle, mais placée à une distance telle que la grandeur apparente fût 4,0. Si nous représentons par

$$p = 10^{0,2(m-4)}$$

le rapport dans lequel le m. p. est par là augmenté, il vient

$$q_{4,0} = \frac{\Sigma\, pv \sin\lambda}{\Sigma \sin^2\lambda} \quad \text{et} \quad \tau_{4,0} = \frac{\Sigma\, p\tau}{n}.$$

Dans ce calcul j'ai pris comme base la classification de MAURY. J'ai exclu du calcul 61 Cygni, parce que cette étoile tombe bien en dehors de la mesure de toutes les autres; et à la place du groupe de la Grande Ourse ($\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\zeta$) je n'ai pris que la seule étoile ε. Le tableau ci-dessous contient les résultats des deux calculs.

Spectre		Etoile type	n	m moy.	τ moy.	q	$\tau_{4,0}$	$q_{4,0}$
MAURY	Dr. Cat.							
I—III	B	ε Orionis	33	3,57	0",007	0",018	0",007	0",013[5]
IV—V	B—A	γ Orionis	48	4,31	0 ,011	0 ,035	0 ,014	0 ,036
VI—VIII	A	Sirius	93	3,92	0 ,040	0 ,054	0 ,038	0 ,061
IX—XII	F	Procyon	94	4,14	0 ,089	0 ,153	0 ,095	0 ,136
XIII—XIV	G	Capella	69	4,08	0 ,141	0 ,157	0 ,160	0 ,199
XV	K	Arcturus	101	3,90	0 ,126	0 ,119	0 ,120	0 ,096
XVI—XX	M	Betelgeuze	61	3,85	0 ,049	0 ,068	0 ,050	0 ,061

Dans les deux séries de résultats, le phénomène remarqué par MM. MONCK et HERTZSPRUNG est très apparent. Je n'ai toutefois pas fait directement usage des nombres $\tau_{4,0}$ et $q_{4,0}$; je les ai d'abord modifiés, parce qu'à la fin de mes calculs je pris connaissance d'une remarque de M. HERTZSPRUNG, d'après laquelle les étoiles c (voir ci-dessus) se

comportent d'une façon particulière. Leurs m. p. et leurs parallaxes sont à ce point plus petits que les mêmes éléments des étoiles *a* des mêmes classes, qu'on doit les considérer comme une groupe tout à fait à part, à intensité lumineuse beaucoup plus grande et beaucoup plus éloigné de nous [1]). Le calcul a donc été refait après omission des étoiles *c* et *ac*.

Les résultats en sont donnés dans le tableau ci-contre, séparément pour toutes les classes de Maury; la classe XV a été subdivisée en trois: XV *A* sont les étoiles qui correspondent à α Bootis, XV *C* celles qui sont du même genre que α Cassiopeiae, tandis que j'ai réuni dans XV *B* toutes les autres, qui ne pouvaient être classées avec certitude dans l'un ou l'autre groupe.

Les valeurs de $\tau_{4,0}$ et $q_{4,0}$ diffèrent fort peu de celles du tableau précédent. En prenant pour la vitesse du système solaire la valeur de 4,2 distances solaires, j'obtins les parallaxes moyennes des étoiles de diverses classes spectrales, pour une grandeur 4,0, en divisant les q par 4,2. Inversement, on déduit de ces q l'intensité lumineuse relative de ces types d'étoiles; j'ai pris comme telle le nombre qui exprime combien de fois la clarté est égale à celle pour la grandeur 4,0, l'étoile étant placée à une distance telle que $q = 0'',10$, c. à d. telle qu'elle ait la parallaxe $0'',024$. Enfin la dernière colonne $2\tau q$ contient le rapport entre la vitesse linéaire moyenne du groupe d'étoiles considéré et la vitesse de notre système solaire.

Ces valeurs sont réunies, comme tantôt, dans le tableau de la page 135.

---

[1]) En composant ses parallaxes, M. Hertzsprung se demande si par hasard la belle étoile méridionale α Carinae (Canopus) appartiendrait aussi aux étoiles *c*; en dehors d'une parallaxe si petite qu'il est impossible de la mesurer, et d'un très petit m. p., il n'a cependant aucune raison de le supposer. Dans les classification des spectres des étoiles méridionales, Miss Cannon n'a pas fait attention à la différence entre les etoiles *a* et *c*. Pourtant la question de M. Hertzsprung peut être résolue dans l'affirmative; sur les deux spectrogrammes de cette étoile, que l'on trouve dans l'ouvrage de Miss Cannon, on voit très nettement la raie 4053,8, qui fait défaut dans ceux de Sirius et de Capella, et qui est une raie typique pour les étoiles *c*. Il s'ensuit que α Carinae est réellement une étoile *c*.

Classe	n	$\tau_{4,0}$	$q_{4,0}$	$2\tau/q$
I	5	0″,009	0″,022	0,8
II	13	005	009	1,1
III	14	006	015	0,8
IV	18	014	023	1,2
IV	16	016	044	0,7
V	11	009	042	0,4
VI	16	030	068	0,9
VII	30	040	086	0,9
VIII	41	043	055	1,6
IX	25	050	064	1,6
X	16	070	171	0,8
XI	22	103	061	3,3
XII	23	170	282	1,2
XIII	18	297	346	1,7
XIV	21	192	305	1,3
XIV	20	077	025	6,2
XV *A*	26	234	148	3,2
XV *B*	35	105	070	3,0
XV *C*	40	059	087	1,4
XVI	19	049	071	1,4
XVII	19	049	032	3,1
XVIII	16	050	075	1,3
XIX—XX	7	057	078	1,5

Spectre		Etoile type	n	$\tau_{4,0}$	$q_{4,0}$	$\pi_{4,0}$	L pour $q=0''10$	$2\tau/q$
Maury	Dr. Cat.							
I—III	B	ε Orionis	32	0″,005[5]	0″,014	0″,0033	51	0,8
IV—V	B—A	γ Orionis	45	0,013	0,036	0,0086	7,7	0,7
VI—VIII	A	Sirius	87	0,040	0,063	0,015	2,5	1,3
IX—XII	F	Procyon	86	0,101	0,141	0,034	0,50	1,4
XIII—XIV	G	Capella	59	0,182	0,224	0,053	0,20	1,6
XV	K	Arcturus	101	0,120	0,096	0,023	1,1	2,5
XVI—XX	M	Betelgeuze	61	0,050	0,061	0,015	2,7	1,6

4. Voici quelles conclusions on peut tirer de ce tableau. Les nombres de la dernière colonne ne sont pas les mêmes, mais présentent une certaine allure. *La vitesse linéaire moyenne n'est donc pas la même pour toutes les espèces d'étoiles, mais elle augmente à mesure que l'on va, dans la série spectrale, vers des états de développement plus avancés.* (Si l'abaissement pour le 3ᵉ type, classe M, est réel, c'est là une question que nous laisserons indécise pour le moment). On savait déjà que la vitesse linéaire des étoiles du genre d'Orion était petite; cela est prouvé d'ailleurs par les vitesses radiales. Tandis que M. Campbell trouva 19,9 km. pour la vitesse du système solaire, et 34 km. pour la vitesse moyenne de toutes les étoiles, MM. Frost et Adams déduisirent de leurs mesures de vitesses radiales, relatives à 20 étoiles du type d'Orion, après correction pour le mouvement propre du soleil, une vitesse linéaire moyenne de 7,0 km. [1]); il résulte de là une vitesse moyenne vraie dans l'espace de 14 km., d'où la valeur 0,7 pour le rapport $2\,\tau/q$. Les étoiles du genre d'Orion sont donc particulièrement lentes, et celles du genre d'Arcturus (classe XV) sont les plus rapides.

5. Si nous considérons maintenant les valeurs de $q_{4,0}$, ou bien celles de $\pi_{4,0}$ et $L_{0,10}$ qui s'en déduisent, nous trouvons que plus nous avançons dans la série des états de développement, à partir des étoiles les moins avancées, comme Orion, jusqu'à celles du type G, comme Capella

[1]) *Publ. Yerkes Obs*, vol. II, p. 105.

et le soleil, plus l'intensité lumineuse diminue. On savait déjà que, dans l'ensemble, la valeur de q est plus grande pour le second type que pour le premier (y-compris les étoiles du type Orion); M. KAPTEYN a déduit dans le temps de tous les matériaux rassemblés par BRADLEY et DRAPER qu'en moyenne les étoiles du 2d type (FGK) sont 2,7 fois plus rapprochées que les étoiles du 1er (A et B), et ont par conséquent une intensité lumineuse 7 fois plus petite. Ce résultat est pleinement d'accord avec la doctrine ordinaire de l'évolution, d'après laquelle les étoiles du 1er type donnent naissance, par contraction et refroidissement, à des étoiles du 2d type.

Si l'on examine particulièrement les sous-groupes, on constate en premier lieu que les étoiles du genre d'Orion ont un pouvoir lumineux bien plus fort que les étoiles A, et, dans le groupe d'Orion même, celles qui sont dans l'état le plus jeune sont bien plus lumineuses que les autres. Comparées au type G du soleil, les étoiles du genre Sirius ont un pouvoir lumineux 12 fois plus fort, celles qui forment la transition au type Orion ont un pouvoir 38 fois plus fort, et celles du genre de ε Orionis l'ont même 250 fois plus fort. Ce résultat aussi s'accorde bien avec l'hypothèse, qu'une même étoile parcourt successivement tous les états des classes depuis I jusqu'à XIV; il suffit d'admettre que la densité diminue à mesure que la classe a un numéro d'ordre plus bas. On ne saurait déduire de là si la température des étoiles du genre Orion est plus élevée ou plus basse que celle des étoiles du type Sirius; même dans le dernier cas une moindre densité, donc une plus grande surface, peut contrebalancer, et au-delà, l'effet d'un pouvoir rayonnant moindre. C'est par des mesures spectrophotométriques que l'on devra trancher cette question.

Comme les étoiles de WOLF-RAYET sont contigues à la classe I, une étude de leur mouvement propre, annoncée par M. KAPTEYN, est d'une grande importance.

Quand on s'avance dans la série et que l'on dépasse les étoiles G, du type soleil, on trouve que la puissance lumineuse augmente de nouveau. Les valeurs de q que nous avons obtenues ici confirment à ce point de vue les résultats des mesures de MM. MONCK et HERTZSPRUNG.

Il n'y a qu'une objection à faire contre le témoignage des q, notamment celle-ci, qu'il est possible que les classes K et M soient animées d'un même mouvement propre que le soleil, ce qui ferait que les q ne donnent pas une mesure exacte de la distance. Mais cela est peu pro-

bable a priori, et on peut mettre cette possibilité à l'épreuve en faisant usage de matériaux qui sont généralement défectueux pour ce genre de recherches, mais qui donnent dans ce cas-ci précisément des indications de grande valeur; ce sont les parallaxes mesurées directement. M. Hertzsprung a communiqué des valeurs moyennes de parallaxes mesurées et réduites à la grandeur 0,0; j'ai placé à côté, dans le tableau suivant, les valeurs déduites de $\pi_{0,0}$ pour des groupes un peu différents:

	$\pi_{0,0}$ obs.			$\pi_{0,0}$ déd. de q.
II—IV	0″,0255	(6)	I—III	0″,021
IV—VI	0 ,106	(5)	IV—V	0 ,054
VII—VIII	0 ,153	(10)	VI—VIII	0 ,094
IX—XI	0 ,226[1])	(6)	IX—XII	0 ,21
XII—XIII	0 ,442	(2)		
XIV	0 ,567	(5)	XIII—XIV	0 ,33
XV	0 ,151	(8)	XV	0 ,14
XVI	0 ,171	(3)	XVI—XX	0 ,096
XVII—XVIII	0 ,115	(3)		

En général les nombres de M. Hertzsprung sont un peu plus grands, ce qui s'explique aisément par le fait qu'un grand nombre de parallaxes sont supérieures à la moyenne, par suite d'un grand m. p. Dans tous les cas on voit que les parallaxes directement mesurées indiquent nettement une augmentation de l'éclat passé la classe XIV, et qu'il n'y a donc aucune raison d'admettre que les groupes suivants partagent le mouvement propre du soleil.

Il n'y a donc pas à en douter, les étoiles *K* et *M* ont une plus grande puissance lumineuse que les étoiles *F* et *G*. M. Monck en déduit qu'elles ont un pouvoir émissif plus grand, parce qu'il résulte de l'observation des étoiles doubles que dans l'ensemble la masse est la même.

Mais nous verrons ci-dessous que cette dernière conclusion ne saurait être déduite de l'observation des étoiles doubles. De plus, la conclusion de M. Monck relative au pouvoir émissif plus grand des étoiles *K* et *M* est inadmissible. Pour des corps incandescents ce pouvoir dépend de la température des couches rayonnantes et des absorptions atmosphériques. Si le rayonnement n'est pas affaibli, un rayonnement plus grand va de

[1]) α Carinae étant exclue.

pair avec une couleur de teinte plus bleue (car le maximum du rayonnement se déplace vers les petites longueurs d'onde), parce que les deux circonstances sont la conséquence d'une température plus élevée. L'absorption générale par une atmosphère est également la plus forte pour de petites longueurs d'onde, ce qui fait qu'un rayonnement résiduel relativement plus faible correspond à une couleur plus rouge. Il n'y a donc pas à douter du fait qu'une teinte rouge de la lumière émise correspond dans tous les cas à une moindre émission de lumière par unité de surface.

Il ne reste donc plus qu'une seule explication: *les étoiles K et M (les étoiles rouges du 2d type, comme Arcturus, et le 3e type) présentent en moyenne une surface et un volume notablement plus grands que les autres étoiles du 2d type des classes F et G.* Ce résultat est en désaccord avec l'idée qu'on se fait généralement du développement des étoiles, d'après laquelle les étoiles blanc-jaunâtre *F* et *G* donneraient naissance, par *contraction* et refroidissement, aux étoiles rouges *K* et puis aux étoiles *M*.

6. Pénétrant plus avant dans la nature de ces étoiles, il ne me semble pas bien admissible qu'elles aient une densité particulièrement faible; la basse température, les vapeurs fortement absorbantes indiquent un état de forte condensation. Ces circonstances font prévoir une forte densité (par rapport aux étoiles *F* et *G*) plutôt qu'une densité faible. Il résulte alors de la grandeur du volume *que les étoiles K et M doivent avoir des masses notablement plus grandes que les F et G.* Ce résultat devient encore plus remarquable quand on le met en rapport avec leur vitesse moyenne, dont nous avons trouvé tantôt qu'elle était grande. Si les étoiles de notre système stellaire forment un groupe, en ce sens que les vitesses dans ce groupe sont déterminées par leurs attractions mutuelles, on s'attendrait plutôt à trouver en moyenne une vitesse d'autant plus grande que la masse est plus petite. Pour les étoiles du type d'Orion à petite vitesse il n'en résulte aucune difficulté, car les mêmes circonstances, qui nous permettent de leur attribuer une masse tout aussi grande qu'aux étoiles *A*, *F* et *G*, nous permettent de leur accorder une masse plus grande. Mais les étoiles *K*, qui ont à la fois une plus grande masse et une plus grande vitesse, sont par là caractérisées comme un groupe à part, qui doit avoir eu *dès l'origine*, pour l'une ou l'autre raison, une vitesse relativement grande. Arcturus, avec sa parallaxe petite outre mesure et son grand m. p., est donc, par sa vitesse linéaire extraordinairement grande et son éclat excessif, un

type exagéré de cette classe entière, dont elle est le représentant le plus lumineux. Voilà pourquoi il ne serait pas sans intérêt d'examiner séparément ce qu'il y a de systématique dans le mouvement des étoiles K, qui toutes, sans distinction, ont été réunies comme 2[d] type avec les étoiles F en G.

Si le résultat relatif à la grandeur de la masse des étoiles K et M ne se vérifiait pas, il ne resterait plus que cette seule possibilité, *que la densité de ces étoiles fût excessivement petite.* Dans ce cas la masse de ces étoiles pourrait être du même ordre que celle d'autres etoiles, et ces étoiles pourraient représenter des états de développement des mêmes corps. Mais à quel endroit de la série de développement on devrait alors les placer, c'est encore une énigme. Il y a une continuité régulière dans la succession de $F — G — K — M$; suivant que l'on se représente le développement dans l'un ou l'autre sens, dans le passage $G — K$ le refroidissement est accompagné d'une dilatation ou l'échauffement d'une contraction. Ce qu'il y a d'énigmatique dans cette supposition, on peut encore l'exprimer ainsi: tandis que dans le développement naturel des corps célestes, tel qu'il a lieu d'après nos idées, la température atteint un maximum, alors que la densité augmente continuellement, les nombres que nous venons de trouver indiqueraient, d'après cette interprétation, un maximum de densité dans les classes spectrales F et G.

Dans le volume XI de Astronomy and Astrophysies, M. Maunder a déjà attiré l'attention sur diverses circonstances qui indiquent que le type spectral est moins caractéristique d'un état de développement différent que d'une composition différente. „Il me semble", dit-il, „qu'il n'y a qu'un seul moyen de concilier ces diverses circonstances, c'est de supposer que le type spectral ne dénote pas en premier lieu ou ordinairement une époque de la vie stellaire, mais plutôt une différence fondamentale de constitution chimique" [1]). Parmi ces faits, un des plus importants est p. ex. celui-ci, que les diverses étoiles du groupe des Pléiades, qui diffèrent considérablement par leur éclat, et qui, vu l'égalité de distance, sont donc loin d'avoir la même grandeur réelle, ont néanmoins exactement le même spectre. Le résultat auquel nous venons d'arriver est une confirmation de son hypothèse.

On pourrait être tenté de chercher une relation entre ces étoiles K et M et les étoiles c qui, suivant M. Hertzsprung, ont également un

[1]) Stars of the first and second types of spectrum, p. 150.

pouvoir lumineux bien plus grand, et ont donc ou bien une plus grande densité, ou bien une plus grande masse que les étoiles *a* correspondantes; d'autant plus que ces étoiles *c* ne se rencontrent pas plus loin que dans la classe XIII. Cependant cela ne nous paraît pas probable; les étoiles *K* sont nombreuses, 20 % de toutes les étoiles appartiennent à ce groupe, tandis que les étoiles *c* sont rares. De plus, le spectre de toutes les étoiles *K* est absolument identique avec celui des étoiles *a* des classes antérieures, telles que le soleil et Capella, au point de vue de l'intensité relative des raies métalliques. Il n'y a donc pas moyen de décider pour le moment dans quels autres spectres nous devons chercher d'autres phases vitales des étoiles *K*, dans quels spectres d'autres phases des étoiles *c*. Toutes les étoiles *c*, sauf deux ou trois, sont situées dans la voie lactée ou dans son voisinage: c'est là une propriété qu'elles partagent avec les étoiles de Wolf-Rayet et aussi avec le 1e type de Secchi (III *b* de Vogel); mais elles ne présentent avec ces dernières aucune relation spectrale, prouvée par l'existence de raies communes.

7. On pourrait encore tâcher de faire usage d'autres données pour soumettre à un contrôle la constitution que nous venons de trouver pour Arcturus et les étoiles du 3e type, savoir des données fournies pour les étoiles doubles. Mais par elles-mêmes les étoiles doubles optiques ne nous apprennent rien quant à la masse des étoiles; cela résulte par exemple des considérations suivantes, que l'on trouve e. a. dans Newcomb „The Stars". Imaginons qu'une étoile double soit placée à une distance n fois plus petite, en même temps que toutes les dimension deviennent n fois plus petites, sans que la densité et le pouvoir rayonnant se modifient. Alors la masse diminue dans le rapport n^3, la longueur x de l'orbite dans le rapport n, et la durée de révolution reste la même; l'intensité lumineuse devient n^2 fois plus petite, donc l'éclat apparent ne change pas et il en est de même des dimensions apparentes de l'orbite; en d'autres termes l'étoile double nous apparaît d'une facon identique. On ne peut donc pas trouver la masse indépendamment de la distance. Si l'on représente par x la valeur angulaire du demi grand axe, par P la durée de révolution, par δ la densité, par λ le pouvoir émissif lumineux, par π la parallaxe et par ρ le rayon de l'étoile, nous pouvons écrire $\pi^3 M = \frac{x^3}{P^2}$; la masse M est égale à une constante numérique multipliée par $\rho^3\delta$, l'éclat apparent E est une constante mul-

tipliée par $\pi^2\rho^2\lambda$. Si l'on élimine de là la parallaxe et le rayon, il vient

$$E^3 \frac{P^4}{\alpha^6} = c \frac{\lambda^3}{\delta^2}.$$

Des grandeurs connues, les éléments de l'orbite et la clarté, on déduit donc une relation entre les grandeurs physiques: densité et pouvoir rayonnant, indépendamment des dimensions mathématiques. Cette relation a déjà été déduite à diverses reprises. Dans le travail que je viens de citer, M. Maunder donne des valeurs pour la densité $\delta = c\left(\frac{\lambda}{E}\right)^{3/2} \frac{\alpha^3}{P^2}$, dans l'hypothèse de l'égalité des λ; il a trouvé pour les étoiles du genre de Sirius (1er type) 0,0211 et pour celles du genre du soleil (toutes du 2d type) 0,3026, ce qui est 14 fois plus grand, en moyenne; on peut dire tout aussi bien qu'à densités égales le pouvoir rayonnant des étoiles Sirius est 6 fois plus grand; l'expression exacte, c'est que le quotient λ^3/δ^2 est 200 fois plus grand pour les étoiles Sirius que pour celles du genre du soleil.

M. Hertzsprung a effectué le même calcul sous une autre forme, en faisant usage de la liste des éléments des étoiles doubles de M. Aitken [1]). En introduisant la grandeur $-2{,}5 \log H = m$, il transforme l'expression précédente en des classes de grandeur; mettant sous forme logarithmique:

$$3 \log E + 4 \log P - 6 \log \alpha = const. + 3 \log \lambda - 2 \log \delta$$
$$m - {}^{10}/_3 \log P + 5 \log \alpha = m_r,$$

on a

$$m_r = const. - 2{,}5 \log \lambda + {}^5/_3 \log \delta.$$

En groupant les valeurs de m_r d'après le spectre, suivant le Draper Catalogue (suivant Cannon pour les étoiles méridionales; α Centauri fut classée dans G conformément à la composante la plus lumineuse), on trouve les valeurs moyennes suivantes:

Classe A	— 2,92	(9 étoiles	— 4,60 à — 1,09)
„ F	— 1,32	(19 „	— 3,61 „ + 0,14)
„ G et E	— 0,49	(11 „	— 1,60 „ + 1,38).

Les 3 étoiles du type K (avec H) donnent — 4,88 (γ Leonis),

[1]) *Lick Observatory Bulletin*, n°. 84.

— 1,05 et + 0,87, des valeurs tellement discordantes, comme on voit, qu'il n'y a pas moyen d'en tirer un résultat de quelque valeur. On a déjà souvent attiré l'attention, non sans étonnement, sur la valeur extraordinairement élevée que l'expression λ^3/δ^2 prend pour γ Leonis Tandis que dans les autres classes les valeurs extrêmes de m_r peuvent s'écarter de 3,5 classes de grandeur, quand le nombre d'étoiles est considérable, γ Leonis s'écarte presque de 5 classes de la moyenne des deux autres, c. à d. que son pouvoir lumineux est cent fois plus grand, ou sa densité mille fois plus petite que pour ces deux autres classes. Pour les classes d et F nous trouvons que λ^3/δ^2 a des valeurs respectivement 640 et 8 fois plus grandes que pour la classe G; on ne saurait en tirer des conclusions relatives à la classe K, prise en son entier, ce qui est pourtant ce qui nous intéresse le plus. Il est possible qu'un examen des étoiles doubles dont le mouvement dans l'orbite n'est pas encore connu avec certitude (et pour lesquelles nous devons faire des hypothèses auxiliaires) nous fournisse plus de résultats.

Mais les étoiles doubles spectroscopiques nous donnent par contre des renseignements sur la masse elle-même. Les éléments d'observation $a \sin i$ et P font immédiatement connaître $M \sin^3 i$; comme il n'est pas admissible qu'il existe une relation entre le type spectral et l'inclinaison de l'orbite par rapport à la ligne de visée, on peut admettre que pour tous les groupes la moyenne de $\sin^3 i$ est la même. Pour les étoiles dont une seule composante est visible, la grandeur fournie par l'observation contient encore un élément inconnu, savoir le rapport β de la masse de l'étoile invisible à celle de l'étoile visible. Si a est le demi grand axe de l'orbite que l'étoile visible décrit autour du centre de gravité commun, on a

$$\frac{a^3 \sin^3 i}{P^2} = M \frac{\beta^3}{(1+\beta)^2} \sin^3 i.$$

Il n'est évidemment pas certain que β ait en moyenne la même valeur dans toutes les classes spectrales; si tel n'est pas le cas, les valeurs de M peuvent avoir une allure un peu différente de celle des valeurs de $\frac{a^3 \sin^3 i}{P}$ que nous avons calculées.

Malheureusement, parmi le grand nombre d'étoiles doubles spectroscopiques découvertes jusqu'ici (on en compte 147 dans le *Lick Observatory Bulletin* n°. 79), il y en a fort peu dont on connaît les

éléments orbitaux. Les étoiles dont ces éléments sont connus donnent, classées d'après les spectres,

Groupe II—IV (*B*)		Groupe VI—VIII (*A*)	
Type Orion		Type Sirius.	
o Persei	0,61	β Aurigae	0,56
η Orionis	2,51	ζ Ursae	(3,41) [1]
δ Orionis	0,60	Algol	0,72
β Lyrae	7,85	α Androm.	0,36 [2]
α Virginis	0,33	α_2 Gemin.	0,002
V Puppis	34,2		

Groupe XII—XIV *a* (*F*—*G*)		Groupe XII—XIV *ac*	
Type Soleil		α Ursae min.	0,00001
α Aurigae	0,185	ζ Geminorum	0,0023
χ Draconis	0,120	η Aquilae	0,0029
(*W* Sagittarii	0,005)	δ Cephei	0,0031
(*X* Sagittarii	0,001)		
ι Pegasi	0,117	Groupe XV (*K*).	
η Pegasi	0,234	β Herculis	0,061

Les étoiles *K* n'ont ici qu'un seul représentant, ce qui fait que les matériaux ainsi rassemblés ne nous fournissent rien qui puisse servir à soumettre au contrôle les résultats obtenus au sujet de ce type stellaire. Pourtant ce tableau nous permet de tirer quelques conclusions remarquables. Malgré leur petit nombre, les étoiles Orion semblent l'emporter nettement sur les autres par leur masse, et les étoiles Sirius paraissent avoir également une masse un peu plus grande que les étoiles du genre soleil. Mais, ce qui est surtout frappant, c'est la petite masse des étoiles *c* se rapprochant de *a*. *Les étoiles c sont donc caractérisées par un très grand pouvoir lumineux et une très petite masse; il faut donc que leur densité soit particulièrement faible.* Et si ce n'est pas un pur hasard, que les trois étoiles régulièrement variables à courte période que l'on trouve dans Maury ont toutes les caractères *c*, et qu'il existe réellement une

---

[1]) Pour ζ Ursae j'ai pris pour *a* le demi grand axe de l'orbite relative; comparé aux autres, ce nombre est donc un certain nombre de fois trop grand.

[2]) J'ai admis une période de 100 jours, et une vitesse dans l'orbite de 32,5 km.

relation entre ces particularités spectrales et la variabilité, il y a lieu de classer dans ce groupe les variables *W* et *X* Sagittarii, qui donnent également de petites valeurs; ainsi que je l'ai déjà fait observer, pour les étoiles méridionales on n'a pas fait la distinction entre *a* et *c* [1]).

On peut s'attendre à ce que dans quelques années nos connaissances relatives aux orbites des étoiles doubles spectroscopiques auront fait de grands progrès. Alors il sera possible de tirer des conclusions, dans le genre de celles que je viens de tirer, de matériaux beaucoup plus nombreux, et on saura avec certitude quelque chose de la masse moyenne des étoiles *K*. Pour ce qui est de ce dernier point, nos résultats prouvent que, dans les recherches relatives à la classification et au mouvement des étoiles, il est nécessaire en tous cas de ne pas considérer le 2^d^ type comme un ensemble, mais de séparer toujours les étoiles *F* et *G* des étoiles *K* plus rouges.

II.

La relation entre le spectre et la couleur des étoiles.

1. On sait depuis longtemps qu'il y a une étroite relation entre la couleur et le spectre des étoiles. Les étoiles du 1er, du 2^d^ et du 3e type spectral sont communément appelées les étoiles blanches, les étoiles jaunes et les étoiles rouges, bien qu'à proprement parler la couleur des étoiles jaunes soit un jaune fort blanchâtre, donc peu saturé, et celles des étoiles rouges un jaune clair, mêlé d'un peu de rouge. Dans une conférence faite à Düsseldorf, en 1900 [2]), j'ai montré que cette succession de colorations résulte nécessairement d'un changement dans

---

[1]) A ce propos je mentionnerai qu'en 1891 j'ai cru observer une variabilité de *α* Ursae minoris, avec une période d'un peu moins de 4 jours. La faible amplitude et la grande influence qu'exercent des idées préconçues sur des évaluations de clarté d'après la méthode d'Argelander, dans le cas d'une courte période d'un nombre presque entier de jours, m'ont empêché d'arriver à une certitude positive ou négative. La découverte de M. Campbell, que c'est une étoile double spectroscopique dont la période est 3 j. 23 h. 14 m., fait présumer que mon observation n'était pas tout à fait illusoire.

[2]) Die Farben der Gestirne. *Mittheil. der V. A. P.*, Jahrg. 10, S. 117.

l'état d'incandescence. Si l'on qualifie de blanche la couleur qui correspond à une certaine température très élevée, le changement de couleur qui accompagne l'abaissement de température est indiqué, dans le diagramme chromatique triangulaire, par une ligne qui du blanc se dirige d'abord vers le jaune λ 587, mais dévie ensuite graduellement vers le rouge, à mesure que la couleur se sature davantage, et correspond à une lumière dont la longueur d'onde augmente en même temps qu'elle devient plus saturée. Par contre, quand la température s'élève, la ligne se dirige du blanc vers le côté opposé, le bleu λ 466.

Comme les couleurs qui résultent du blanc par une absorption atmosphérique de plus en plus intense se succèdent à peu près suivant la même ligne, on peut s'attendre à ce qu'en général les couleurs des corps célestes lumineux par eux-mêmes soient situées sur cette ligne d'incandescence, ou dans son voisinage immédiat; sur cette ligne elles sont indiquées par une seule coordonnée, un nombre. Cela fait comprendre comment il se fait que d'une part l'indication par lettres ou par noms, ou la mesure à l'aide du colorimètre de ZÖLLNER, qui produit de tout autres couleurs, ont donné si peu de résultats, et que d'autre part l'échelle de SCHMIDT, qui indique les couleurs par une série de chiffres, 0 représentant le blanc, 4 le jaune, 10 le rouge, a donné en pratique les meilleurs résultats. Aussi, c'est suivant cette dernière méthode qu'a été dressée la liste la meilleure et la plus complète de colorations stellaires, publiée en 1900 par M. H. OSTHOFF, de Cologne, dans les *Astr. Nachr.*, Bd. 153 (n°. 3657—58). Cette liste, dans laquelle les couleurs de toutes les étoiles, jusqu'à la 5e grandeur, ont été indiquées avec une précision d'un dixième de classe, et qui est le fruit d'évaluations systématiques faites durant 14 années, nous permet d'établir avec précision le rapport entre le spectre et la couleur.

J'ai fait remarquer dans le premier chapitre, que nous ne savons pas encore où nous devons chercher la maximum de température, ou plus exactement le pouvoir lumineux maximum, dans la série des spectres du type d'Orion et du premier type. On peut admettre que c'est là où la couleur est la plus blanche; or, des mesures spectrophotométriques, auxquelles je renvoie dans le précédent chapitre, font encore défaut, mais pour notre but elles peuvent être parfaitement remplacées par des appréciations de couleur; c'est là l'objet d'une étude que j'ai faite, et dont je vais communiquer les résultats.

Comme il était nécessaire de spécifier les spectres autant que possible

jusque dans les détails, afin de pouvoir établir la comparaison avec la couleur, il était naturel de recourir encore une fois à la classification de Mlle. Maury. Mais, pour pouvoir établir une couleur moyenne pour chaque classe, il fallait affranchir les couleurs observées de deux influences qui les modifient, savoir l'influence de la clarté et celle de la hauteur au-dessus de l'horizon. Nous ne disposons pas de données quantitatives relativement à la grandeur de ces deux influences; les expériences de M. Osthoff même, faites en vue de déterminer l'influence de la clarté, n'ont pas donné jusqu'ici beaucoup de résultats. L'effet de ces influences doit donc être déduit des matériaux eux-mêmes qui servent à notre examen; et cela peut se faire moyennant la supposition, fort admissible d'ailleurs, que pour chaque classe la couleur vraie est sensiblement constante et indépendante de la clarté.

2. Les étoiles de la liste de M. Osthoff, qui figurent dans le catalogue spectral de Maury, ont été rangées d'après la classe et puis (à l'exception de celles qui sont marquées *c*, *ac*, *C*, *P* ou *L*; ces étoiles, je les ai toujours laissées de côté dans mon examen) je les ai rangées d'après la grandeur photométrique, en prenant chaque fois quelques classes à la fois, et je les ai réunies pour en faire des moyennes. Ces moyennes doivent faire connaître l'influence de la clarté sur la couleur; on les trouve dans les tableaux suivants:

Classe III—IV		Classe VII—VIII		Classe IX—XII	
Gr.	Coul.	Gr.	Coul.	Gr.	Coul.
1,78	1,46 (5)	0,1	1,2 (3)	1,0	2,7 (2)
2,80	2,27 (6)	2,4	1,83 (6)	2,69	2,97 (9)
3,35	1,96 (5)	3,17	2,59 (7)	3,18	3,06 (8)
3,70	2,86 (7)	3,55	2,57 (6)	3,65	3,73 (10)
4,00	2,47 (8)	3,82	2,95 (6)	3,85	3,40 (8)
4,15	2,91 (7)	4,00	2,86 (5)	4,10	3,69 (9)
4,50	2,60 (9)	4,10	2,60 (7)	4,29	4,17 (7)
4,95	2,42 (11)	4,20	2,50 (5)	4,65	3,79 (8)
		4,36	2,96 (5)	5,10	3,34 (9)
		4,62	2,72 (4)		
		4,96	2,66 (5)		

Classe XIII—XIV		Classe XV		Classe XVI—XVIII	
Gr.	Coul.	Gr.	Coul.	Gr.	Coul.
0,2	3,4 (1)	0,7	4,5 (2)	0,95	6,45 (2)
3,07	4,71 (7)	2,12	5,50 (6)	2,50	6,40 (6)
3,54	4,61 (7)	2,92	5,66 (9)	3,22	6,65 (6)
3,98	4,72 (9)	3,37	5,74 (9)	3,72	6,65 (4)
4,24	4,88 (8)	3,55	5,46 (9)	4,15	6,75 (6)
4,84	4,88 (8)	3,75	5,71 (8)	4,63	7,07 (7)
		3,90	5,55 (10)	4,88	7,22 (9)
		4,00	5,70 (7)	5,28	7,22 (8)
		4,14	5,85 (11)		
		4,45	6,08 (6)		
		4,87	6,43 (7)		

On constate dans toutes ces séries que la teinte se fonce à mesure que la clarté s'affaiblit. On peut se proposer de représenter la couleur comme une fonction linéaire de la clarté; j'ai trouvé par voie graphique:

Cl.	III—VI	$c = 2{,}15 + 0{,}35\ (m-3)$	
„	VII—VIII	$2{,}27 + 0{,}36$	„
„	IX—XII	$3{,}17 + 0{,}39$	„
„	XIII—XIV	$4{,}45 + 0{,}42$	„
„	XV	$5{,}17 + 0{,}39$	„
„	XVI—XVIII	$6{,}60 + 0{,}20$	„

Pour tous les groupes, sauf pour le dernier, on trouve donc à peu près le même coefficient. La valeur des coefficients est déterminée surtout par la différence de coloration observée entre les étoiles très lumineuses de première grandeur, et la grande masse des étoiles de 3e et 4e grandeurs. Pour établir l'accord entre le coefficient du dernier groupe et ceux des groupes précédents, il faudrait prendre pour α Tauri et α Orionis la couleur apparente 5,6 au lieu des appréciations réelles 6,4 et 6,5. Il n'est pas bien possible d'admettre une erreur aussi grande pour ces étoiles claires, souvent examinées; l'écart du coefficient pour les étoiles rouges doit donc être considéré provisoirement comme réel, bien qu'il soit difficile d'en donner en ce moment une explication.

Si l'on réunit les résultats des cinq premiers groupes, en ordonnant d'après la clarté les écarts des constantes des formules relatives à $m = 3$, et en prenant de nouveau les moyennes, on trouve:

m	$c - c_3$	C_1	C_2	$O - C_1$	$O - C_2$
0,3	— 1,03	— 1,10	— 0,91	+ 0,07	— 0,12
1,6	— 0,63	— 0,54	— 0,47	— 09	— 16
2,91	+ 0,02	+ 0,04	— 0,02	— 02	+ 04
3,73	+ 0,32	+ 0,31	+ 0,27	+ 01	+ 05
4,12	+ 0,48	+ 0,40	+ 0,39	+ 08	+ 09
4,73	+ 0,50	+ 0,52	+ 0,60	— 02	— 10

La relation linéaire $c = c_3 + 0{,}35\,(m - 3)$ donne les valeurs calculées placées sous C_2, et les écarts $O - C_2$. Ces écarts sont systématiques et prouvent que la relation n'est pas linéaire. Une courbe qui s'accorde aussi bien que possible avec les valeurs moyennes donne les valeurs calculées C_1 et les écarts $O - C_1$. Pour les grandes clartés elle donne une variation rapide, et pour les clartés faibles une variation plus lente avec la clarté. Dans tous les groupes, sauf dans le cinquième et dans le sixième, on observe que les derniers nombres, correspondant à la clarté la plus faible, présentent, par rapport aux nombres précédents, une diminution du chiffre de la couleur.

On peut trouver une explication de ce phénomène dans l'influence de la perception d'une lueur incolore dans le cas de sources lumineuses peu intenses. Si l'étoile a très peu d'éclat on ne reconnaît plus aucune couleur; la perception de couleur est presque totalement remplacée par une impression lumineuse incolore (c. à d. blanchâtre). Pour des étoiles qui se rapprochent de cette limite l'impression de couleur doit être fortement mélangée de l'impression incolore, ce qui les rend plus pâles et fait qu'on leur accorde une chiffre plus bas. Comme cette impression incolore est relativement plus faible dans le cas d'étoiles à coloration plus rouge, le pâlissement de la couleur de ces étoiles ne s'observera qu'à partir d'une clarté notablement plus faible; on peut expliquer ainsi comment il se fait que le 5e et le 6e groupe ne manifestent pas cet abaissement. Il n'y a pas moyen de constater si dans ce groupe le phénomène se présente pour des étoiles plus faibles encore, puisque le catalogue spectral de Maury ne contient pas d'étoiles plus faibles.

Pour l'usage pratique, la réduction des couleurs observées à une même clarté, il est assez indifférent de se servir de l'une ou de l'autre relation, aussi longtemps que l'on reste entre certaines limites de clarté, p. ex. entre les grandeurs 1 et 5. Pour la facilité de la réduction

je me suis servi de la formule linéaire ci-dessus pour les cinq premiers groupes (jusqu'à la classe XV inclusivement), tandis que j'ai adopté le coefficient de clarté 0,20 pour les classes plus rouges.

Pour expliquer le phénomène, connu depuis longtemps, que la couleur se fonce à mesure que la clarté diminue, HELMHOLTZ a donné dans sa „Physiologische Optik" une théorie, la „Theorie der kürzesten Linien im Farbensystem". Dans le diagramme chromatique dans l'espace, où toute impression lumineuse est représentée par un point, dont les coordonnées font connaître les quantités des couleurs élémentaires rouge, vert et bleu, les lignes d'égale coloration ne sont pas des rayons rectilignes par l'origine, mais des lignes courbes qui, à grande distance de l'origine, s'infléchissent de plus en plus vers les axes coordonnés et s'écartent donc de plus en plus d'un rayon rectiligne, qui représente la „couleur principale" (Principalfarbe). Dans le triangle chromatique les points d'égale coloration s'écartent d'autant plus de la couleur principale — en se déplaçant suivant une courbe vers la périphérie et les sommets — que le triangle est plus éloigné de l'origine et représente donc une plus grande clarté. Comme couleur principale HELMHOLTZ donne un certain blanc jaunâtre, vers lequel tendent en apparence toutes les couleurs quand l'intensité devient excessivement grande. Les couleurs qui sont situées du côté bleu de cette couleur principale doivent donc bleuir par affaiblissement.

Cela n'est pas d'accord avec ce que nous venons de trouver ici, du moins si le blanc jaunâtre de HELMHOLTZ est aussi blanc jaunâtre dans notre échelle, c. à d. est représenté par un nombre positif dans l'échelle de SCHMIDT. Nous trouvons ici que même les étoiles les plus blanches subissent par affaiblissement un jaunissement également fort que les étoiles plus jaunes. Il est vrai que l'expression „blanc jaunâtre" est assez indéterminée; mais si l'on songe que ce qui s'appelle blanc dans l'échelle de SCHMIDT est plus blanc, c. à d. plus bleu que la lumière de Sirius, et que la lumière solaire, type d'une lumière blanche dans les considérations optiques ordinaires, affaiblie à l'éclat d'une étoile, serait notée 3 à 4 dans l'échelle de SCHMIDT (Capella 3,4), il faut, si la théorie de HELMHOLTZ est exacte, que la couleur principale, au lieu d'être blanc jaunâtre, soit située du côté bleu de la lumière de Sirius.

3. Quand les couleurs eurent été réduites de cette façon à la clarté

3,0, elles durent être débarrassées encore de l'influence de la coloration rouge produite par l'atmosphère. Il n'est pas possible de le faire avec quelque précision, parce qu'il n'est pas indiqué à quel moment les observations ont été faites ni à quelle hauteur elles se rapportent. Il est vrai que pour de grandes hauteurs, et même pour des hauteurs moyennes, l'influence est très faible, et l'observateur aura certainement pris soin d'observer la plupart des étoiles à une hauteur suffisante (p. ex. entre 30° et 60°). Pratiquement cette correction n'a donc d'importance que pour les quelques étoiles méridionales, qui restent toujours basses; pour celles-ci on pourra représenter approximativement le changement de couleur par une correction dépendant de la déclinaison. Au lieu de la déclinaison j'ai pris comme argument la zone B. D., que M. Osthoff donne aussi dans son catalogue.

Pour chaque classe spectrale j'ai formé des nombres chromatiques moyens pour toutes les étoiles au nord de l'équateur, et pour toutes les étoiles au sud de l'équateur j'ai formé les écarts de ces moyennes de classe; ces écarts, je les ai ordonnés enfin suivant la déclinaison et j'en ai formé de nouveau la moyenne. J'ai omis les classes qui contenaient trop peu d'étoiles septentrionales, c. à d. I, II et III.

Zone	Ecart	n.	Courbe	Zone	Ecart	n.	Courbe
— 0°,0	+ 0,56	5	+ 0,05	— 9°,0	+ 0,14	5	+ 0,26
— 1 ,7	+ 0,35	4	+ 06	— 10 ,2	+ 0,35	4	+ 32
— 3 ,3	— 0,17	6	+ 09	— 13 ,2	+ 0,33	6	+ 57
— 5 ,0	+ 0,50	5	+ 12	— 15 ,0	+ 1,17	6	+ 79
— 6 ,6	+ 0,22	4	+ 17	— 18 ,2	+ 0,93	6	+ 1,32
— 8 ,0	— 0,05	5	+ 22				

Par ces valeurs j'ai fait passer une courbe qui s'élève de plus en plus vite à partir de l'équateur vers les déclinaisons méridionales; elle a donné les valeurs de la dernière colonne. D'après cette courbe j'ai apporté les corrections suivantes:

zone	1°	2° — 5°	6° — 8°	9° — 10°	11°	12°	13°
corr. nég.	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
zone	14°	15°	16°	17°	18° S.		
corr. nég.	0,7	0,8	0,9	1,1	1,3.		

On peut admettre que ces corrections ont rectifié pour une grande

partie le changement de coloration produit par l'absorption atmosphérique.

4. Après avoir apporté ces corrections, j'ai pu former des valeurs moyennes de la couleur pour toutes les classes spectrales; on trouve ces moyennes dans le tableau suivant. J'ai de nouveau scindé en trois la classe XV, suivant que le spectre s'accordait avec celui de α Bootis (A), ou de α Cassiopeiae (C), ou n'était pas affecté d'une observation de ce genre (B): le résultat apprend en effet que la classe C est notablement plus rouge que la classe A, tandis que B est entre les deux.

Classe	Couleur	Nombre	Classe	Couleur	Nombre
I	2,47	6	XII	3,68	17
II	2,36	10	XIII	4,12	13
III	2,30	9	XIV	4,45	12
IV	1,94	14	*XIV*	5,09	9
IV	1,62	10	XV *A*	5,18	18
V	2,11	9	XV *B*	5,35	26
VI	2,16	10	XV *C*	5,55	31
VII	2,27	23	*XV*	6,34	5
VIII	2,37	34	XVI	6,47	17
IX	2,64	20	XVII	6,80	15
X	3,11	14	XVIII	6,74	15
XI	3,40	9	XIX	6,67	6
XI	3,41	4			

Les quantités dont les valeurs individuelles s'écartent de ces moyennes, prises comme mesure de la précision des résultats, donnent pour erreur moyenne d'un nombre chromatique $\pm\ 0,20 = 0,15$; la précision réelle sera un peu plus grande et l'erreur moyenne réelle plus petite, parce que ce nombre contient aussi les erreurs des corrections admises pour la clarté et la déclinaison, les erreurs que Mlle. Maury a pu commettre en consignant chaque étoile dans une classe déterminée, et les écarts véritables de quelques étoiles de la moyenne de leur classe.

Pour 9 étoiles (sur 355) l'écart dépasse une unité de coloration; les couleurs réduites sont:

β Can. maj.	III	1,2	ε Hydrae	XIII	5,2	η Persei	XV*B*	6,8
o_1 Cygni	IX	1,4	μ Persei	XIV	5,5	11 Urs.min.	XV*B*	6,6
δ Delphini	IX	3,8	o_2 Cygni	*XIV*	6,5	5 Orionis	XVII	7,9

Ainsi que je viens de le dire, j'ai exclu de ces recherches les étoiles *c* et *ac*, les *L* (raies lumineuses), les *P* (spectres particuliers) et les *C* (spectres composés). Il n'est pas sans importance de considérer de plus près les étoiles *c* et *ac*, pour voir si elles se distinguent nettement par la couleur des étoiles *a* du même numéro de classement. 11 étoiles *ac* donnent un écart moyen de + 0,1 (de + 0,5 à — 0,3) et 12 étoiles *c* donnent + 0,7 ; elles sont donc un peu plus rouges que les étoiles *a*. Mais les grands écarts individuels sont remarquables; leurs valeurs extrêmes sont:

ζ Cassiop XIII +2,5; χ_2 Orionis III +1,8; 4 *H* Camelop *VI* +2,0; 3 *H* Camelop *VI* +1,5; η Leonis VII —0,3; β Orionis VI —1,2.

On voit que les écarts sont fort différents, sans qu'il y ait à y reconnaître la moindre régularité.

5. Les résultats ici trouvés permettent de résoudre une question, que j'ai dû laisser sans réponse dans le premier chapitre, notamment la question de savoir où doit être situé le maximum de pouvoir lumineux dans la série continue des classes spectrales. Les nombres chromatiques indiquent nettement une diminution dans les premières classes, un *minimum* entre la 4e et la 5e classe, puis une augmentation constante. Les étoiles dont le degré d'évolution succède immédiatement à celui de γ Orionis (μ Aurigae, μ Hydrae, μ Herculis) ont la couleur la plus blanche; les états de développement antérieurs aussi bien que postérieurs sont plus jaunes; les classes I et II se rapprochent le plus de la classe VIII par leur couleur. C'est donc entre la 4e et la 5e classe que doit être placé le maximum de pouvoir émissif lumineux, pour autant que nous puissions en juger d'après la couleur.

Voici maintenant quel est le nombre chromatique moyen pour chacun des groupes que nous avons formés:

Cl.	I—III	2,35
	IV—V	1,87
	VI—VIII	2,30
	IX—XII	3,20
	XIII—XIV	4,58
	XV	5,43
	XVI—XIX	6,66.

Serait-il possible de déduire de ces nombres, fût-ce approximativement, des valeurs pour le pouvoir lumineux par unité de surface? Il est possible de soumettre au calcul les deux influences, déjà mentionnées, qui régissent la couleur des corps célestes lumineux par eux-mêmes, en partant des propriétés spécifiques des substances constituantes et en faisant des raisonnements théoriques abstraits. Cela revient à considérer le rayonnement d'un corps absolument noir et à faire abstraction de l'absorption sélective par des raies et des bandes, pour ne tenir compte que de l'absorption générale. En première approximation cela suffit.

Dans mes calculs j'ai fait usage des mesures de M. A. König sur la quantité relative des couleurs élémentaires rouge, vert et bleu dans la lumière solaire blanche, considérée comme fonction de la longueur d'onde. Si l'on connaît pour une autre source lumineuse le rapport de clarté par rapport à cette lumière, comme fonction de la longueur d'onde, on peut calculer les quantités de rouge, jaune et bleu dans cette autre source. Si nous représentons par $R(\lambda)$, $V(\lambda)$ et $B(\lambda)$ les nombres de König, choisis de telle façon que

$$\int R(\lambda)\,d\lambda = 1000, \quad \int V(\lambda)\,d\lambda = 1000, \quad \int B(\lambda)\,d\lambda = 1000,$$

et si $f(\lambda)$ est la clarté d'une deuxième source,

$$\int f(\lambda)\,R\,d\lambda, \qquad \int f(\lambda)\,V\,d\lambda \quad \text{et} \quad \int f(\lambda)\,B\,d\lambda$$

sont les quantités de R, V et B contenues dans cette lumière. Comme l'impression de clarté d'une source est sensiblement proportionnelle à la quantité de rouge, ce calcul donne en même temps une mesure de la clarté optique.

Le rayonnement d'un corps noir peut être représenté par

$$\lambda^{-a}\, e^{-\frac{c}{T\lambda}}\, d\lambda,$$

où T est la température absolue, et où a et c sont des constantes. Pour deux sources lumineuses de températures différentes le rapport des intensités est

$$f(\lambda) = e^{-\frac{c}{\lambda}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)} = e^{\frac{b}{\lambda}} = 10^{\frac{b'}{\lambda}},$$

si $b = c\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)$ et $b' = 0,13\,b$. Pour λ je prendrai comme unité 0,001 mm.; si l'on donne maintenant à b' diverses valeurs, indiquant le degré d'incandescence par rapport à celui qui correspond à la température T_0, on peut calculer pour ces valeurs la clarté et la couleur, ainsi que la température (supposant que T_0 soit donné, et prenant $c = 15000$ environ). On trouve ainsi pour les degrés d'incandescence $+1$, 0 et -1:

$b' = +1$	Lum. =	69200	$R +$	68100	$V +$	175800	B
0		1000	$R +$	1000	$V +$	1000	B
-1		17,7	$R +$	15,7	$V +$	6,3	B

Si l'on exprime la couleur en prenant les quantités relatives de R, V et B pour une somme 1000, et la clarté en classes de grandeur, on trouve pour

$b' = +1$	Coul. =	$221\,R + 218\,V + 562\,B$	Gr. = $+4,6$
$b' = -1$	Coul. =	$445\,R + 396\,V + 160\,B$	Gr. = $-4,4$

La première couleur peut donc être décrite comme un mélange de 654 parties de blanc et 347 d'un bleu composé de $3\,R$ et $344\,B$, et dont la teinte correspond à λ 466. La seconde couleur est un mélange de 480 de blanc et 521 d'un jaune, composé de $285\,R$ et $236\,V$, ce qui correspond à λ 587. Un état d'incandescence $b' = -2$, dont la couleur correspond à peu près à la lumière d'une lampe à pétrole, abaisse la clarté de 8,6 grandeurs.

Pour calculer l'absorption atmosphérique, j'ai admis que l'absorption générale dans un gaz est inversement proportionnelle à la quatrième puissance de la longueur d'onde. Pour une épaisseur de gaz arbitrairement choisie, et qui fut reconnue équivalente à 1,05 atmosphère par comparaison avec les mesures spectrophotométriques de M. Müller, j'ai calculé $f(\lambda)$ et j'ai trouvé que la quantité restante d'une quantité primitive de lumière $1000\,R + 1000\,V + 1000\,B$ était:

$$783\,R + 771\,V + 571\,B;$$

ce qui, ramené à la somme 1000, revient à:

$$368\,R + 363\,V + 269\,B;$$

la clarté n'est plus que 0,783 de ce qu'elle était d'abord, c. à d. qu'elle est affaiblie de 0,27 grandeurs.

La variation de coloration produite par cette 1,05 atmosphère équivaut à peu près à celle occasionnée par une diminution de $^1/_3$ du degré d'incandescence. Ce degré donne en effet:

$$257\,R + 248\,V + 184\,B,$$

soit, réduit à 1000,

$$372\,R + 361\,V + 267\,B,$$

ce qui est à peu près identique à ce que nous avions tantôt. Mais ici la clarté est réduite à 0,257, c. à d. est diminuée de 1,48 grandeurs.

On voit par là que ces deux causes différentes donnent bien des colorations de même espèce, mais que ces colorations sont accompagnées d'affaiblissements tout différents de la clarté. Relativement parlant, on peut dire que l'absorption atmosphérique a surtout pour effet de rougir la teinte, l'abaissement de température de diminuer la clarté. Voilà pourquoi il n'est pas possible de déduire de la seule coloration quel est le pouvoir lumineux, puisqu'on ne sait pas dans quelle mesure les deux influences, température et absorption, agissent dans les diverses classes spectrales. Il se peut qu'un jour des mesures spectrophotométriques précises permettent de séparer les deux influences, car elles provoquent une distribution différente de l'intensité dans le spectre. Comme *log* de la clarté pour divers λ, par rapport à λ 500, nous trouvons:

	$\lambda =$ 650	600	550	500	450	400
abs. 1,05 átm.:	+0,114	+0,083	+0,051	0,000	—0,084	—0,231
incandesc. — $^1/_3$:	+0,154	+0,111	+0,061	0,000	—0,074	—0,166

Dans le deuxième cas la diminution d'intensité du rouge vers le violet est assez régulière; dans le premier elle va nettement croissant.

Nous reconnaissons par ces calculs que mon assertion au premier chapitre, qu'une couleur plus rouge est nécessairement accompagnée d'un pouvoir lumineux plus faible, n'est pas rigoureusement exacte. Puisqu'il y a deux influences, qui agissent de façons différentes sur la couleur et la clarté, il n'est pas impossible qu'une étoile à coloration plus rouge ait un pouvoir lumineux plus grand, notamment si sa température est beaucoup plus élevée et si elle présente en même temps une plus forte absorption atmosphérique. D'après les nombres précé-

dents, de pareilles circonstances seraient réalisées par un degré d'incandescence plus élevé de $^1/_3$ et une absorption de 2 atmosphères.

Nous trouvons ainsi une deuxième possibilité d'expliquer les particularités trouvées dans les étoiles *K*, savoir en admettant que leur température est relativement beaucoup plus élevée que celle des étoiles *G*, de sorte que leur pouvoir rayonnant est plus fort, et que ce rayonnement est légèrement affaibli, mais fortement coloré en rouge par une absorption atmosphérique très considérable. J'ajouterai cependant que je tiens cette explication pour peu probable, car l'absorption en bandes, qui commence aux étoiles *K* et qui est caractéristique pour les étoiles *M* (3e type), indique plutôt une basse température.

Appendice.

Dans un article publié dans *Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie*, M. Hertzsprung a poursuivi ses études, semblables en partie aux miennes. Ses résultats semblent prouver que les particularités présentées par les étoiles *K* sont une conséquence du fait, qu'elles présentent des différences de grandeur beaucoup plus fortes que les classes plus basses; ce qui fait que dans nos tableaux, qui ne se rapportent qu'aux étoiles les plus lumineuses, il n'est tenu compte que des étoiles rouges dont la grandeur est la plus élevée.

ACTIONS CHIMIQUES DES RAYONS DU RADIUM,

PAR

W. P. JORISSEN et W. E. RINGER.

1. L'action du radium sur un mélange d'hydrogène et de chlore.

Il n'y pas beaucoup de réactions chimiques qui se produisent sous l'influence des rayons de Becquerel, ou dans lesquelles une influence de ces rayons a pu être constatée. A la communication de M. Becquerel, que ces rayons agissent sur une plaque photographique, en succéda une autre de P. Curie et Madame Curie [1]), d'après laquelle ils transforment l'oxygène en ozone.

M. Becquerel observa qu'il se dépose lentement une petite quantité de calomel d'une solution de sublimé et d'acide oxalique, dans laquelle on a plongé un tube contenant une substance radioactive. Il constata aussi que le phosphore blanc est transformé en phosphore rouge par les rayons du radium.

P. Curie et Madame Curie [2]) observèrent déjà que les rayons du radium colorent le verre et la porcelaine; M. Giesel [3]) de son côté, a mentionné la coloration du spath fluor, des sels haloïdes des métaux alcalins et du papier.

M. Hardy et Miss Willcock [4]) ont trouvé que les rayons du radium

---

[1]) *Comptes rendus*, 129, 823, 1899. Voir aussi Giesel, *Verhandl. d. d. phys. Ges.*, 5 janv. 1900.

[2]) *Comptes rendus*, 133, 709, 1901.

[3]) *Verh. d. d, phys. Ges.*, 5 janv. 1900; *Ber. deutsch. chem. Gesellsch.*, 35, 3609, 1902.

[4]) *Proc. Roy. Soc. London*, 72, 200, 1903; voir aussi van Aubel, *Phys. Zeitschr.*, 5, 637, 1904.

favorisent l'oxydation de l'iodoforme, en divers dissolvants, par l'oxygène dissous, et M. HARDY [1]) constata aussi une influence sur la coagulation de la globuline. [2])

M. FENTON [3]) observa que la vitesse de décomposition du peroxyde d'hydrogène est accélérée par ces rayons, et M. SKINNER [4]) constata une coloration brune du sulfate mercureux. La décomposition de l'eau fut rendue manifeste par des expériences de MM. RUNGE et BODLÄNDER [5]) et de MM. RAMSAY et SODDY. [6])

MM. PELLINI et VACCARI [7]) rapportent qu'ils ont observé une faible action sur une solution aqueuse d'acide iodhydrique et sur des solutions d'iodure de propyle et d'isopropyle dans le chloroforme. Dans quelques autres cas, où ils prévoyaient une influence, ils n'en ont pas observé, p. ex. dans le cas d'un mélange d'hydrogène et de chlore. Leurs observations ont duré en tout 48 heures et ils ont employé 5 mg. de bromure de radium [8]), enfermé dans un petit tube, qu'ils introduisaient à découvert dans l'appareil, où qu'ils couvraient d'une mince feuille d'aluminium, pour écarter toute phosphorescence. Mais par là ils arrêtaient les rayons α et les rayons β les plus lents. L'appareil dont ces auteurs se sont servis était en principe le même que celui de BUNSEN et ROSCOE; le „vase d'éclairement" avait à peu près la forme d'un verre à vide de DEWAR; le petit tube à bromure de radium pouvait être placé dans la dépression du vase.

Enfin nous citerons encore M. DE HEMPTINNE [9]), qui tâcha de découvrir une action de rayons RÖNTGEN sur un mélange détonant d'hydrogène et de chlore, en faisant entrer les rayons dans l'appareil à tra-

[1]) *Proc. Physiol. Soc.*, 16 mai 1903.

[2]) Pour les actions physiologiques des rayons du radium, voir e. a. Mme CURIE, Untersuchungen über die radioaktiven Substanzen (übers. v. KAUFMANN), Braunschweig 1904, 90—92; RUTHERFORD, Radio-Activity, Cambridge, 1904, 176 et 177.

[3]) *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 12, 260.

[4]) *Ibid.*, 12, 424.

[5]) GIESEL, *Ber. deutsch. chem. Gesellsch.*, 35, 3605, 1902.

[6]) *Proc. Roy. Soc. London*, 72, 204, 1903.

[7]) *Atti accad. dei Lincei*, (5), 13, 269, 4 sept. 1904.

[8]) Provenant de la fabrique R. STHAMER à Hambourg.

[9]) *Zeitschr. f. physik. Chemie*, 21, 495, 1896. Cette observation ne semble pas avoir été faite dans les conditions les plus avantageuses pour une bonne réussite; elle devrait être refaite.

vers une petite plaque d'aluminium, qu'il avait recouverte d'une mince couche de paraffine; mais ses expériences sont restées sans résultat (après une heure de pose).

Comme les expériences bien connues de BUNSEN et ROSCOE [1]), relatives à l'influence de la lumière sur des mélanges d'hydrogène et de chlore, nous avaient conduits à examiner l'influence des rayons du radium sur un pareil mélange gazeux [2]), nous avons compris, vu e. a. la quantité très petite de bromure de radium dont nous disposions, qu'il était nécessaire de construire un appareil permettant de faire des observations fort précises, et de préparer un mélange gazeux fort sensible à la lumière.

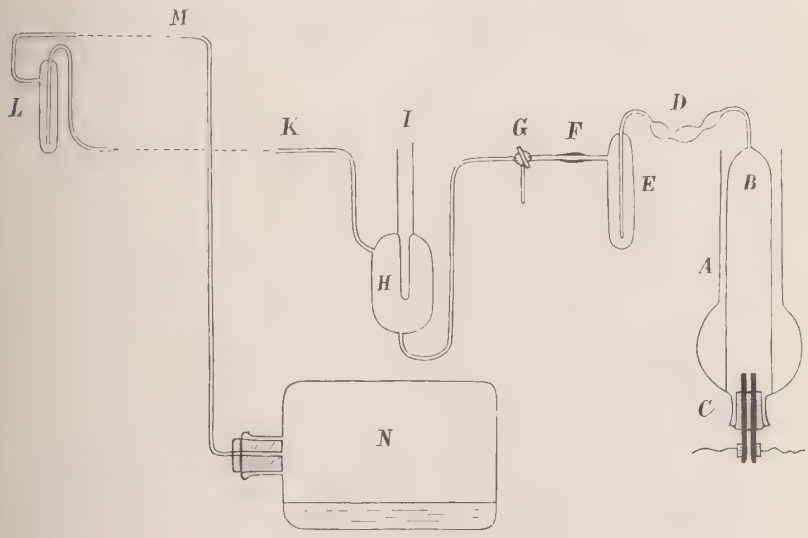


Fig. 1.

Ce n'est qu'après avoir modifié l'appareil à diverses reprises, afin d'éliminer divers facteurs qui auraient pu avoir une influence, ou dont l'influence avait été réellement constatée, que nous sommes parvenus à constater une action des rayons du radium.

---

[1]) *Pogg. Ann.*, 96, 373; 100, 43 et 481; 101, 235; 108, 193. Voir aussi MELLOR et RUSSELL, *Proc. Chem. Soc.*, 1902; MELLOR, *Proc. Chem. Soc.*, 1904. BEVAN, *Phil. Trans.*, 1903, 71; *Proc. Roy. Soc.*, 72, 5, 1903.

[2]) Ce n'est qu'à la fin d'octobre 1904 que nous prîmes connaissance des recherches de MM. PELLINI et VACCARI, dans *Chem. Centr. Bl.*, 1904, II, 1197; nos expériences étaient alors en train depuis quelques mois.

Notre dispositif expérimental était en partie le même que celui de Bunsen et Roscoe.

Le gaz détonant hydrogène-chlore était préparé dans le vase *A* [1]) (fig. 1), par électrolyse d'une solution à 25 % d'acide chlorhydrique pur. Comme électrodes nous nous sommes servis de deux petits bâtons de graphite [2]), traversant un bouchon en caoutchouc, recouvert d'une couche de paraffine à l'intérieur du vase. Le courant était fourni par quatre éléments Bunsen. [3])

Le mélange gazeux était lavé à l'eau dans les appareils *D* et *E*. Le petit flacon laveur *E* était relié par une pièce rodée *F* avec le robinet à trois voies *G*, qui permettait de laisser échapper le mélange gazeux dans l'air extérieur pendant les premières heures. Puis nous avons fait passer le gaz pendant quelques jours à travers le vase d'éclairement *H* et le flacon laveur *L*. Le récipient *H* contenait une petite éprouvette *I*, qui y était soudée, et dont la portion inférieure était très mince. Le petit tube contenant 5 mg. de bromure de radium [4]), qui était également à parois très minces, s'adaptait exactement dans cette partie inférieure et pouvait y être introduit ou en être retiré au moyen d'un fil, qui y était attaché par de la cire. Le récipient *H* contenait 2 cm^3 d'eau. Le flacon laveur *L* était relié de telle façon avec le tube horizontal, et contenait une quantité d'eau telle que, lors du passage du mélange gazeux, ce dernier avait à vaincre une pression à peu près égale à celle qu'il aurait à supporter plus tard, lorsque l'eau de *L* serait transportée en partie jusque dans le commencement du tube horizontal [5]). Nous avons obtenu de cette façon qu'après le déplacement de l'eau l'équilibre dans l'appareil, entre le mélange gazeux et les solutions dans le vase d'éclairement *H* et le flacon laveur *L*, se rétablissait plus promptement.

Le tube *K*, reliant *L* et *H*, avait environ 75 cm. de longueur et

[1]) Pour ce qui regarde les parties principales, l'appareil a été représenté à l'échelle de $^1/_5$.

[2]) Fournis par la maison Warmbrunn, Quilitz et Cie, Berlin N.

[3]) Le liquide dans lequel les charbons étaient plongés avait été obtenu en mélangeant 1 vol. d'acide nitrique concentré, 1 vol. d'acide chlorhydrique concentré et deux vol. d'acide sulfurique dilué (1 : 20); le liquide où étaient plongés les cylindres de zinc se composait de 20 vol. d'eau, 1 vol. d'acide sulfurique concentré, et 1 vol. d'acide chlorhydrique concentré. Nous évitions ainsi la production de peroxyde d'azote.

[4]) Provenant de la fabrique R. Sthamer, à Hambourg.

[5]) Situé du côté gauche dans la figure.

2 mm. de largeur, et était pourvu d'une échelle divisée en millimètres.

Pour faire passer l'eau du flacon laveur dans le tube nous fermions le robinet *G*, puis nous éclairions pendant quelques instants le récipient *H* à travers une fenêtre, pratiquée dans la paroi du thermostat où était placé le récipient. Le tube soudé à *L* du côté gauche, qui avait été relié, pendant le passage du courant gazeux, à un tube débouchant à l'extérieur, fut maintenant relié, par l'intermédiaire d'un tube en caoutchouc épais *M*, à un tube capillaire conduisant au réservoir *N*; le raccord fut plongé dans une cuvette contenant du mercure. La bouteille *N*, qui se trouvait dans le thermostat en même temps que le vase d'éclairement, servait à éliminer l'influence des variations de la pression atmosphérique. Elle avait une capacité de 1 l. environ, était fermée par un bouchon en caoutchouc et était lestée par du mercure, recouvert d'une couche d'eau.

Le thermostat fut maintenu à 25° au moyen d'un régulateur au toluène. L'agitateur était construit d'après le modèle de M. Ostwald; il portait des ailes d'aluminium, mises en mouvement par une petite flamme qui était entourée d'un entonnoir en métal pour ne pas éclairer le thermostat. Cette manière de remuer n'était pas assez efficace; il restait encore, entre les vases *N* et *H*, des différences de température qui se manifestaient par des déplacements de l'eau dans le tube horizontal.

L'appareil tout entier était installé dans une chambre obscure. Le vase d'éclairement était en outre recouvert d'un capuchon en zinc, qui n'était enlevé que pendant quelques instants pour l'illumination (pour l'introduction de l'eau dans le tube et pour l'examen de la sensibilité), ainsi que pour introduire ou retirer le tube à radium. Le tube horizontal était enveloppé de papier noir; les autres tubes étaient couverts de vernis noir, pour autant que la chose était nécessaire.

Dans les premières expériences le tube à radium était introduit sans couverture dans le tube du vase d'éclairement; plus tard il fut enduit de vernis noir pour arrêter toute lumière due à la phosphorescence.

Dans certaines épreuves l'équilibre entre le mélange gazeux et le liquide ne s'établit que fort lentement; dans d'autres nos constatâmes que le mélange gazeux était trop peu sensible à la lumière. Il se produisit parfois des déplacements du ménisque que nous ne pûmes attribuer à aucune cause connue.

Pour examiner la sensibilité nous plaçions une bougie à une distance

Tableau I. [1])

Durée en heures.	Situation du ménisque en mm.	Durée en heures.	Situation du ménisque en mm.
0	110		
1,5	109	95,5	215 Radium retiré
3,5	110	101,5	215
5,5	109	120,5	218,5
23	112 Radium introduit.	144,5	220,5 Radium introduit
25,5	111,5	146,5	222
27,5	127	150,5	246
30	129	167	308
47	141	170	312 Radium retiré
53,5	150	172	312,5
71	176		

Tableau II. [2])

Durée en heures.	Situation du ménisque en mm.	Temp.	Durée en heures.	Situation du ménisque en mm.	Temp.
0	490	25°,2	98,75	548	25°,23
20	487,5	25 ,5	120,25	535 Ra. intr.	25 ,24
26,5	490	25 ,4	139,75	600	25 ,23
45,5	495	25 ,3	141,75	608 Ra. ret.	25 ,3
49,5	504	„	146,75	611	25 ,27
50,5	497,5	25 ,25	164,25	612,5	25 ,25
68	508 Ra. intr. [3])	25 ,2	170,25	601 Ra. intr.	25 ,26
74,5	503	25 ,27	178,25	600	25 ,2
92	559	25 ,2	188,25	637	25 ,3
95,25	559 Ra. ret.	25 ,23	190,75	657 Ra. ret.	25 ,3
96,25	558 [4])	25 ,35	193,25	654	25 ,25

[1]) Tube à radium découvert.

[2]) Tube à radium couvert de vernis noir.

[3]) En représentant graphiquement ces nombres, on remarque que les lignes reliant les observations faites en présence du radium sont parallèles; ce qui veut dire que dans les deux épreuves la vitesse de l'action a été la même.

[4]) Ici nous avons ajouté de l'eau au thermostat.

de $^1/_2$ m. de la fenêtre du thermostat, après avoir enlevé le capuchon en zinc du récipient d'épreuve; puis nous observions le déplacement du ménisque.

Les tableaux I et II ci-contre font connaître le résultat des expériences.

Les expériences qui viennent d'être décrites n'étaient que préliminaires. Elles avaient donné un résultat positif, mais nous avaient engagés à les répéter avec un appareil perfectionné et une quantité de radium plus grande. Nous avions reconnu d'ailleurs que les irrégula-

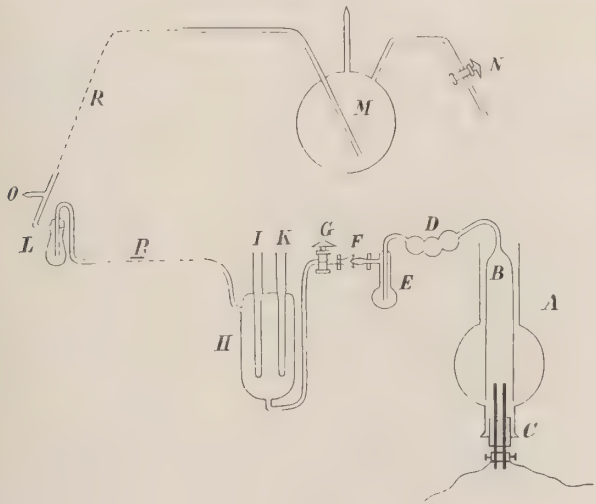


Fig. 2.

rités devaient être attribuées à de petites différences de température entre les diverses parties du thermostat. Voilà pourquoi, dans les recherches suivantes, nous avons pris soin d'agiter énergiquement et sans interruption pendant toute la durée des expériences. De plus nous avons maintenu constant le niveau de l'eau dans le thermostat. Nous avons, en outre, remplacé la bouteille à bouchon en caoutchouc, qui devait servir à nous mettre à l'abri de variations barométriques, par un ballon en verre *M* (fig. 2) [1]), d'une capacité d'environ 1,5 l., soudé en *R* au tube du flacon laveur *L*. Tout comme dans nos

[1]) La figure a été dessinée à $^1/_{10}$ à peu près de la vraie grandeur.

expériences préliminaires, le mélange gazeux fut préparé par voie électrolytique et conduit pendant 4 × 24 heures à travers l'appareil. Le ballon *M*, qui était placé dans le même thermostat que le récipient *H*, ne contenait ni mercure, ni eau. Le mélange gazeux ne venait donc en contact qu'avec de l'eau (en *D*, *E*, *H* et *L*) et avec du verre, et pendant les expériences il était séparé de l'air ambiant par les robinets en verre *N* et *G*.

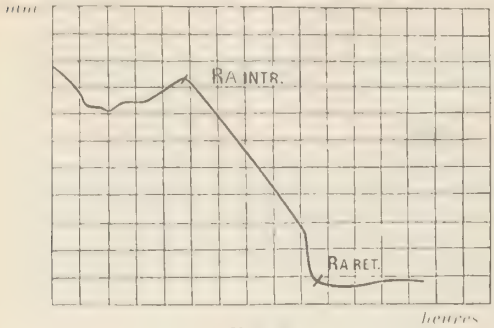


Fig. 3.

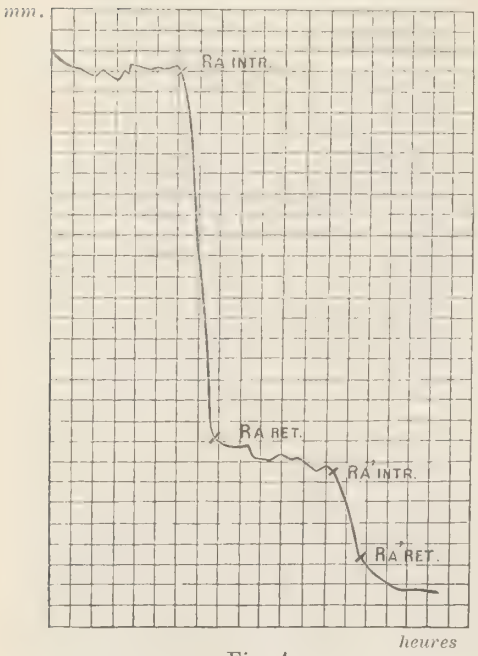


Fig. 4.

Pour les autres particularités nous renvoyons à la description de l'appareil précédent.

M. le Dr. Brester, de Delft, eut l'obligeance de nous céder une préparation de radium plus active que la nôtre [1]); nous lui en sommes fort reconnaissants.

Dans le récipient *H*, qui était plus grand que dans nos premières expériences (sa capacité était maintenant de 285 cm³.), étaient scellés deux tubes *I* et *K*, dont la moitié inférieure était à parois excessivement minces [2]).

[1]) Nous comptons faire d'autres expériences pour comparer le degré d'activité des deux préparations.

[2]) Cet appareil, tout comme le premier, avait été construit par M. G. B. Salm, à Amsterdam.

Nous pouvions ainsi examiner l'action combinée des deux préparations et celle des préparations prises séparément.

Nos 5 mg. de bromure de radium étaient enfermés dans un petit tube à parois fort minces, recouvert d'un vernis noir et enveloppé en outre de papier noir. La préparation de M. le Dr. Brester se trouvait dans un petit étui en papier noir. Cette couverture écartait absolument toute phosphorescence. Les tableaux suivants III et IV, qui sont représentés graphiquement dans les figures 3 et 4 ci-contre, font connaître les résultats de nos séries de mesures, faites avec des mélanges de chlore et d'hydrogène de diverse sensibilité.

Tableau III.

Expérience du 21 févr. au 5 mars 1906; voir fig. 3.

Durée en heures.	Situation du ménisque.	Temp.	Durée en heures.	Situation du ménisque.	Temp.
0	148	25,00	58	167	—
12,1	160	25,00	68	168	—
17,4	173	25,00	72	164	25,00
24	174	—	82	158	24,90
34	175	—	85,25 [1])	152	25,00
43,25	175	24,97	94	148	25,00
48	170				
Les deux préparations sont introduites.					
96	154	—	139,5	230	25,00
106	170	25,00	158	244	25,00
112,2	177	25,00	177,5	272	25,2
119	184	—	178	294	25,1
130,75	200	25,00	184,4	299	25,1
140	215	25,00			

[1]) A cet instant les préparations étaient déjà introduites, mais, ainsi que nous nous en aperçûmes après quelques heures, elles n'avaient pas pénétré jusque dans la moitié inférieure des tubes *I* et *K*.

Durée en heures.	Situation du ménisque.	Temp	Durée en heures.	Situation du ménisque.	Temp.
Les deux préparations sont retirées.					
186	305	25,1	211,75	304,5	25,1
189,25	305	25,1	216,1	304	25,1
201,75	304	25,1	226,15	302,5	25,1
206	304	25,1	240	302,5	25,1
208	304	25,1	261	304,5	25,0

Tableau IV.

Expérience du 19 mars au 3 avril 1906; voir fig. 4.

Durée en heures.	Situation du ménisque.	Temp.	Durée en heures.	Situation du ménisque.	Temp.
0	344	—	72	352	—
6	356	25,05	81	360	25,04
14,15	357	—	87	358	—
23,5	361	—	96	348,5	—
30,5	366	25,1	105	360	25,03
38,5	369	—	110	357	—
47,5	360	—	120	356	—
50,4	368	—	122	359	25,04
62	367	—			
Les deux préparations sont introduites.					
124	372	—	144,5	571	—
131,25	422	25,06	148	625	—
134,35	448	—	155	719	25,05

Durée en heures.	Situation du ménisque.	Temp.	Durée en heures.	Situation du ménisque.	Temp.
Les deux préparations sont retirées.					
158	720	—	220,25	733	25,1
168	723	—	225	734,5	25,1
172	723	25,04	230,75	734	—
177,25	723	25,04	240	736	—
183	723	—	244	740	25,1
191,5	724	-	249	745	25,12
196,25	735	25,1	255,5	746	—
198	738	25,08	263,75	743	—
201	738	25,08	268	743	—
207	740	—	270,5	743	25,1
215,5	734	—			
Notre préparation est introduite.					
271,5	743	—	278	765	—
273,15	748	—	288	823	—
275	758	—	290	833	25,13
Notre préparation est retirée.					
291,5	835	—	312,25	856	—
292,5	836	—	314	856	25,14
296,5	844	—	326	862	—
299,5	847	—	336	865	—
302,5	848	—	362	867	-

Il est possible de calculer approximativement les quantités du mélange gazeux qui sont transformées en acide chlorhydrique. Le diamètre intérieur du tube *P* était de 2 mm. Dans l'expérience du tableau III le

ménisque s'était déplacé, en 90 heures environ, de 151 mm., ce qui correspond à 0,175 cm^3. Pour les expériences du tableau IV les quantités transformées étaient respectivement de 1,13 cm^3. (les deux préparations, pendant 33 heures) et 0,283 cm^3. (notre préparation seule, pendant 20 heures). Le mélange gazeux était plus sensible dans les expériences du tableau IV que dans celles du tableau III.

---

2. L'action du radium sur le gaz tonnant.

L'année dernière MM. Bergen Davis et C. W. Edwards [1]) ont communiqué des expériences préliminaires relatives à l'influence du radium sur le gaz tonnant (mélange d'hydrogène et d'oxygène en parties équivalentes). Voici, traduit littéralement, tout ce qu'ils rapportent:

„L'appareil consistait en deux petits ballons de même volume, reliés entr'eux par un tube capillaire. Une gouttelette de mercure se trouvait dans le capillaire, pour indiquer la vitesse de l'action. L'un des ballons était pourvu de deux électrodes, dans le but de mesurer le degré d'ionisation produit par le radium. Environ 4 mg de bromure de radium pur furent placés, sur une lamelle de platine, dans le ballon contenant les électrodes.

„Les deux ballons furent remplis d'un mélange sec d'oxygène et d'hydrogène et du pentoxyde de phosphore fut introduit dans tous deux pour absorber l'eau. Le radium contenu dans le premier ballon produisit la combinaison des deux gaz avec formation d'eau. La diminution de la pression dans ce ballon était accusée par le déplacement de l'index de mercure, dans le tube capillaire, vers le ballon contenant le radium. La vitesse du déplacement de l'index de mercure indiqua la disparition de 36×10^{-7} cm^3. de gaz par seconde."

On sait d'autre part, par les observations de MM. Runge et Bodländer [2]), et de MM. Ramsay et Soddy [3]), que l'eau est décomposée par des sels de radium qui y sont dissous.

Voilà pourquoi nous avons voulu étudier l'équilibre qui tend à s'éta-

---

[1]) *Journ. Soc. Chem. Ind.*, 24, 266, 1905.

[2]) Giesel, *Ber. deutsch. Chem. Ges.*, 35, 3605, 1902.

[3]) *Proc. Roy. Soc.*, 72, 204, 1903.

blir, à ce qu'il paraît, entre l'hydrogène, l'oxygène et l'eau, en contact avec une combinaison du radium.

En premier lieu nous avons examiné l'influence possible des rayons du radium les plus pénétrants, dans le même vase que celui qui nous servit pour les expériences du chapitre précédent. Le gaz tonnant fut préparé par électrolyse d'un solution à 15 % de soude caustique (puriss. e natrio de MERCK), en employant des électrodes en platine.

Le mélange gazeux, qui fut lavé dans une solution d'iodure de potassium, mais non séché, fut conduit à travers l'appareil pendant 1 × 24 heures. La température était de nouveau 25°. Les observations sont communiquées au tableau suivant:

Durée en heures	Situation du ménisque	
0	37	
5	32	
14	32	
19	29	Radium introduit.
29	27	
36	27,5	
51	26	
61	29	
85	32	
90	30	Radium retiré.
100	30	
109	30	

Au bout de 71 heures il n'y avait donc pas la moindre action à constater.

Comme MM. DAVIS et EDWARDS avaient mis leur bromure de radium directement en contact avec le gaz tonnant, nous avons présumé que c'est à cette circonstance que devait être attribuée la différence entre leurs observations et les nôtres. On sait, en effet [1]), que les rayons α, qui de toutes les radiations émises par le radium ont le plus grand pouvoir ionisant, n'ont qu'un faible pouvoir de pénétration. Ainsi p. ex. ils sont complètement absorbés par une plaque d'aluminium ou de mica de 0,1 mm. d'épaisseur ou par une simple feuille de papier à lettres.

[1]) Voir p. ex. RUTHERFORD, Radio-Activity, Second Edition, 1905, 111—113.

Dans nos expériences suivantes la préparation de radium (du Dr. BREWSTER) fit mise en contact direct avec le mélange gazeux.

A cet effet nous avons remplacé le récipient *H* (voir fig. 2) par un récipient plus petit de même forme à peu près, mais non pourvu des deux petits tubes *I* et *K*, et fermé au-dessus par un bouchon bien rodé, que nous avons muni, pour plus de précautions, d'une obturation au mercure.

Nous avons employé d'abord du gaz humide.

Après avoir fait d'abord une expérience sans intervention de radium, nous avons introduit la préparation de radium au moyen d'un petit tube en verre [1]), ouvert à un bout et portant une mince tige terminée en crochet; puis nous avons laissé circuler le mélange gazeux pendant 4 × 24 heures.

Après que les robinets furent fermés et que les premières oscillations eurent près fin, nous avons fait les observations suivantes:

Durée en heures	Situation du ménisque
0	249
6	246
15 1/2	253
30 1/2	253
39	258
55	263
64	264

Puis nous avons employé du gaz détonant, séché au moyen de chlorure de calcium; quelques fragments de chlorure de calcium étaient introduits dans le récipient. Le radium fut introduit de nouveau au moyen du tube ouvert. Comme liquide manométrique nous avons pris de la paraffine liquide.

Voici ce que nous avons trouvé:

Durée en heures	Situation du ménisque
0	559
26	560
50	561
74	567

et après une nouvelle installation du ménisque:

[1]) Et non sur une lame de platine, comme MM. DAVIS et EDWARDS.

Durée en heures	Situation du ménisque
0	254
7	257
24	261
74	265

On voit par là que ni le gaz tonnant humide ni celui séché au moyen de chlorure de calcium ne manifestaient une influence sensible de la part du radium. Même si cette action avait été de l'ordre de celle mentionnée par MM. Davis et Edwards, nous aurions dû l'observer immédiatement par la voie que nous avons suivie. Ces auteurs rapportent notamment une diminution de volume de 36×10^{-7} cm^3. par seconde, soit 0,013 cm^3. par heure. Avec les dimensions de notre tube manométrique cela aurait dû donner un déplacement du ménisque d'environ 4 mm. par heure. La différence aurait été compréhensible si la préparation employée par ces auteurs avait été beaucoup plus active que la nôtre; mais cela est peu probable, puisqu'ils ont employé 4 mg. de bromure de radium „pur" et que la préparation du Dr. Brester était plus active que nos 5 mg. de bromure de radium „pur" de Sthamer.

Finalement nous avons repris nos expériences avec un mélange gazeux qui avait été séché au moyen de pentoxyde de phosphore. Le vase *H* contenait d'ailleurs une petite quantité de cette substance hygroscopique. Le tableau suivant fait connaître la marche du manomètre.

Durée en heures	Situation du ménisque
0	125
12	125
21	130
26	130
31	126
36	124
45	127
48	126
55	130
70	132
72	139
93	137
98	137

Comme MM. Davis et Edwards ont introduit leur radium sur une lame de platine dans le ballon, qui était d'ailleurs muni de deux électrodes en platine pour la mesure de la conductibilité, il n'est pas impossible que dans leurs expériences le platine ait eu quelque influence. Voilà pourquoi nous avons repris l'épreuve précédente, après avoir introduit dans le récipient un morceau de platine d'environ 5 cm^2. de surface. Mais, ici encore, nous n'avons pu constater aucune influence, ni du radium, ni du platine, comme le prouve le tableau suivant:

Durée en heures	Situation du ménisque
0	117
10	117
19	117
34	112
43	114
58	118
70	113
92	122
96	122

Ainsi donc, la préparation de radium que nous avons employée, et qui, enfermée dans du verre, avait manifesté une forte action sur un mélange de chlore et d'hydrogène, n'exerça pas d'action notable sur le gaz détonant ordinaire, même quand elle était mise directement en contact avec lui.

3. L'action du radium sur une solution d'iodoforme dans le chloroforme.

Quelques expériences préliminaires nous avaient appris que les rayons du radium produisaient probablement une décomposition d'une solution d'iodoforme moins avancée que les rayons lumineux [1]).

[1]) Nous avons reconnu notamment que la lumière met en liberté tout l'iode de l'iodoforme dissous dans le chloroforme, s'il y a assez d'oxygène en présence (voir *Chem. Weekbl.*, 1905, 799). Au sujet de l'action de la lumière sur des solutions d'iodoforme, voir aussi: Humbert, *Journ. de pharm. et de chim.*, (3), 28, 272, 1855; 29, 352, 1856. Schaer, *Schw. Wochenschr. Pharm.*, 32,

Nous avons fait une expérience dans un petit ballon scellé, chauffé dans l'obscurité dans un thermostat à 25°.

Le petit ballon, contenant un petit tube en verre mince avec 5 mg. de bromure de radium (pur de STHAMER) [1]), fut d'abord rempli d'oxygène; puis nous y avons introduit la moitié environ d'une solution de 1 g. d'iodoforme dans 100 g. de chloroforme, et le goulot étiré fut fermé.

Un second petit ballon fut traité de la même façon, et, après y avoir introduit le reste de la solution, nous l'avons placé dans le même thermostat, mais à une distance assez grande pour que le radium ne pût avoir une action sur cette solution.

La solution de contrôle resta incolore pendant quelques jours (l'observation se fit en quelques secondes à la lumière d'une bougie), tandis que celle qui était exposée au rayonnement du radium était déjà nettement colorée le lendemain; plus tard la solution de contrôle se colora également.

A des intervalles de temps d'une semaine au moins nous avons retiré de ces ballons, avec grande précaution, au moyen de pipettes à pointes très effilées, de petites quantités (± 3,5 g.) des solutions, et nous les avons transportées dans un petit entonnoir à décantation cylindrique, contenant une solution (0,01-normale) d'hyposulfite, et pesées. Les ballons furent refermés immédiatement et replacés dans le thermostat; la solution d'hyposulfite fut secouée avec la solution d'iodoforme séparée, et titrée avec une solution 0,01-normale d'iode. Voici le résultat de ces analyses.

Durée en jours.	Quantité d'iode séparée par gramme de solution	
	sans radium	avec radium
7	1,80	1,6
14	1,7	2,8
21	1,7	6,4
28	1,8	7,1
42	—	7,1
49	—	7,2
56	—	7,2

385 (*Chem. Centr. Bl.*, 1894, II, 924). FLEURY, *Journ. de pharm. et de chim.*, (6), 6, 97, 1897; BOUGAULT, *ibid.*, (6), 8, 213, 1898. KREMERS et KOSKE, *Pharm. Arch.* I, n°. 10, 1898. SCHUYTEN, *Acad. Roy. de Belg.*, 1900, 625.

[1]) La même préparation qui servit à nos expériences antérieures.

Ainsi donc les 0,500 gr. d'iodoforme de la solution de contrôle avaient abandonné 91 mg. d'iode; par contre, la solution qui avait été soumise à l'influence des rayons du radium en avait abandonné 364 mg., sur les 484 contenus dans les 500 mg. d'iodoforme. Dans la solution décomposée spontanément, 18,8 % de l'iode étaient donc mis en liberté; dans la solution exposée au rayonnement du radium 75,2 %.

Bien que les $^3/_4$ de la quantité totale d'iode eussent été mis en liberté, la couleur de la solution n'était pas aussi foncée qu'on ne s'y serait attendu, eu égard à la coloration obtenue par l'exposition de solutions d'iodoforme à la lumière solaire. Comparée à cette dernière, la coloration était d'ailleurs beaucoup plus rouge. Un fait remarquable dans nos expériences, et qui demande encore à être expliqué, c'est que la solution non soumise à l'influence du radium atteignit un état d'équilibre, après la décomposition très rapide de 18,8 %, tandis que l'équilibre ne fut atteint qu'au bout de 4 semaines pour la solution exposée aux rayons du radium, après que les $^3/_4$ de la quantité d'iode présente eurent été mis en liberté, ou mis peut être sous une forme faiblement combinée.

Helder, juillet 1904—juillet 1906.

SUR LE PHÉNOMÈNE DE THOMSON DANS LE MERCURE

PAR

C. SCHOUTE.

Sir William Thomson (Lord Kelvin) a prouvé, d'abord par des considérations théoriques (1851), plus tard par l'expérience (1856), que dans un conducteur homogène où la température n'est pas uniforme, et qui est traversé par un courant électrique, le courant développe — ou absorbe — une autre quantité de chaleur encore que la chaleur qui correspond à la loi de Joule. Il admet que pour chaque élément de volume du conducteur cette quantité de chaleur, ce qu'on appelle l'effet Thomson, est proportionnelle à l'intensité du courant, à la chute de température, et à une constante déterminée par la nature du corps. On doit se figurer des éléments de volume cylindriques, dont les dimensions transversales sont petites par rapport à la longueur.

Cette hypothèse constitue le principe sur lequel sont basées les considérations suivantes. C'est certainement l'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire, et jusqu'à présent elle n'a jamais été contredite par les expériences. On fera bien toutefois de ne pas perdre de vue que des écarts possibles de cette hypothèse figureraient comme erreurs dans les résultats.

Considérons un conducteur cylindrique, où la température est uniforme dans chaque section normale, et figurons-nous quelque part un axe de coordonnées OX, dont l'origine est d'ailleurs arbitraire. Si nous appelons :

u la température,
q la section du conducteur,
p la surface par unité de longueur,

i l'intensité de courant,
w la résistance,
σ la constante de THOMSON,
k la conductibilité calorifique,
h la constante d'échange calorifique (par la surface), par unité de surface et pour une différence de température de 1° avec le milieu ambiant,
et J l'équivalent mécanique de la chaleur,

l'état final, qui s'établit quand les circonstances sont maintenues constantes, est caractérisé par l'équation :

$$qk\frac{d^2u}{dx^2} + i\sigma\frac{du}{dx} - phu + \frac{i^2w}{Jq} = 0. \tag{1}$$

Dans cette équation on suppose que k, i, σ, h et w sont indépendants de la température, dans les limites de l'expérience.

De cette équation on peut déduire une méthode de détermination de σ fort simple, recommandable probablement dans certains cas. Si nous maintenons à des températures déterminées, mais différentes, les deux extrémités du conducteur, et que nous évitions autant que possible toute conductibilité de chaleur vers l'extérieur, et toute convection ou rayonnement pour la portion intermédiaire, la chute de température est sensiblement linéaire et l'état stationnaire est déterminé par l'équation:

$$\frac{d^2u_{i=0}}{dx^2} - m^2u_{i=0} = 0.$$

Mais, quand on lance un courant à travers le conducteur, il se développe dans un élément de volume qdx, pendant l'élément de temps dt, la quantité de chaleur

$$\frac{i^2w}{qJ}dxdt + i\sigma\frac{du}{dx}dxdt.$$

On peut toujours choisir la direction du courant de telle sorte que, pour la partie considérée du conducteur, les deux termes aient des signes différents, et l'on peut toujours régler l'intensité du courant de façon que la somme des deux termes soit nulle pour un élément de volume déterminé. Mais alors on aura aussi que, pour les éléments de volume

environnants, et pour toute la portion du conducteur qui n'est pas trop rapprochée des extrémités, où a lieu le changement de température, la chaleur totale produite par le courant sera nulle, car l'expérience fut disposée de telle façon que dans ce domaine le $\frac{du}{dx}$ était constant. Dans ce cas on a donc

$$\sigma = -\frac{i_0 w}{Jq} \frac{1}{\frac{du}{dx}},$$

où i_0 représente l'intensité de courant particulière pour laquelle la chaleur totale produite par le courant est nulle.

Les avantages de cette méthode sont, outre les avantages ordinaires de toute méthode de réduction à zéro:

1°. qu'après avoir lancé le courant on n'a pas à attendre jusqu'à ce qu'il se soit établi un état stationnaire,

2°. qu'on peut mesurer la somme des variations de température sur une grande étendue du conducteur au lieu d'une petite.

Mais il me paraissait peu recommandable d'employer cette méthode, parce que dans des mesures relatives au mercure l'intensité de courant pour laquelle les deux phénomènes de Joule et de Thomson se contrebalancent est beaucoup trop faible, dans un conducteur de dimensions convenables, pour que la chaleur développée par l'un et l'autre effet soit assez considérable. La méthode n'a donc pas eu d'application pratique.

Remplaçons dans l'équation (1):

$$\frac{i\sigma}{qk} \text{ par } 2j$$

$$\frac{ph}{qk} \quad \text{"} \quad m^2$$

$$\frac{i^2 w}{Jq^2 k} \quad \text{"} \quad n;$$

l'équation prend alors la forme qui a déjà été traitée par Verdet:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2j\frac{du}{dx} - m^2u + n = 0. \tag{2}$$

M. Petersson [1]) a fait usage de cette équation dans ses mesures, après l'avoir déduite tout au long. La principale différence entre ses mesures et celles qui vont suivre consiste en ceci, qu'il a mesuré la grandeur m, qui est l'effet de la conduction externe, de la convection et du rayonnement, tandis que dans mes expériences cette grandeur était rendue aussi petite que possible, de sorte qu'elle pouvait être négligée dans les calculs.

S'il est permis de négliger m^3 par rapport à m et j^2 vis à vis de j, l'intégrale générale de l'équation (2) peut s'écrire, en introduisant les conditions $u = 0$ pour $x = l$ et $u = U$ pour $x = 0$:

$$u = U(1 - jx)\frac{l - x}{l} + \frac{1}{6}nx(l - x)[3 + j(l - 2x)]. \qquad (3)$$

On satisfait à ces conditions dans les expériences en comprenant une partie du conducteur, de longueur l, entre deux autres dont on maintient la température constante, 0 pour l'une, U pour l'autre. Je suppose que 0° soit la température de l'enceinte.

Le dernier terme de (3) est évidemment très petit, et il est surtout permis de le négliger si l'on mesure la température à peu près à égale distance des deux extrémités: là $l - 2x$ est petit. Si nous laissons passer le courant tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, pendant un temps suffisamment long, la différence $\Delta_{Th} u$ entre les températures finales, en une même section voisine du milieu ou au milieu même, est, suivant (3),

$$\Delta_{Th} u = 2\,Uj\frac{x(l - x)}{l}.$$

Les grandeurs $\Delta_{Th} u$ et U peuvent être déterminées avec une précision suffisante: mais on ne peut pas dire la même chose de x et l, à cause de l'incertitude concernant l'allure des températures aux extrémités. D'ailleurs, la grandeur $j = \frac{i\sigma}{qk}$, où k est le coefficient de conductibilité calorifique, est également difficile à déterminer.

Voilà pourquoi j'ai mesuré dans la même section la différence entre

[1]) A. Petersson, Ueber Messungen des Thomson-effectes, Inaug. Diss., Zürich, 1895.

la température dans le cas où il n'y a pas de courant et la moyenne entre les deux températures correspondant à l'une et à l'autre direction du courant. Cette différence est

$$\Delta_J u = \frac{1}{2} n x (l - x).$$

On a donc

$$\frac{\Delta_{Th} u}{\Delta_J u} = \frac{2 j \frac{U}{l} x (l - x)}{\frac{1}{2} n x (l - x)} = \frac{2 \sigma J q \frac{U}{l}}{i w},$$

de sorte que

$$\sigma = \frac{i w}{2 J q \frac{U}{l}} \cdot \frac{\Delta_{Th} u}{\Delta_J u}.$$

Dans cette expression la conductibilité calorifique n'intervient plus. Les grandeurs i, q, $\Delta_{Th} u$ et $\Delta_J u$ peuvent être mesurées d'une manière suffisamment précise; pour le mercure w est exactement connu. La valeur de $\frac{U}{l}$ a été déterminée par voie indirecte. Quand la variation de la température aux limites est telle que la distribution des températures dans le conducteur est symétrique par rapport au milieu, on peut remplacer $\frac{U}{l}$ par la valeur de $\frac{du}{dx}$ pour la section considérée, voisine de la section médiane (fig. 1, p. 148).

La difficulté des mesures réside essentiellement dans la petitesse de la grandeur

$$\Delta_{Th} u = \frac{i \sigma}{q k} \frac{U}{l} x (l - x).$$

On ne peut pas rendre le courant trop intense, sans que la chaleur de Joule ne trouble trop fortement la symétrie de la distribution des températures dans le conducteur. On ne peut pas donner à ce dernier une trop grande section, car alors il n'y aurait plus égalité de température en tous les points d'une même section. En augmentant la longueur du conducteur, on augmenterait, il est vrai, dans la même proportion la

valeur du facteur $\frac{x(l-x)}{l}$, mais on augmenterait en même temps la perte de chaleur par rayonnement, et cette perte doit toujours rester petite. Il était donc tout naturel de rendre $\frac{U}{l}$ aussi grand que possible, c. à d. d'opérer avec une forte chute de température, en donnant aux deux extrémités des températures fort différentes.

Les températures dans le mercure, je les ai mesurées en observant la différence de potentiel thermoélectrique entre le mercure lui-même et le platine. J'ai reconnu que les propriétés thermoélectriques de ces deux métaux ne variaient pas notablement pendant un temps même assez

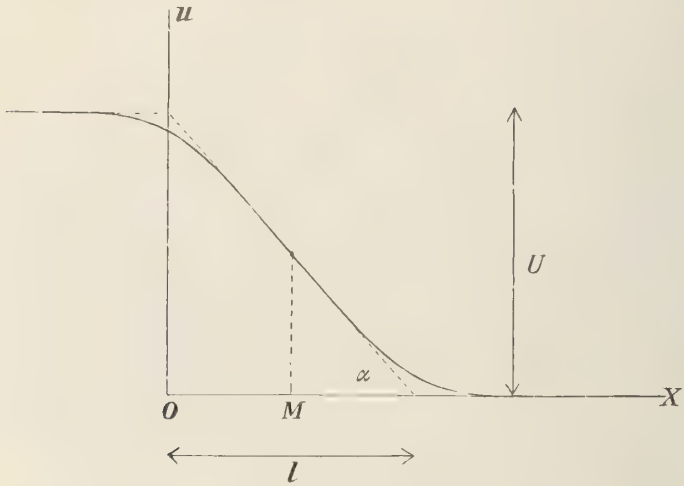


Fig. 1.

long, mais que la différence de potentiel variait considérablement d'un échantillon de platine à un autre. J'ai examiné avec soin le pouvoir thermoélectrique pour un échantillon déterminé. Je me suis servi à cet effet d'un élément thermoélectrique mercure-platine, composé d'un tube de verre rempli de mercure, entouré à sa partie supérieure d'un matras où je pouvais faire bouillir divers liquides sous une pression variable. L'extrémité inférieure du tube était placée dans de la glace fondante. Dans le tube étaient soudés deux fils de platine, un à chaque extrémité, et ces fils étaient reliés à un galvanomètre. J'ai trouvé que, quand

les températures aux endroits de contact étaient 0° et t°, on avait la relation,

$$E = 418{,}8\, t + 0{,}314\, t^2,$$

E représentant l'écart galvanométrique en mm., pour une sensibilité déterminée de l'instrument. C'est de ce platine que je me suis servi dans la mesure de la chute de température.

Les fils de platine que j'ai employés pour mesurer les grandeurs $\Delta_{Th} u$ et $\Delta_J u$ n'étaient pas du même échantillon que ci-dessus; ils étaient en platine à 10 % d'iridium, et avaient été fournis par la maison HERAEUS, comme particulièrement convenables pour ce genre d'expériences. Puisque je n'avais besoin de connaître que le rapport des grandeurs $\Delta_{Th} u$ et $\Delta_J u$, et que dans ce rapport les constantes thermoélectriques sont d'une importance tout à fait négligeable, je n'ai pas eu besoin de connaître ces constantes pour ces fils.

En prenant un conducteur en U, placé verticalement, et dont les deux branches étaient placées inférieurement, à la même hauteur, dans un bain de température basse et constante, tandis que les deux extrémités supérieures étaient entourées, à la même hauteur, d'un bain maintenu à une température élevée et constante, il a été possible de mesurer $2\,\Delta_{Th} u$ [1]). Dans chacune des branches du tube en U, et autant que possible à mi-hauteur entre les bains de température constante, j'ai soudé un fil de platine iridié, de l'espèce dont j'ai parlé. En reliant ces fils à un galvanomètre sensible, lorsque le courant avait traversé le tube pendant un temps assez long, j'observais au galvanomètre un écart qui correspondait à $\pm\, \Delta_{Th} u$. En renversant le courant, et attendant de nouveau aussi longtemps qu'il était nécessaire, le second écart répondait à $\mp\, \Delta_{Th} u$. La différence donnait donc $2\,\Delta_{Th} u$.

J'ai mesuré d'une manière analogue la valeur de $2\,\Delta_J u$ en lançant le courant tantôt à travers l'une des branches, tantôt à travers l'autre.

Comme bain à basse température j'ai pris un réservoir où passait un courant d'eau provenant de la conduite; pour la haute température j'ai pris le point d'ébullition d'un liquide: acétone, eau, aniline ou glycérine. Autour de l'extrémité supérieure du tube en U j'avais soufflé un

---

[1]) Dans la communication préliminaire dans *Versl. Kon. Akad.*, 30 sept. 1905, ainsi que dans ma dissertation (Groningue 1906), j'ai écrit par erreur $4\,\Delta_{Th} u$, ce qui fait que j'y ai trouvé pour σ une valeur deux fois trop grande.

petit matras, muni d'un réfrigérant pour le reflux du liquide, qui était mis en ébullition par un courant électrique traversant un mince fil de platine enroulé en spirale.

Afin de pouvoir mesurer la chute de température, un fil de platine était soudé dans chacune des branches, de part et d'autre de la section médiane, à égale distance du milieu. La différence de température entre ces fils fut divisée par leur distance. J'ai déjà dit que ces derniers fils n'étaient pas du même platine iridié que les fils médians. Il s'ensuit que les mesures n'ont pas appris si la chute de température dans les deux branches suivait une loi suffisamment linéaire. Mais des mesures préliminaires ont donné à ce sujet une certitude suffisante. Afin de rendre cette chute linéaire, le tube en U était entouré d'un manteau à vide, qui rendait impossible tout échange de chaleur par conductibilité ou convection. Le rayonnement fut rendu aussi faible que possible, en recouvrant extérieurement d'une couche d'argent les deux branches du tube.

Au moment de faire les lectures au galvanomètre, il était nécessaire de rompre le courant traversant le mercure, autrement le galvanomètre aurait été traversé par un courant dérivé. Il est vrai que ce courant dérivé aurait pu être compensé, mais j'aurais dû me servir à cet effet de résistances plus constantes que celles dont je disposais. Voilà pourquoi le commutateur pour le galvanomètre était combiné avec un interrupteur du courant principal. Dans ce commutateur, les contacts étaient obtenus par la pression élastique de lourdes bandes d'un cuivre rouge bien homogène. Pour tous les autres contacts j'ai appliqué aussi, autant que possible, cuivre sur cuivre. J'ai reconnu que ces contacts étaient bien préférables à des contacts de mercure.

Le galvanomètre était un galvanomètre à miroir, astatique, de Thomson. Après que j'eus remplacé les aimants simples par des systèmes de dix petits aimants, que j'eus pris comme fil de suspension un fil de quartz de $\pm 7\ \mu$, et que j'eus remplacé l'amortissement pneumatique par des amortisseurs en cuivre rouge, l'instrument satisfit aux trois conditions nécessaires pour l'examen: grande sensibilité, courte période d'oscillation, amortissement rapide.

Afin d'éviter l'erreur qui pouvait résulter de changements dans la sensibilité du galvanomètre, j'ai mesuré après chaque observation l'écart produit par un couple thermoélectrique platine-maillechort, dont l'un

des contacts était placé dans un courant d'eau froide, et l'autre dans de la vapeur d'eau bouillante.

Dans mes observations, l'installation fixe du galvanomètre sur les piliers du laboratoire de physique était un énorme avantage. Cet avantage était tout aussi grand d'ailleurs pour l'établissement du tube, parce que des vibrations sensibles de ce tube auraient certainement rendu les mesures impraticables.

Les écarts galvanométriques dans les mesures de $\Delta_{TH} u$ et $\Delta_{H} u$ m'ont appris qu'il n'était pas possible de rendre l'état dans les deux branches du tube en U symétriques au point qu'il ne restât pas une inégalité de température constante entre les deux sections médianes. Comme cette inégalité était gênante malgré sa constance, je l'ai éliminée par une compensation. Je me suis servi à cet effet du même couple thermoélectrique platine-maillechort qui m'a servi pour le contrôle de la sensibilité du galvanomètre. Le circuit fut fermé en reliant deux extrémités homologues à deux points du circuit galvanométrique, de telle façon que le galvanomètre était traversé par un courant égal à celui qui produisait l'écart constant, mais de sens contraire. Dans mes dernières expériences j'ai remplacé avantageusement ce couple thermoélectrique par un accumulateur, avec une grande résistance intercalée dans le circuit.

Une deuxième difficulté provenait des variations de la déclinaison pendant les expériences. Pour éliminer celles-ci j'ai noté le zéro de l'aiguille avant chaque lecture d'écart galvanométrique. Comme cela se faisait avant la rupture du courant traversant le mercure, le zéro de l'aiguille était quelque peu dévié par le champ produit par ce courant. Il était donc nécessaire de combiner des observations faites pour des courants lancés tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre.

L'intensité du courant a été déduite de la différence de potentiel entre les extrémités d'une résistance connue; cette différence de potentiel fut mesurée à l'aide d'un électromètre à quadrants, à cinq boîtes superposées; j'ai employé des piles Weston comme termes de comparaison.

J'ai déterminé la section du conducteur en pesant la quantité de mercure contenue dans une portion déterminée des tubes, dont la longueur était mesurée au cathétomètre.

Dans les quatre premières séries d'observations le liquide du matras était de l'acétone, dont le point d'ébullition est de 57°; dans les quatre suivantes j'ai pris de l'eau. Les cinq séries qui suivirent ont été effectuées à l'aide d'un autre appareil de même construction. Dans les deux premières de ces nouvelles séries j'ai pris de nouveau de l'eau comme liquide bouillant; dans les deux suivantes de l'aniline, qui bout à 180°, et dans la dernière de la glycérine, dont le point d'ébullition est de 290°. L'appareil a parfaitement résisté à cette haute température, mais il a fait explosion par l'effet d'une étincelle de rupture, au moment ou j'interrompis le courant électrique de chauffage.

Pour chaque détermination des grandeurs $\Delta_{Th} u$ et $\Delta_I u$ j'ai lu huit écarts galvanométriques. Chaque fois que le mercure était traversé par un courant dans une des directions, j'ai fait deux lectures au galvanomètre, à un intervalle de cinq minutes et en renversant le commutateur du galvanomètre. Entre deux lectures relatives à des directions contraires du courant dans le mercure j'ai toujours attendu dix minutes.

Dans les tableaux suivants, relatifs à la mesure de $\Delta_{Th} u$, j'ai indiqué par les signes $\|$ et $=$ dans quel sens le courant traversait les branches du tube en U, et par les signes $\perp$ et $\top$ laquelle des deux branches était traversée par le courant. J'ai employé les mêmes signes pour la mesure de $\Delta_I u$. La position du commutateur est indiquée par un des signes $\uparrow$ et $\downarrow$. J'ai fait d'abord quatre lectures pour la détermination de $\Delta_I u$, puis huit pour celle de $\Delta_{Th} u$, puis de nouveau quatre pour $\Delta_I u$. Ce n'est que dans la première série que l'ordre de succession des lectures était autre.

J'ai mesuré l'intensité du courant trois fois dans chaque série. J'effectuais cette opération dans les intervalles entre les lectures au galvanomètre; quant à la chute de température, elle fut mesurée une fois avant et une fois après les mesures de $\Delta_{Th} u$.

Au huit premières séries appartiennent les valeurs suivantes de la section (q) et de la distance (d) entre les fils de platine qui ont servi à la mesure de la chute de température:

$$q = 0{,}866 \text{ cm}^2.$$
$$d = 1{,}168 \text{ cm}.$$

Pour les cinq dernières séries ces valeurs étaient

$$q = 0{,}752 \text{ cm}^2.$$
$$d = 1{,}969 \text{ cm}.$$

Dans toutes les mesures la résistance, entre les extrémités de laquelle j'ai mesuré la chute de potentiel pour déterminer l'intensité du courant principal, était de 0,0503 Ω.

Dans les séries V, VI et IX, pendant les mesures de $\Delta_J u$, j'ai du augmenter de 5,71 Ω la résistance du circuit galvanométrique, qui était de 4,05 Ω, parce que les écarts galvanométriques auraient été trop grands.

Pour donner une idée de l'allure des mesures je communique in extenso, dans les pages suivantes, une série d'observations.

Liquide bouillant : aniline

Compensation pour 9770 Ω

Instant de l'observation		Galvan. au repos	Galvan. dévié	Différence
$10^h 10$	‖ ↓	457,4	478,6	21,2
10 15	‖ ↑	458,0	430,7	27,3
10 25	= ↓	451,2	425,3	25,9
10 30	= ↑	453,0	487,8	34,8
				$4\,\Delta_{Th}\,u = 109,2$
10 45	⊥ = ↓	454,0	342,0	112,0
10 50	⊥ = ↑	455,0	561,0	106,9
11 00	⊤ = ↓	452,7	586,8	134,1
11 05	⊤ = ↑	453,6	312,8	140,8
11 15	⊥ ‖ ↓	445,7	315,0	140,7
11 20	⊥ ‖ ↑	446,2	593,8	147,6
11 30	⊤ ‖ ↓	450,3	555,2	104,9
11 35	⊤ ‖ ↑	450,3	352,0	98,3
				$8\,\Delta_J\,u = 965,3$
11 50	‖ ↓	456,8	478,0	
11 55	‖ ↑	456,8	429,0	
12 05	= ↓	448,7	421,3	
12 10	= ↑	448,0	482,3	
				$4\,\Delta$

Première mesure de la chute de température (200 Ω)

	Galvanomètre		Galvanomètre
	392,0		526,0
$A_1 A_3$	528,0	$B_1 B_3$	394,7
	392,0		526,0
	136,0		131,3

Première mesure de l'intensité du courant (effet Thomson).

	Electromètre		Electromètre
	577,9		326,3
Weston 7	229,5	Courant	486,4
	577,8	principal	325,4
	348,3		160,5
	578,8		490,0
Weston 8	231,3	Courant	327,3
	578,9	principal	488,6
	347,5		162,0

Température de la circulation d'eau: 15,8°.

Deuxième mesure de l'intensité de courant (effet Joule).

	Electromètre		Electromètre
	579,0		324,4
Weston 8	231,2	Courant	485,2
	579,3	principal	324,9
	347,9		160,5
	229,0		329,8
	578,2	Courant	489,4
	229,4	principal	329,7
	349,0		159,7

Température de la circulation d'eau : 16,3°.

Troisième mesure de l'intensité du courant (effet THOMSON).

	Electromètre		Electromètre
	578,1		487,8
Weston 8	234,3	Courant	327,7
	579,0	principal	487,6
	344,2		160,0
	234,3		330,6
Weston 7	581,6	Courant	492,6
	234,6	principal	331,0

Température de la circulation d'eau : 16,3°.

Deuxième mesure de la chute de température (200 Ω).

	Galvanomètre		Galvanomètre
	385,0		518,0
$A_1 A_3$	520,3	$B_1 B_3$	387,2
	385,0		518,0
	135,3		130,8

	Galvanomètre
	378,6
Circuit de comparaison (900 Ω)	528,3
	378,6
	149,7

RÉSULTATS.

Série n°.	$\Delta_{Th} u$ (en degrés de l'échelle)	$\Delta_J u$ (en degrés de l'échelle)	i_{Th} (en ampères)	i_J (en ampères)	$(\Delta_J u)_{i_{Th}} = \Delta_J u \frac{i_{Th}^2}{i_J^2}$ (en degrés de l'echelle)	$\frac{U}{l}$ = chute de temp. (en degrés par cm.)	$\sigma = \frac{i\omega}{2J_q} \frac{\Delta_{Th} u}{(\Delta_J u)_{i_{Th}}} \frac{U}{l}$	T = temp. abs.	$\frac{\sigma}{T} . 10^{10}$
I	10,71	108,9	10,65	9,68	127,0	$\frac{9,51}{1,168}$	— 0,00000148	305	— 49
II	11,36	108,1	10,62	9,64	131,2	$\frac{9,32}{1,168}$	— 0,00000155	305	— 51
III	14,52	242,8	14,97	14,38	263,3	$\frac{9,12}{1,168}$	— 0,00000143	305	— 47
IV	14,96	287,3	16,02	16,55	305,2	$\frac{9,22}{1,168}$	— 0,00000134	305	— 44
V	21,61	126,7	11,14	10,88	132,9	$\frac{17,48}{1,168}$	— 0,00000165	326	— 51
VI	21,70	137,9	11,68	11,40	145,0	$\frac{17,40}{1,168}$	— 0,00000160	326	— 49
VII	28,65	242,7	15,46	11,94	260,1	$\frac{17,19}{1,168}$	— 0,00000157	326	— 48
VIII	26,50	199,6	14,33	13,70	217,4	$\frac{17,70}{1,168}$	— 0,00000158	326	— 48
IX	20,8	324	13,2	13,1	331	$\frac{14,4}{1,97}$	— 0,00000180	331	— 54
X	15,5	184	9,9	9,8	187	$\frac{14,3}{1,97}$	— 0,00000180	331	— 54
XI	27,5	123	9,4	9,3	126	$\frac{30,6}{1,97}$	— 0,00000217	373	— 58
XII	40,6	286	14,5	14,3	292	$\frac{29,7}{1,97}$	— 0,00000217	373	— 58
XIII	75,3	422	15,4	15,2	433	$\frac{36,1}{1,97}$	— 0,00000248	427	— 58

Voici quelle est la signification de σ : lorsqu'une colonne de mercure est traversée par un courant d'un ampère, il se développe par seconde, entre deux sections dont les températures sont $t - {}^1/_2{}^\circ$ et $t + {}^1/_2{}^\circ$, par suite du phénomène de THOMSON, une quantité de chaleur

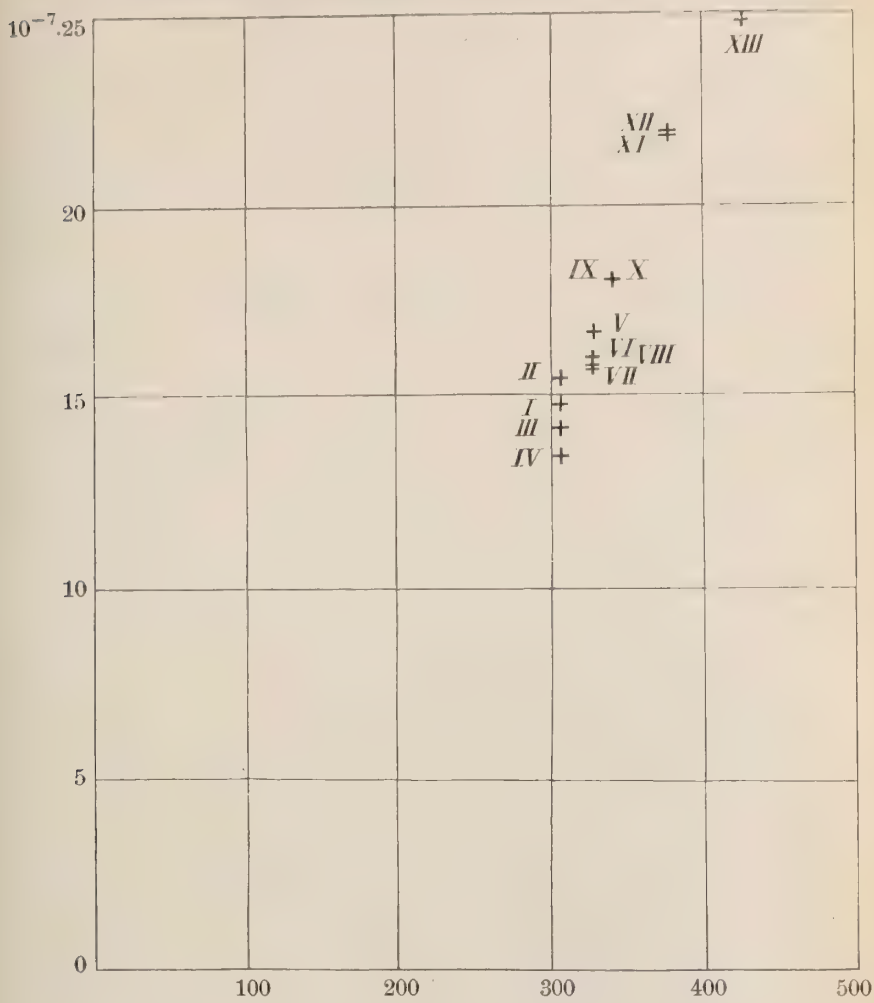


Fig. 2.

qui, exprimée en calories-grammes, est égale à la valeur absolue de σ, quand on suppose que le courant se dirige du côté des températures croissantes.

La représentation graphique des résultats, donnée dans la fig. 2, fait

voir que les résultats des mesures s'accordent bien avec la supposition que l'effet THOMSON est proportionnel à la température absolue. Les résultats des quatre premières séries sont de beaucoup les plus discordants, ce que l'on doit attribuer à la petite valeur de $\Delta_{Th} u$ dans ces mesures. La différence que l'on observe entre les résultats des séries V—VIII et IX—X, qui ont été faites à peu près dans les mêmes conditions, peut s'expliquer par cette circonstance, que les mesures des séries IX—XIII ont été faites avec un nouvel appareil et avec un autre échantillon de mercure. Vu la grande sensibilité des constantes thermo-électriques des métaux pour de petites différences de composition, cette explication est fort admissible.

Groningue, Laboratoire de Physique de l'Université.

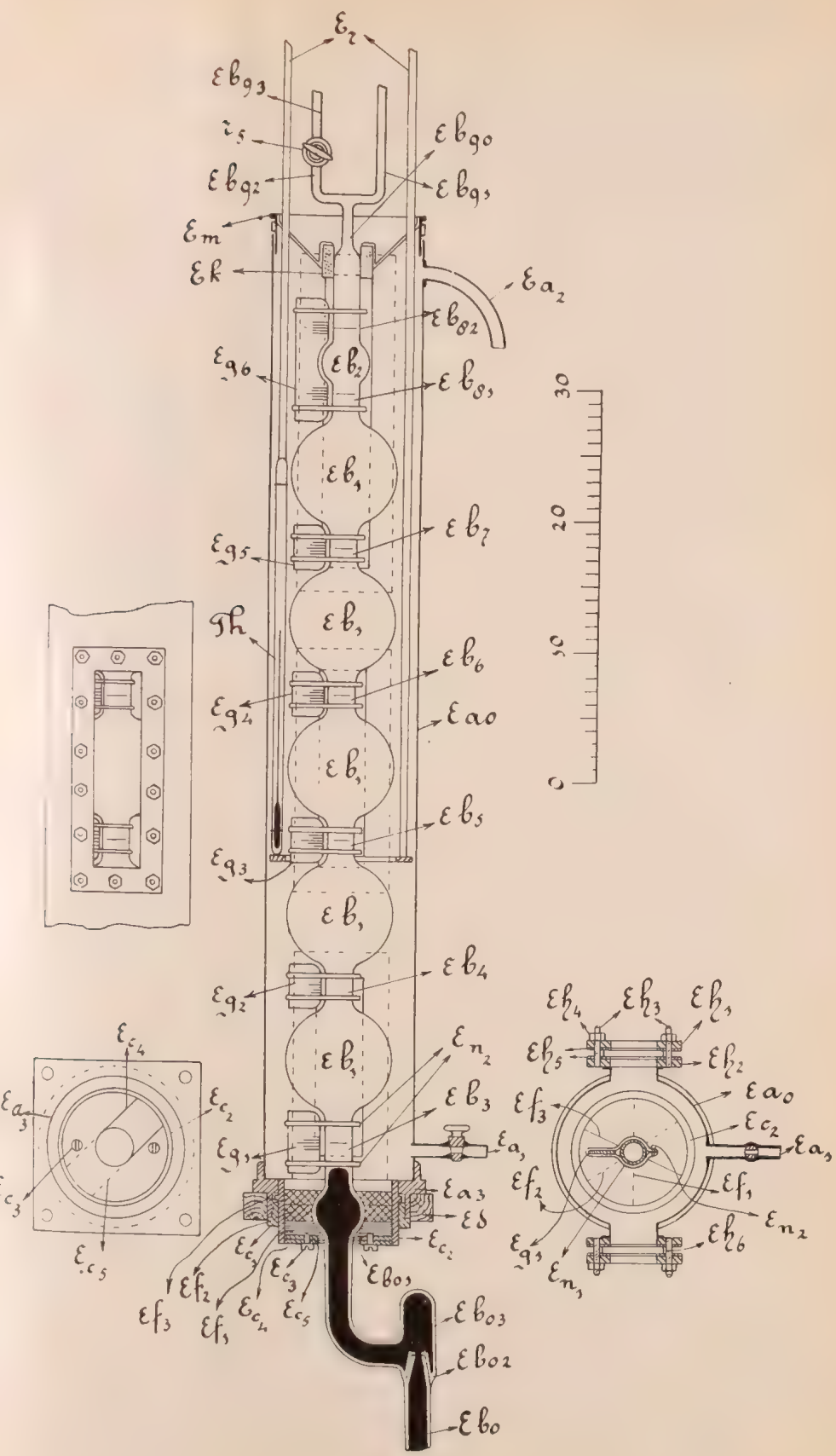


Fig. 1.

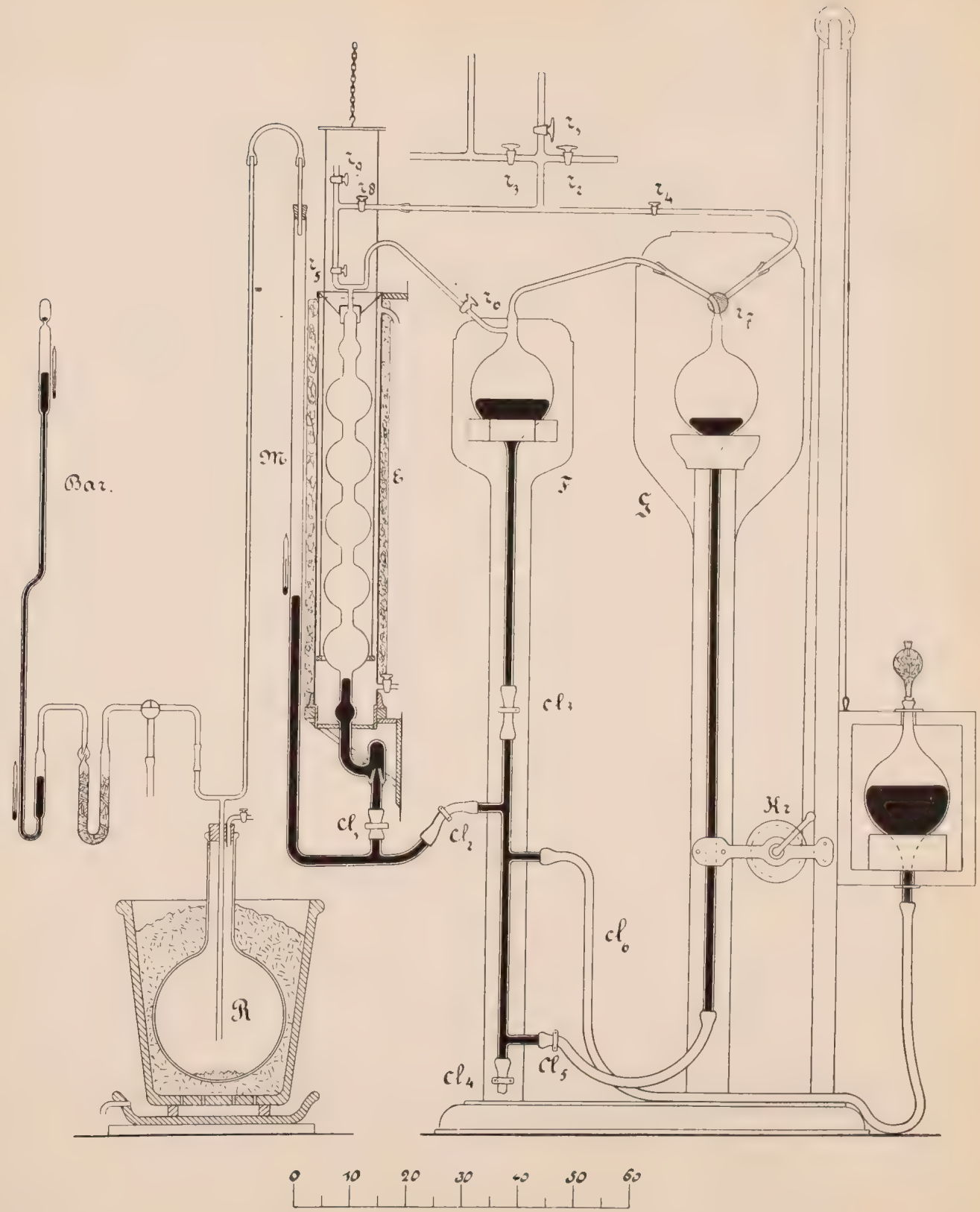
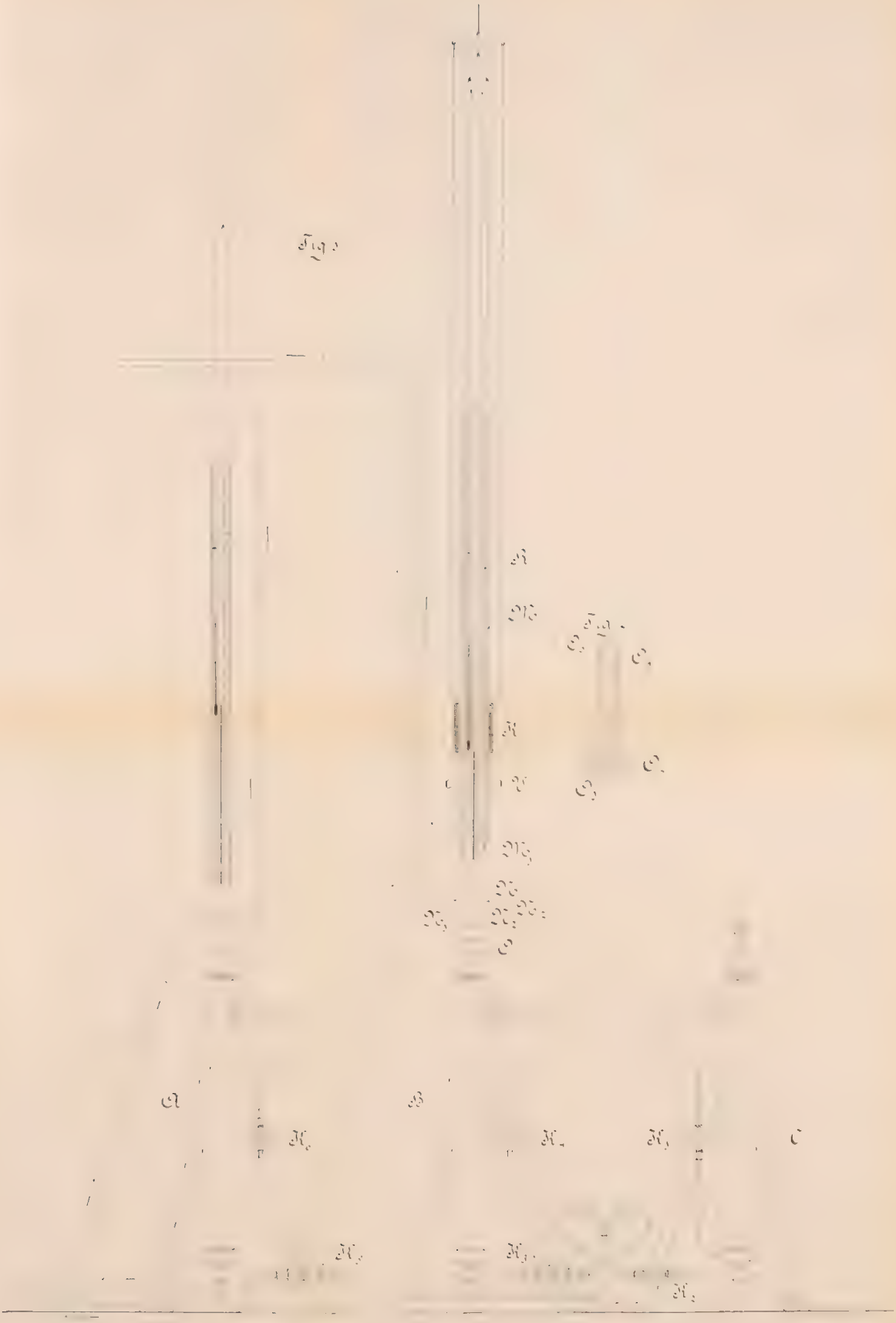
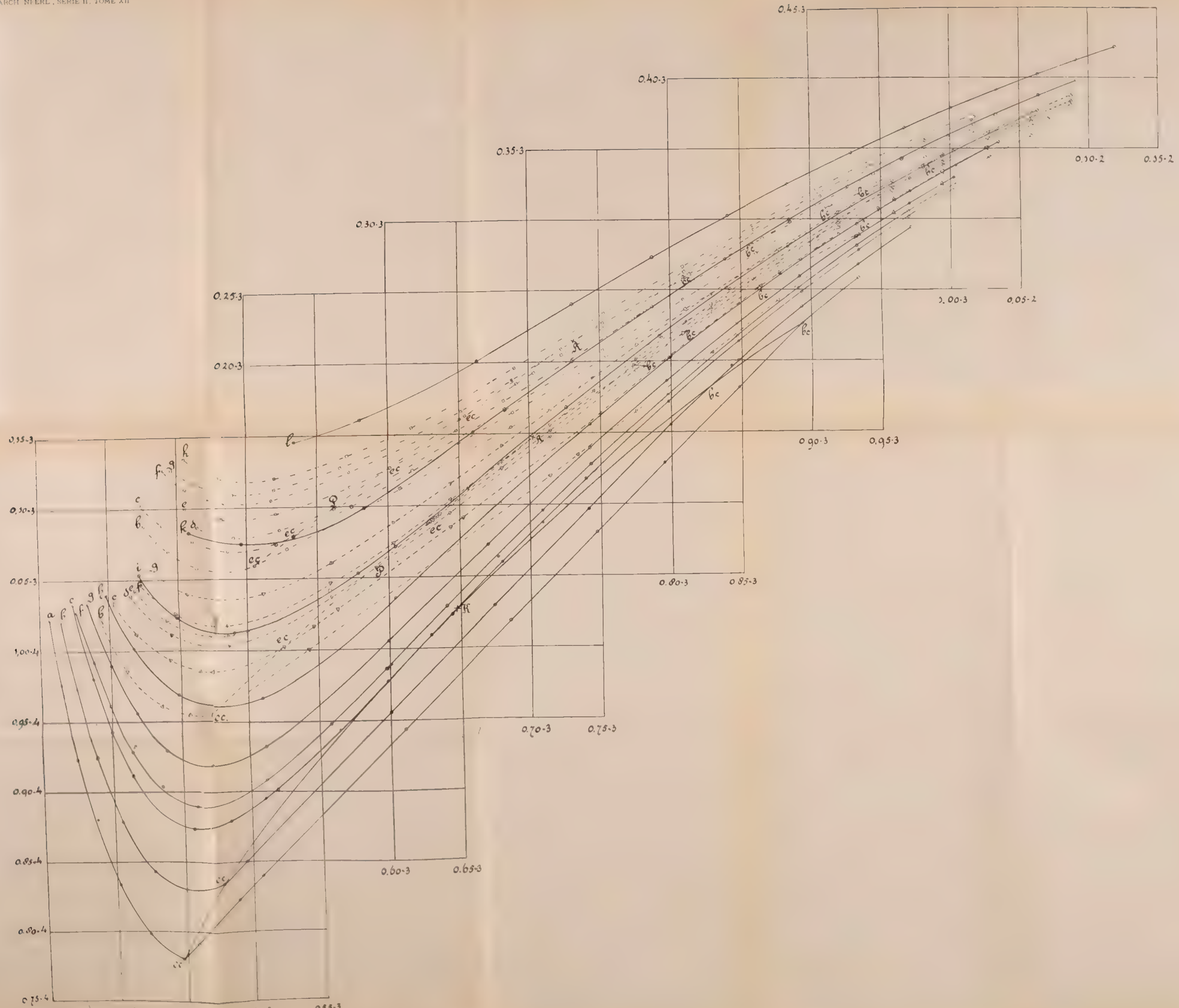


Fig. 2.

W. H. Keesom. Isothermes de mélanges d'oxygène et d'anhydride carbonique.



W. H. Kelsom, Isothermes de mélanges d'oxygène et d'anhydride carbonique.



W. H. Keesom et [illegible] de mélanges d'oxygène et d'anhydride carbonique

0.4:

CONTRIBUTIONS À LA CONNAISSANCE DE LA SURFACE ψ DE VAN DER WAALS. (*suite*).

PAR

M. H. KAMERLINGH ONNES et ses collaborateurs.

VII.

L'ÉQUATION D'ÉTAT ET LA SURFACE ψ DE VAN DER WAALS, DANS LE VOISINAGE IMMÉDIAT DE L'ÉTAT CRITIQUE, POUR DES MÉLANGES BINAIRES CONTENANT UNE FAIBLE PROPORTION D'UNE DES COMPOSANTES,

PAR

J. E. VERSCHAFFELT. [1])

I. Introduction.

Dans le chapitre IV des Contributions à la connaissance de la surface ψ de VAN DER WAALS [2]), j'ai traité les résultats de mes expériences relatives à la compressibilité et la condensation des mélanges d'anhydride carbonique et d'hydrogène, de la même manière que ceux de M. KUENEN, relatifs à des mélanges d'anhydride carbonique et de chlorure de méthyle, ont été traités par MM. KAMERLINGH ONNES et REINGANUM aux chapitres I et II [3]). Mes calculs ont confirmé l'idée, émise par M. KAMERLINGH ONNES, qu'en appliquant la loi des états correspondants il doit être possible de déduire les isothermes des mélanges de substances normales de l'équation d'état empirique générale, réduite, dont le développement en série a été donné dans le tome VI (2e sér., 1901, p. 874) de ces *Archives*. Dans cette équation d'état empirique réduite:

$$\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{A}}{\lambda\mathfrak{v}} + \frac{\mathfrak{B}}{\lambda^2\mathfrak{v}^2} + \ldots,$$

[1]) *Versl. Kon. Akad. Amsterdam*, 28 juin et 27 sept. 1902; 28 févr. et 30 mai 1903, *Comm. phys. lab. Leiden*, n° 81 et suppl. n° 6.

[2]) Ces *Archives*, (2), 11, 403, 1906.

[3]) *Ibidem*, (2), 11, 358, 1906.

où $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ etc. représentent des séries développées suivant les puissances croissantes de la température absolue réduite $\mathfrak{t}$, avec des coefficients qui, comme λ, sont les mêmes pour toutes les substances, on doit poser à cet effet:

$$\mathfrak{t} = \frac{T}{T_{xk}}, \qquad \mathfrak{p} = \frac{p}{p_{xk}}, \qquad \mathfrak{v} = \frac{v}{v_{xk}};$$

T_{xk}, p_{xk} et v_{xk} sont les éléments critiques du mélange dont x est la composition moléculaire (x mol. gr. de la composante dont le mélange ne contient qu'une petite quantité, sur 1 mol. gr. du mélange), dans l'hypothèse où ce mélange se comporterait comme une substance simple, tandis que $\lambda = \frac{p_{xk} v_{xk}}{T_{xk}}$.

En particulier, il doit être possible de trouver, pour les grandeurs critiques du mélange, — c. à d. pour les éléments p_{xpl}, v_{xpl}, T_{xpl} du point de plissement et p_{xcr}, v_{xcr}, T_{xcr} du point de contact critique —, des expressions où figurent uniquement les coefficients de l'équation d'état empirique générale, réduite, ainsi que les grandeurs T_{xk}, p_{xk}, v_{xk}, caractéristiques du mélange, ou bien les coefficients des développements en séries de ces grandeurs suivant les puissances croissantes de x. Dans les cas où il s'agit uniquement de mélanges dont une des composantes n'est présente qu'en minimes quantités, on peut, en excluant des cas exceptionnels, se contenter en première approximation d'introduire les coefficients

$$\alpha = \frac{1}{T_k} \frac{dT_{xk}}{dx} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{p_k} \frac{dp_{xk}}{dx}.$$

Dans le chap. V [1]), M. Keesom a donné un commencement de réalisation à cette idée de M. Kamerlingh Onnes. Il est parti des équations générales par lesquelles M. van der Waals, dans sa Théorie Moléculaire et ses travaux suivants, a exprimé la relation entre les grandeurs critiques et la concentration moléculaire; il a cherché ce que devenaient les équations pour des valeurs infiniment petites de x, et il y a introduit les coefficients α et β, ainsi que d'autres qui peuvent se déduire de ceux de l'équation d'état empirique générale réduite. Je me suis proposé maintenant de développer cette même idée d'une manière plus

[1]) Ces *Archives*, (2), 12, 1, 1907.

directement en rapport avec le traitement de la surface ψ, en développant notamment les coefficients de l'équation d'état et de l'équation de la surface ψ suivant les puissances de x. Mais, vu les complications qu'entraînerait l'introduction de termes d'ordre plus élevé dans les calculs, je me suis borné aux premières puissances de x. Les coefficients des puissances plus élevées peuvent être trouvés d'ailleurs par la même méthode.

Puisque je ne considère que des états voisins de l'état critique, j'ai pu remplacer l'équation d'état empirique générale de M. KAMERLINGH ONNES par une autre forme, plus simple, qu'elle prend quand on développe les divers termes suivant les puissances de $\mathfrak{v}-1$ et $\mathfrak{t}-1$. De la même manière que M. VAN DER WAALS [1]), j'écris cette nouvelle équation sous la forme:

$$\mathfrak{p} = 1 + \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}(\mathfrak{t}-1) + \ldots + \frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}\,\partial \mathfrak{t}}(\mathfrak{v}-1)(\mathfrak{t}-1) + \ldots \quad (1)$$

où les coefficients $\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}\,\partial \mathfrak{t}}$ etc. se déduisent immédiatement de ceux de l'équation d'état empirique générale réduite [2]).

2. Le diagramme p, v, T pour une substance simple, dans le voisinage du point critique.

Afin de restreindre autant que possible le nombre des coefficients qui reviennent continuellement dans les expressions, je n'ai pas laissé l'équation d'état sous sa forme réduite, mais je suis parti de la formule:

$$p = k_0 + k_1(v-v_k) + k_2(v-v_k)^2 + k_3(v-v_k)^3 + \ldots = f(v), \quad (2)$$

[1]) Ces *Archives*, 28, 171, 1894.

[2]) On remarquera que ce développement ne s'accorde pas avec un autre que j'ai donné antérieurement (ces *Archives* (2), 9, 125, 1904) et par lequel j'ai cru exprimer une particularité dans l'allure des isothermes au voisinage du point critique. Mais aussi longtemps que cette question n'est pas définitivement tranchée, j'ai cru bien faire en me plaçant, dans la présente étude, au sujet de cette allure, au même point de vue que MM. VAN DER WAALS et KAMERLINGH ONNES.

où k_0, k_1, k_2 etc. sont encore des fonctions de la température, qui peuvent être développées suivant les puissances de $T-T$; on a p. ex.:

$$k_0 = k_{00} + k_{01}(T-T_k) + k_{02}(T-T_k)^2 + \ldots, \qquad (2')$$

et il est aisé de voir que $k_{00} = p_k$, tandis que k_{10} et k_{20} sont nuls, en vertu des conditions du point critique.

On pourrait se proposer de chercher quelles sont, dans ce diagramme, les équations de quelques lieux géométriques, tels que la courbe limite, le lieu des pressions maxima et minima, le lieu des points d'inflexion etc. Je me contenterai de chercher l'équation de la courbe limite, principalement pour appliquer à un cas bien simple la méthode de calcul dont je ferai tantôt usage, pour trouver les pressions, volumes et compositions des phases coexistantes dans le cas d'un mélange.

Soient v_2 et v_1 les volumes moléculaires de la vapeur et du liquide qui, à la température T, coexistent sous une pression p_c; les trois inconnues p_c, v_1 et v_2 sont déterminées par les équations:

$$p_c = f(v_1), \qquad p_c = f(v_2), \qquad (3)$$

et par le critérium de Maxwell

$$p_c(v_2 - v_1) = \int_{v_1}^{v_2} p\, dv. \qquad (4)$$

J'introduirai toutefois, pour remplacer les deux inconnues v_2 et v_1, les deux grandeurs infiniment petites $\frac{1}{2}(v_2 + v_1) - v_k = \Phi$ et $\frac{1}{2}(v_2 - v_1) = \phi$; $v_k + \Phi$ est donc l'abscisse du diamètre de la courbe limite pour des cordes parallèles à l'axe des v, et ϕ est la demi-corde.

L'équation (4) donne, après division par 2ϕ,

$$p_c = k_0 + k_1 \Phi + k_2 (\Phi^2 + \frac{1}{3}\phi^2) + k_3 \Phi (\Phi^2 + \phi^2) +$$
$$+ k_4 (\Phi^4 + 2\Phi^2\phi^2 + \frac{1}{5}\phi^4) + \ldots, \qquad (5)$$

où je n'ai pas encore fait attention à l'ordre de grandeur des divers termes.

Les deux équations (3) donnent, par addition,

$$p_c = k_0 + k_1 \Phi + (\Phi^2 + \phi^2) + k_3 \Phi (\Phi^2 + 3 \phi^2) + \\ + k_4 (\Phi^4 + 6 \Phi^2 \phi^2 + \phi^4) + \ldots, \tag{6}$$

et par soustraction, après division par 2ϕ,

$$0 = k_1 + 2k_2 \Phi + k_3 (3 \Phi^2 + \phi^2) + 4k_4 \Phi (\Phi^2 + \phi^2) + \ldots \tag{7}$$

De (5) et (6) on peut enfin tirer encore une équation plus simple, en première approximation du moins:

$$0 = \frac{2}{3} k_2 + 2k_3 \Phi + 4k_4 \left(\Phi^2 + \frac{1}{5}\phi^2\right) + \ldots \tag{8}$$

Ce sont maintenant les équations (6), (7) et (8) qui peuvent servir à déterminer, par approximations successives, les expressions des grandeurs Φ, ϕ et $p_c - p_k$; on trouve notamment:

$$\phi^2 = -\frac{k_{11}}{k_{30}} (T - T_k) + \ldots, \tag{9}$$

$$\Phi = -\frac{1}{k_{30}} \left(\frac{1}{3} k_{21} - \frac{2}{5} \frac{k_{11} k_{40}}{k_{30}}\right) (T - T_k) + \ldots,\ ^{1)} \tag{10}$$

$$p_c - p_k = k_{01} (T - T_k) + \ldots. \tag{11}$$

[1]) Le même problème, en ce qui concerne ϕ, a été traité par M. VAN DER WAALS (ces *Archives*, 28, 171, 1894) d'une façon un peu différente.

Des formules (9) et (10), qui nous apprennent comment les volumes du liquide et de la vapeur à saturation varient avec la température, nous pouvons en déduire d'autres relatives aux densités. On a notamment:

$$\rho = \frac{M}{v_k + \Phi \pm \phi} = M \left\{\frac{1}{v_k} \mp \frac{\phi}{v_k^2} + \frac{1}{v_k^2} \left(\frac{\phi^2}{v_k} - \Phi\right)\right\},$$

M étant le poids moléculaire de la substance considérée; d'où

$$\Delta = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) - \rho_k = \frac{M}{v_k^2} \left(\frac{\phi^2}{v_k} - \Phi\right) = -\frac{M}{k_{30}\, v_k^2} \left(\frac{k_{11}}{v_k} - \frac{1}{3} k_{21} + \frac{2}{5} \frac{k_{11} k_{40}}{k_{30}}\right) (T - T_k)$$

et

$$\delta^2 = \frac{1}{4}(\rho_1 - \rho_2)^2 = \frac{M^2}{v_k^4} \phi^2 = -\frac{M^2 k_{11}}{k_{30}\, v_k^4} (T - T_k).$$

Au moyen des valeurs qui seront données au § 17 pour les coefficient réduits, je trouve

$$\Delta = 0{,}5\, \rho_k (1 - \mathrm{t})$$
$$\delta = 3{,}37\, \rho_k \sqrt{1 - \mathrm{t}},$$

Le long de la courbe limite on a $v = v_k + \Phi \pm \Phi$; l'équation de la courbe limite peut donc s'écrire:

$$0 = (v - v_k)^2 - 2\,(v - v_k)\,\Phi + \Phi^2 - \Phi^2. \tag{12}$$

En première approximation c'est une parabole du second degré, le long de laquelle:

$$\frac{d^2p}{dv^2} = -\,2\,\frac{k_{01}\,k_{30}}{k_{11}}. \tag{12'}$$

3. Le diagramme p, v, T pour un mélange dont le rapport moléculaire x est petit, dans le vosinage du point critique du mélange homogène.

Il résulte immédiatement de l'application de la loi des états correspondants, que nous trouvons le réseau des isothermes du mélange en donnant à celui de la substance pure un déplacement infiniment petit, par lequel le point critique (p_k, v_k) vient coïncider avec le point critique du mélange

t étant la température absolue réduite. Je dois faire remarquer toutefois que le coefficient 0,5 de Δ est fort incertain.

Les densités de l'anhydride carbonique, qu'il a déterminées en collaboration avec M. Cailletet, M. Mathias les a représentées par les formules paraboliques suivantes (voir *Journ. d. Phys.*, (3), 1, 53, 1892. *Ann. d. Toulouse*, V):

$$\rho_1 = \rho_k\,\left\{1 - 2{,}47\,(1 - \mathfrak{t}) + 4{,}09\,\sqrt{1 - \mathfrak{t}}\right\}$$

pour la branche liquide, et

$$\rho_2 = \rho_k\,\left\{1 + 2{,}91\,(1 - \mathfrak{t}) - 3{,}37\,\sqrt{1 - \mathfrak{t}}\right\}$$

pour la branche gazeuse. D'après ces formules les deux branches appartiendraient à des paraboles différentes; cela provient évidemment des erreurs dans la déterminations des densités, surtout du liquide, et l'on voit que pour la branche vapeur l'accord du coefficient de $\sqrt{1 - \mathfrak{t}}$ avec notre coefficient de δ est parfait. Si nous faisons abstraction de cette différence, il vient

$$\frac{1}{2}\,(\rho_1 + \rho_2) = \rho_k\,[1 + 0{,}25\,(1 - \mathfrak{t})],$$

ce qui, au point de vue de l'ordre de grandeur s'accorde suffisamment avec le coefficient 0,5 de Δ. Plus tard (*Journ. de Phys.*, (3), 2, 5, 1893. *Ann. d. Toulouse*, VI) M. Mathias déduisit des donneés de M. Amagat:

$$\frac{1}{2}\,(\rho_1 + \rho_2) = \rho_k\,[1 + 0{,}858\,(1 - \mathfrak{t})].$$

homogène (p_{xk}, v_{xk}), et en lui faisant subir en même temps une extension parallèle aux axes coordonnés, les ordonnées étant augmentées dans le rapport $\frac{p_{xk}}{p_k}$, les abcisses dans le rapport $\frac{v_{xk}}{v_k}$. Une isotherme qui correspond à une température T dans le réseau primitif correspond alors à la température $\frac{T_{xk}}{T_k}\,T$ dans le réseau dérivé.

Ecrivons de nouveau:

$$p = l_0 + l_1 (v - v_{xk}) + l_2 (v - v_{xk})^2 + l_3 (v - v_{xk})^3 + \ldots, \quad (13)$$

où l_0, l_1, l_2 etc. sont encore une fois des fonctions de la température, telles que:

$$l_0 = l_{00} + l_{01} (T - T_{xk}) + l_{02} (T - T_{xk})^2 + \ldots \quad (13')$$

En vertu de la déduction de l'équation d'état réduite, à l'aide de T_{xk}, p_{xk} et v_{xk}, les coefficients l_{00}, l_{01}, ..., l_{10}, l_{11} etc. sont encore fonctions de x. Posant:

$$\begin{aligned} T_{xk} &= T_k (1 + \alpha x + \alpha' x^2 + \ldots) \\ p_{xk} &= p_k (1 + \beta x + \beta' x^2 + \ldots) \\ v_{xk} &= v_k (1 + \gamma x + \gamma' x^2 + \ldots), \end{aligned} \quad (14)$$

où, en vertu de la relation $\frac{p_{xk}\, v_{xk}}{T_{xk}} = \text{Cte.}$,

$$\gamma = \alpha - \beta, \quad \gamma' = \alpha' - \beta' - \alpha\beta + \beta^2 \text{ etc. } ^{1}), \quad (14')$$

il vient, conformément à la loi des états correspondants,

---

[1]) Au chap. IV (p. 444), j'ai déduit de mes observations:

$$v_{xk} = v_k (1 + 0{,}62\, x - 0{,}95\, x^2),$$

alors que les relations (14') exigeraient ($\alpha = -1{,}219$, $\beta = -1{,}645$, $\alpha' = 1{,}93$, $\beta' = 2{,}69$);

$$v_{xk} = v_k (1 + 0{,}43\, x - 0{,}06\, x^2).$$

Bien que l'accord entre les deux expressions de v_{xk} ne soit pas des plus satisfaisants, il ne résulte pas encore de là que la loi des états correspondants est en défaut; la différence s'explique suffisamment par une incertitude dans la détermination des constantes critiques, surtout des volumes. D'ailleurs, même si les observations étaient rigoureusement précises, l'accord entre les deux formules ne serait pas encore parfait, les deux méthodes de calcul n'étant pas équivalentes.

M. Keesom a trouvé pour ses mélanges un écart analogue (voir pp. 98 et 99).

$$l_{00}=p_k[1+\beta x+\ldots],\ l_{01}=k_{01}[1-(\alpha-\beta)x+\ldots],\ l_{02}=k_{02}[1-(2\alpha-\beta)x+\ldots],$$
$$l_{10}=0,\ l_{11}=k_{11}[1-2(\alpha-\beta)x+\ldots],\ l_{12}=k_{12}[1-(3\alpha-2\beta)x+\ldots],$$
$$l_{20}=0,\ l_{21}=k_{21}[1-3(\alpha-\beta)x+\ldots],\ldots$$
$$l_{30}=k_{30}[1-(3\alpha-4\beta)x+\ldots],\ldots$$
$$l_{40}=k_{40}[1-(4\alpha-5\beta)x+\ldots],\ldots; \tag{15}$$

par là tous les coefficients l sont exprimés au moyen des coefficients k et des grandeurs α et β.

4. Le diagramme p, v, x pour des mélanges à petite valeur de x, à une température voisine de T_k.

Nous allons considérer maintenant divers mélanges à une même température T; le réseau d'isothermes, dans le diagramme p, v, x qui correspond à cette température, est représenté par l'équation (13), où l'on doit à présent considérer T comme constant et x comme variable. Je mettrai toutefois cette équation sous une autre forme, plus convenable.

Parmi tous les mélanges imaginables, — et, bien que cela n'ait aucun sens physique, on peut se figurer que x prenne aussi des valeurs négatives ou supérieures à l'unité —, il y en a nécessairement un pour lequel T serait la température critique, si ce mélange se comportait comme un corps simple; la concentration x_{Tk} de ce mélange, ainsi que les éléments critiques p_{Tk}, v_{Tk} sont déterminés par les équations (14). (Dans ces équations on n'a qu'à poser $T_{xk}=T$, $x=x_{Tk}$, $p_{xk}=p_{Tk}$ et $v_{xk}=v_{Tk}$).

En première approximation on trouve ainsi:

$$x_{Tk}=\frac{T-T_k}{\alpha T_k},\ p_{Tk}=p_k+\frac{p_k\beta}{\alpha T_k}(T-T_k),\ v_{Tk}=v_k+\frac{v_k(\alpha-\beta)}{\alpha T_k}(T-T_k). \tag{16}$$

On voit qu'en première approximation la valeur de x_{Tk} est positive ou négative suivant que $T-T_k$ et α ont le même signe ou sont de signes contraires, c. à d.:

	$\alpha>0$	$\alpha<0$
$T>T_k$	$x_{Tk}>0$; figg. 1 et 7	$x_{Tk}<0$; figg. 3, 5, 9 et 11
$T<T_k$	$x_{Tk}<0$; figg. 2 et 8	$x_{Tk}>0$; figg. 4, 6, 10 et 12

Dans les figg. 1 à 12 (planche IV) j'ai donné la représentation schématique du diagramme p, v, x dans le voisinage de $x = 0$ et $T = T_k$, notamment dans les cas particuliers les plus simples qui peuvent se présenter. L'isotherme relative à $x = 0$ a été marquée en trait interrompu. Théoriquement ce diagramme peut s'étendre en dehors des limites de mélanges possibles $x = 0$ et $x = 1$. Il est évident que, dans nos considérations, une valeur de x qui diffère infiniment peu de l'unité a la même signification que x infiniment petit, et que $x > 1$ se traduit dans nos figures par $x < 0$. Les isothermes relatives à des valeurs négatives de x ont été tracées en pointillé. L'isotherme x_{TK} [1]), n'ayant qu'une utilité purement mathématique, peut donc parfaitement tomber dans le domaine des x négatifs.

En général l'équation (13) peut maintenant être mise sous la forme:

$$p = m_0 + m_1 (v - v_{Tk}) + m_2 (v - v_{Tk})^2 + m_3 (v - v_{Tk})^3 + \ldots, \quad (17)$$

où m_0, m_1 etc. sont des fonctions de x, que l'on peut développer suivant les puissances de $x - x_{Tk}$; p. ex.:

$$m_0 = m_{00} + m_{01} (x - x_{Tk}) + m_{02} (x - x_{Tk})^2 + \ldots . (17')$$

Les coefficients m dépendent d'ailleurs encore de la température, qui est considérée ici comme constante; on reconnaît aisément que $m_{00} = p_{Tk}$, tandis que $m_{10} = 0$ et $m_{20} = 0$. Identifiant les expressions (17) et (13), nous pouvons exprimer tous les m au moyen des k et des α et β; nous trouvons notamment:

$$m_{n0} = k_{n0} - \frac{k_{n0}}{T_k \alpha} [n\alpha - (n+1)\beta] (T - T_k) + \ldots,$$

$$m_{n1} = -k_{n0} [n\alpha - (n+1)\beta] - k_{n1} T_k \alpha - (n+1) k_{(n+1)0} (\alpha - \beta) v_k + \ldots, \text{etc.} \quad (18)$$

soit, en première approximation:

$$m_{30} = k_{30}, \; m_{40} = k_{40}, \; m_{01} = p_k \beta - k_{01} T_k \alpha,$$

$$m_{02} = \beta' p_k + k_{01} \alpha (\alpha - \beta) T_k + k_{02} \alpha^2 T_k^2 + k_{11} \alpha (\alpha - \beta) v_k T_k - k_{01} \alpha' T_k,$$

$$m_{11} = - k_{11} T_k \alpha, \quad m_{21} = - k_{21} T_k \alpha - 3 k_{30} v_k (\alpha - \beta), \text{ etc.} \quad (18')$$

On trouve dans KUENEN, Theorie der Verdampfung etc., p. 76, une

---

[1]) Marquée par erreur x_T sur les figures 1 à 12.

représentation schématique d'un diagramme p, v, x [1]). Cette représentation rappelle en tous points un diagramme p, v, T; cette ressemblance n'est toutefois pas nécessaire. Le caractère d'un diagramme p, v, T exige nécessairement que k_{01} soit positif, et que k_{11} et k_{30} soient négatifs; or, dans un diagramme p, v, x correspondant à une très petite valeur de x, il est vrai que m_{30} est négatif, puisque ce coefficient se confond avec k_{30} en première approximation, mais les relations (18') nous apprennent que m_{01} et m_{11} peuvent être tout aussi bien négatifs que positifs. A la vérité, la seule circonstance $m_{01} < 0$ n'a pas encore une influence sur l'aspect général du diagramme, puisqu'elle ne fait qu'exprimer que les isothermes des mélanges sont situés *au-dessous* de celles de la substance pure, — c. à d. correspondent à des pressions plus faibles pour un même volume moléculaire —, ainsi que cela se présente d'ailleurs dans le voisinage de la limite supérieure ($x = 1$) de la représentation de M. Kuenen. Mais, tandis que dans un diagramme p, v, T les isothermes présentant un maximum et un minimum de pression sont placées au-dessous de l'isotherme critique, le cas contraire peut se présenter dans un diagramme p, v, x, notamment quand m_{01} et m_{11} ont le même signe. Les quatre cas qui peuvent se présenter à ce propos, abstraction faite de valeur très particulières des coefficients, sont indiqués dans le tableau suivant:

	$m_{01} > 0$	$m_{01} < 0$
$m_{11} > 0$ ou $\alpha > 0$	figg. 1 et 2	figg. 7 et 8
$m_{11} < 0$ ou $\alpha < 0$	figg. 3, 4, 5 et 6	figg. 9, 10, 11 et 12

A sa limite inférieure, le diagramme schématique de M. Kuenen représente donc le cas $m_{01} > 0$ et $m_{11} < 0$, à sa limite supérieure le cas $m_{01} < 0$ et $m_{11} > 0$. Le cas $\alpha > 0$ se présentera en général, — mais pas nécessairement —, lorsque la composante additionnelle du mélange est moins volatile que la composante principale, p. ex. quand

[1]) M. Hartman, dans sa dissertation (Leyden, 1899, p. 6), avait déjà donné une pareille représentation. Elle est conforme au diagramme que j'ai déduit des mes observations (ces *Archives*, tome XI, pl. XI).

on ajoute CH^3Cl à CO^2 [1]). Par contre, la circonstance $\alpha < 0$ sera réalisée le plus souvent quand la composante additionnelle est la plus volatile, comme c'est le cas quand on ajoute CO^2 à CH^3Cl [2]), H^2 à CO^2 [3]) ou O^2 à CO^2 [4]).

Dans le diagramme p, v, T d'une substance simple, deux isothermes infiniment voisines T, $T + dT$ ne s'entrecoupent jamais (le $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ ne devenant jamais nul); cette circonstance peut, au contraire, se présenter

[1]) Des formules par lesquelles MM. Kamerlingh Onnes et Reinganum (ces *Archives*, (2), 11, 381 et 382, 1906) ont représenté les observations de M. Kuenen, on déduit (voir *Comm. physic. lab. Leiden*, n°. 79, pp. 7 et 8), pour l'anhydride carbonique contenant une petite quantité de chlorure de méthyle:

$$\alpha = 0{,}378 \text{ et } \beta = 0{,}088.$$

Mais je dois faire remarquer que les recherches plus récentes de M. Brinkman (Dissertation, Amsterdam, 1904) indiquent une valeur négative pour β (voir p. 73).

[2]) Pour le chlorure de méthyle mélangé d'un peu d'anhydride carbonique on trouve de même (*loc. cit.*, p. 8):

$$\alpha = -0{,}221 \text{ et } \beta = 0{,}281.$$

Ici aussi les observations de M. Brinkman semblent indiquer une valeur négative de β. Mais je suis d'avis que ce résultat doit être mis sur le compte des incertitudes de la méthode.

[3]) Voir la note au bas de la page 197.

[4]) Ici

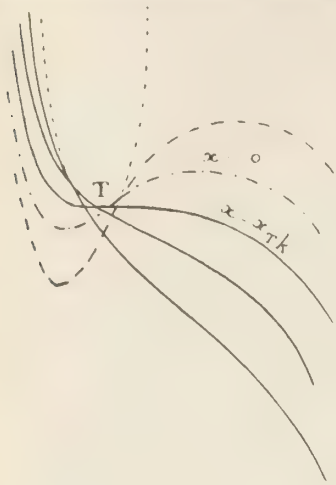
$$\alpha = -0{,}6563 \text{ et } \beta = -1{,}0871$$

(voir ces *Archives*, (2), 12, 98, 1907).

Le diagramme que j'ai construit pour des mélanges de CO^2 et H^2 (ces *Archives*, t. XI, pl. XI) étant conforme au diagramme schématique de M. Kuenen, il faut que, dans le voisinage de l'anhydride carbonique pur, on ait $m_{01} > 0$ et $m_{11} < 0$. Et en effet, α étant négatif, il en est de même de m_{11}; en outre, prenant $k_{01} = 1{,}610$ (ces *Archives*, (2), 12, 63, 1907), je trouve pour m_{01} la valeur 454, donc positive.

D'après les valeurs de α et β données ci-dessus pour des mélanges d'anhydride carbonique et de chlorure de methyle, on a $m_{01} < 0$ et $m_{11} > 0$ dans le voisinage de l'anhydride pur (une valeur négative de β, d'après la remarque ci-dessus, ne fait qu'accentuer la valeur négative de m_{01}), et $m_{01} > 0$ et $m_{11} < 0$ dans le voisinage du chlorure pur. Il suit de là que, pour des températures comprises entre celles des points critiques des deux substances pures, le diagramme p, v, x de ces mélanges doit encore être conforme à la représentation schématique de M. Kuenen.

dans un diagramme p, v, x, pour les isothermes de deux mélanges infiniment voisins $(x, x + dx)$. Si ce point d'intersection est situé à une distance finie du point p_{Tk}, v_{Tk}, il tombe en dehors des limites que nous considérons; mais s'il est situé tout près de ce point, de manière à se confondre pratiquement avec lui, $m_{01} = 0$ en première approximation, et toutes les isothermes relatives à de petites valeurs de x s'entrecoupent dans le voisinage du point p_{Tk}, v_{Tk}. Ce cas a été représenté dans la fig. 13, où j'ai supposé en outre $\alpha < 0$ et $T < T_k$; les isothermes s'entrecoupent deux à deux, et le lieu des points d'intersection de deux isothermes infiniment voisines passe par le point critique p_{Tk}, v_{Tk}. Cette courbe, enveloppe des isothermes, est représentée en ponctué sur la fig. 13; son équation s'obtient en éliminant x entre l'équation (17) et $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, où l'on pose $m_{01} = 0$. En première approximation on trouve ainsi:



$m_{01} = 0, \alpha < 0, T < T_k, m_{02} < 0.$
Fig. 13.

$$p - p_{Tk} = -\frac{1}{4}\frac{m^2_{11}}{m_{02}}(v - v_{Tk})^2, \tag{19}$$

ce qui est l'équation d'une parabole du second degré, dont la concavité est tournée vers le haut (comme sur la fig. 13) quand m_{02} est négatif.

5. La surface ψ.

Pour déduire de l'équation (17) les éléments des phases coexistantes à une température T, je ferai usage des propriétés de la surface ψ de van der Waals. L'équation de cette surface est

$$\psi = -\int p\, dv + \phi(x).\ ^{1)}$$

[1]) Voir van der Waals, Cont. II, p. 8.

On peut écrire, d'une façon tout à fait générale,

$$\psi = \int_v^V p\,dv + \psi_V;$$

si nous admettons que V représente un très grand volume, nous pouvons dire que ψ_V est l'énergie libre dans l'état gazeux idéal, à une erreur près qui est d'autant plus petite que V est plus grand, et qui disparaîtra à la limite, quand nous poserons tantôt $V = \infty$. Or, à l'état gazeux idéal (voir Cont. II, pp. 8, 28 et 94),

$$\psi_V = -RT \log V + E_1(1-x) + E_2 x - T[H_1(1-x) + H_2 x] + \\ + RT[x \log x + (1-x) \log(1-x)],\ ^{1})$$

où E_1 et E_2 représentent, pour chacune des deux composantes, l'énergie interne par molécule-gramme à l'état de dilution extrême, tandis que H_1 et H_2 représentent, pour les deux composantes, la valeur qu'aurait l'entropie par molécule gramme sous le volume 1 et la pression 1, si dans ces conditions les lois de l'état gazeux parfait étaient encore applicables.

Le premier terme de ψ, dépendant de v, je vais maintenant le décomposer comme suit:

$$\int_v^V p\,dv = \int_v^{v_{Tk}} p\,dv + \int_{v_{Tk}}^V p\,dv.$$

Les deux intégrales dans lesquelles je l'ai ainsi décomposé doivent être calculées de deux manières différentes. Puisque v est voisin de v_{Tk}, nous pouvons nous servir, pour le calcul de la première partie, du développement en série (17); mais, pour de grandes valeurs V du volume, cette série n'est plus convergente, de sorte que, pour calculer la seconde intégrale, nous devons revenir au développement de l'équation d'état empirique de M. Kamerlingh Onnes.

Cette équation, mise sous la forme donnée dans l'introduction (p. 191), est aussi l'équation réduite de l'isotherme du mélange x, à la température réduite $t = \frac{T}{T_{xk}}$, de sorte que:

[1]) R se rapporte à une molécule-gramme et est donc une même constante pour toutes les substances.

$$\int_{v_{Tk}}^{V} p\, dv = p_{xk}\ {}_{xk}\int_{v_{Tk}}^{\frac{V}{v_{xk}}} \mathfrak{p}\, d\mathfrak{v} = RT\,(log\ V - log\ v_{Tk}) -$$

$$- \frac{\mathfrak{B}}{\lambda^2}\, p_{xk}\, v^2{}_{xk} \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{v_{Tk}}\right) - \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{C}}{\lambda^3}\, p_{xk}\, v^3{}_{xk} \left(\frac{1}{V^2} - \frac{1}{v^2{}_{Tk}}\right) - \ldots$$

Posant $V = \infty$, il vient:

$$\psi = - m_0\,(v - v_{Tk}) - \frac{1}{2}\, m_1\,(v - v_{Tk})^2 - \frac{1}{3}\, m_2\,(v - v_{Tk})^3 - \ldots$$
$$+ E_1\,(1-x) + E_2\, x - T\,[H_1\,(1-x) + H_2\, x] + RT\,[x\, log\, x +$$
$$+ (1-x)\, log\,(1-x)] + X,$$

si nous représentons par X l'expression suivante:

$$- RT\, log\, v_{Tk} + \frac{\mathfrak{B}}{\lambda^2}\frac{p_{xk}\, v^2{}_{xk}}{v_{Tk}} + \frac{\mathfrak{C}}{\lambda^3}\frac{p_{xk}\, v^3{}_{xk}}{v^2{}_{Tk}} + \ldots,$$

qui, n'étant plus fonction que de x (T étant considéré comme une constante) peut encore être développée comme suit:

$$X = X_0 + X_1\,(x - x_{Tk}) + X_2\,(x - x_{Tk})^2 + \ldots\ldots$$

Négligeant enfin une fonction linéaire de x qui, comme on sait, est sans influence dans la détermination des éléments des phases coexistantes, il vient

$$\psi = - m_0\,(v - v_{Tk}) - \frac{1}{2}\, m_1\,(v - v_{Tk})^2 - \frac{1}{3}\, m_2\,(v - v_{Tk})^3 - \ldots$$
$$+ RT\left[x\, log\, x + \frac{1}{1.2}\, x^2 + \frac{1}{2.3}\, x^3 + \ldots\right] +$$
$$+ X_2\,(x - x_{Tk})^2 + X_3\,(x - x_{Tk})^3 + \ldots \qquad (20)$$

6. Les phases coexistantes.

Les éléments des phases coexistantes sont déterminés par les conditions de coexistence :

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_1 \text{ et } \mu_2 = \mu_1. \tag{21}$$

si nous représentons par μ le potentiel thermodynamique:

$$\mu = \psi - v\frac{\partial\psi}{\partial v} - x\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Au lieu de la troisième condition, je trouve qu'il est plus commode d'en employer une autre qui résulte des trois, savoir

$$M_2 = M_1, \tag{21'}$$

où

$$M = \psi - (v - v_{Tk})\frac{\partial\psi}{\partial v} - (x - x_{Tk})\frac{\partial\psi}{\partial x} =$$

$$\begin{aligned}
= (v - v_{Tk})\,[& m_{01}(x - x_{Tk}) + 2m_{02}(x - x_{Tk})^2 + 3m_{03}(x - x_{Tk})^3 + \ldots] \\
+\frac{1}{2}(v - v_{Tk})^2[& 2m_{11}(x - x_{Tk}) + 3m_{12}(x - x_{Tk})^2 + 4m_{13}(x - x_{Tk})^3 + \ldots] \\
+\frac{1}{3}(v - v_{Tk})^3[& 3m_{21}(x - x_{Tk}) + 4m_{22}(x - x_{Tk})^2 + \ldots \quad] \\
+\frac{1}{4}(v - v_{Tk})^4[& 3m_{30} + 4m_{31}(x - x_{Tk}) + \ldots \quad] \\
& + \ldots \\
& + RT\left[{}_{Tk}(\log x + 1) - (1 - x_{Tk})\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots\right)\right] \\
& - X_2(x - x_{Tk})^2 - 2X_3(x - x_{Tk})^3 - \ldots
\end{aligned}$$

Conformément à la transformation de la page 194, je pose maintenant :

$$\frac{1}{2}(v_2 + v_1) - v_{Tk} = \Phi, \qquad \frac{1}{2}(v_2 - v_1) = \Phi,$$

et de même

$$\frac{1}{2}(x_2 + x_1) - x_{Tk} = \Xi, \qquad \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \xi,$$

et j'exprime les grandeurs infiniment petites Φ, φ, ξ et $p_1 - p_{TK}$ comme des fonctions de la variable Ξ. En première approximation je trouve alors [1]):

$$\Phi = -\frac{1}{2m_{30}}\left[\frac{1}{3}\frac{m^3_{01}}{R^2T^2} + \frac{m_{01}m_{11}}{RT} + \frac{2}{3}m_{21} - \frac{4}{5}\frac{m_{40}}{m_{30}}\left(\frac{m^2_{01}}{RT} + m_{11}\right)\right]\Xi$$

$$-\frac{m_{01}}{2RTm_{30}}\left[\frac{1}{3}\frac{m^2_{01}}{RT} + m_{11} - \frac{4}{5}\frac{m_{01}m_{40}}{m_{30}}\right]x_{TK} \tag{22}$$

$$\varphi^2 = -\frac{1}{m_{30}}\left[\frac{m^2_{01}}{RT} + m_{11}\right]\Xi - \frac{m^2_{01}}{RTm_{30}}x_{TK}, \tag{23}$$

$$p_c - p_{TK} = m_{01}\Xi \tag{24}$$

et

$$\xi = \frac{m_{01}}{RT}\varphi\left[\Xi + x_{TK}\right]. \tag{25}$$

Dans l'expression (25) le facteur entre crochets est égal à $\frac{1}{2}(x_2 + x_1)$; il est donc toujours positif, si nous ne considérons que des mélanges réels. Comme φ est aussi une quantité essentiellement positive, nous voyons que le signe de ξ ne dépend que de m_{01}. On voit par là que, si $m_{01} > 0$, c'est la phase gazeuse qui contient la plus forte proportion de la composante additionnelle du mélange, et si $m_{01} < 0$ c'est le contraire qui a lieu. En général on aura donc $m_{01} > 0$ si c'est la composante additionnelle qui est la plus volatile. [2])

---

[1]) Les quatre équations d'où je déduis les relations (22) à (25) sont:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_1,\ M_2 = M_1,\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_1 \text{ et } p_c = -\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_1\right].$$

Les deux premières contiennent l'expression $log\ \frac{x_2}{x_1}$; puisque tous les autres termes sont infiniment petits, il faut qu'il en soit de même de cette expression, ce qui veut dire que le rapport $\frac{x_2}{x_1}$ doit différer infiniment peu de l'unité. Il faut donc que ξ soit d'ordre plus élevé que Ξ, ce qui fait qu'il est possible de développer $log\ \frac{x_2}{x_1}$ suivant les puissances de $\frac{\xi}{\Xi + x_{TK}}$.

[2]) Voyez à ce propos p. 201.

7. Le point de plissement.

Au point de plissement les phases coexistantes deviennent identiques. Si nous représentons par x_{Tpl}, p_{Tpl} et v_{Tpl} les éléments de ce point, nous y avons $\Phi = v_{Tpl} - v_{Tk}$, $\Phi = 0$, $\Xi = x_{Tpl} - x_{Tk}$ et $\xi = 0$, tandis que $p_k = p_{Tpl}$. Au moyen des relations (22), (23) et (24) nous trouvons ainsi:

$$x_{Tpl} = \frac{RTm_{11}}{m^2_{01} + RTm_{11}} x_{Tk}, \tag{26}$$

$$p_{Tpl} = p_{Tk} - \frac{m^3_{01}}{m^2_{01} + RTm_{11}} x_{Tk}, \tag{27}$$

$$v_{Tpl} = v_{Tk} + \frac{m_{01}}{2m_{30}(m^2_{01} + RTm_{11})} \times$$
$$\times \left[\frac{2}{3} m_{01} m_{21} - \frac{1}{3} \frac{m^2_{01} m_{11}}{RT} - m^2_{11}\right] x_{Tk}. \tag{28}$$

Si l'on remplace x_{Tk}, p_{Tk} et v_{Tk} par leurs expressions (16), on exprime les éléments des points de plissement en fonction de la température; en première approximation T peut être remplacé par T_k dans le coefficient de x_{Tk}.

Des relations (26) et (27) il résulte immédiatement:

$$p_{Tpl} - p_{Tk} = m_{01}(x_{Tpl} - x_{Tk}).\ ^{1)} \tag{29}$$

D'après l'équation (26), x_{Tpl} peut-être positif ou négatif; pas plus que $x_{Tk} < 0$, $x_{Tpl} < 0$ n'exprime une impossibilité, mathématique du moins. Il est vrai qu'à un point de vue purement physique la surface Ψ est limitée par les plans $x = 0$ et $x = 1$ (dans nos considérations $x > 0$); mais, à un point de vue mathématique, on peut se figurer cette

---

[1]) Afin d'examiner jusqu'à quel point cette relation est vérifiée pour des mélanges de CO^2 et H^2, je considère la température 27°,10 à laquelle le mélange $x = 0{,}05$ atteint son point de plissement ($p_{Tpl} = 91.85$ atm.). Comme on trouve pour cette température $x_{Tk} = 0{,}011$ et $p_{Tk} = 72{,}4$ atm., il vient $\frac{p_{Tpl} - p_{Tk}}{x_{Tpl} - x_{Tk}} = 500$, ce qui s'accorde d'une manière satisfaisante avec la valeur 454, trouvée plus haut pour m_{01} (p. 201).

surface prolongée au-delà de ces limites [1]). Or, si nous considérons une température supérieure aux températures critiques des deux composantes, il n'existe (sauf des cas d'exception: 3e type de HARTMAN) pas de phases coexistantes; c. à d. que la surface ψ ne présente pas de pli, du moins pas entre $x = 0$ et $x = 1$, mais ce pli peut être situé en dehors de ces limites, de même que le point de plissement. Si la température est inférieure aux températures critiques des deux composantes, le pli s'étend bien entre $x = 0$ et $x = 1$, mais le point de plissement tombe en dehors de ces limites (sauf pour les mélanges du deuxième type de HARTMAN). On voit ainsi que la circonstance $x_{Tpl} < 0$ n'est pas sans avoir une signification, mais pratiquement il n'y a pas de point de plissement.

L'équation (26) peut s'écrire:

$$x_{Tpl} = \frac{RT_k\, k_{11}}{RT^2_k\, k_{11}\, \alpha - m^2_{01}}\,(T - T_k)\ , \qquad (26')$$

et sous cette forme nous voyons que x_{Tpl} est positif ou négatif suivant que $T - T_k$ et $RT_k^2\, k_{11}\, \alpha - m^2_{01}$ sont de signes contraires ou de même signe. La condition $RT_k^2\, k_{11}\, \alpha > m^2_{01}$ n'est compatible qu' avec $\alpha < 0$, puisque k_{11} est negatif; quant à la condition $RT_k^2\, k_{11}\, \alpha < m^2_{01}$, elle est toujours réalisée quand $\alpha > 0$, mais elle peut encore l'être avec $\alpha < 0$. Les divers cas qui peuvent se présenter sont consignés dans le tableau suivant.

	$RT^2_k\, k_{11}\, \alpha > m^2_{01}$	$RT^2_k\, k_{11}\, \alpha < m^2_{01}$, $\alpha > 0$	$RT^2_k\, k_{11}\, \alpha < m^2_{01}$, $\alpha < 0$
$T > T_k$	$0 > x_{Tk} > x_{Tpl}$ figg. 5 et 12	$x_{Tk} > x_{Tpl} > 0$ figg. 1 et 7	$x_{Tpl} > 0 > x_{Tk}$ figg. 3 et 9
$T < T_k$	$x_{Tpl} > x_{Tk} > 0$ figg. 6 et 12	$0 > x_{Tpl} > x_{Tk}$ figg. 2 et 8	$x_{Tk} > 0 > x_{Tpl}$ figg. 4 et 10

[1]) Au-delà de ces limites ψ est imaginaire à cause des termes $log\ x$ et $log\ (1-x)$. Malgré cela les éléments ρ, v, x des phases coexistantes y sont réels, puisque les conditions de coexistence ne contiennent que des expressions logarithmiques toujours réelles: $log\ \frac{x_2}{x_1}$ et $log\ \frac{1-x_2}{1-x_1}$.

8. La courbe limite dans le diagramme p, v, x.

Le long de la courbe limite on a $v = v_{Tk} + \Phi \pm \Phi$; $v_{Tk} + \Phi$ est l'abscisse du diamètre des cordes parallèles à l'axe des v, et Φ est la demi-corde. L'équation de la courbe limite peut s'écrire:

$$0 = (v - v_{Tk})^2 - 2\,\Phi\,(v - v_{Tk}) + \Phi^2 - \Phi^2, \tag{30}$$

où Φ et Φ doivent être remplacés par leurs expressions en fonction de p_k. En première approximation ces expressions sont données par les formules (22) et (23) et l'on peut négliger Φ^2; l'équation (30) représente alors une parabole du 2d degré. Le sommet de cette parabole ne coïncide pas avec le point critique (p_{Tk}, v_{Tk}), comme dans le diagramme p, v, T d'une substance simple, mais avec le point de plissement.

Le long de cette parabole on a:

$$\frac{d^2p}{dv^2} = -\frac{2m_{01}\,m_{30}\,RT_k}{m^2_{01} + RT_k\,m_{11}} = \frac{2m_{01}\,k_{30}\,RT_k}{RT^2_k\,k_{11}\,x - m^2_{01}}. \tag{30'}$$

Cette expression est positive ou négative, ce qui veut dire que la courbe limite peut tourner sa convexité de côté de l'axe des v, alors que dans le diagramme p, v, T d'une substance simple la concavité de la courbe limite est toujours tournée vers le bas. L'expression $\frac{d^2p}{dv^2}$ est positive lorsque m_{01} et $RT_k^2 k_{11}\,x - m^2_{01}$ sont de signes contraires, négative dans l'autre cas:

	$RT^2_k\,k_{11}\,x > m^2_{01}$	$RT^2_k\,k_{11}\,x < m^2_{01}$
$m_{01} > 0$	figg. 5 et 6	figg. 1 à 4
$m_{01} < 0$	figg. 11 et 12	figg. 7 à 10

9. La projection de la surface ψ sur le plan xv.

a) *La courbe connodale.*

La projection de la courbe connodale sur le plan xv est aussi la projection sur le même plan de la courbe limite de la surface p, v, x. On peut donc obtenir son équation en exprimant, dans l'équation (30), p en fonction de x et v un moyen de l'équation d'état (17). Je vais lui donner une forme analogue à (30).

La courbe limite coupe l'isotherme du mélange x en deux points, (p_1', v_1) et (p_2', v_2'), qui font connaître les phases par lesquelles la condensation s'achève et commence. Je pose maintenant:

$$\tfrac{1}{2}(v'_2 + v'_1) - v_{Tk} = \Phi', \quad \tfrac{1}{2}(v'_2 - v'_1) = \Phi',$$
$$\tfrac{1}{2}(p'_2 + p'_1) - p_{Tk} = \Pi' \text{ et } \tfrac{1}{2}(p'_2 - p'_1) = \pi',$$

et je considère les quatre grandeurs infiniment petites Φ', Φ', Π' et π' comme des fonctions de x.

En exprimant que les deux points sont situés sur l'isotherme (17) et sur la courbe limite (30), je trouve quatre équations d'où l'on peut déduire les relations cherchées. J'obtiens ainsi, en première approximation,

$$\Phi' = \frac{1}{m_{30}}\left[\frac{1}{3}\frac{m^3_{01}}{R^2T^2} - \frac{1}{3}m_{21} + \frac{2m_{40}}{5m_{30}}\left(\frac{m^2_{01}}{RT} + m_{11}\right)\right]x +$$
$$+ \frac{1}{m_{30}}\left[\frac{1}{3}m_{21} - \frac{2}{5}\frac{m_{11}\,m_{40}}{m_{30}}\right]x_{Tk}, \tag{31}$$

$$\Phi'^2 = -\frac{1}{m_{30}}\left[\frac{m^2_{01}}{RT} + m_{11}\right]x + \frac{m_{11}}{m_{30}}x_{Tk}, \tag{32}$$

$$\Pi' = m_{01}(x - x_{Tk}), \tag{33}$$

et

$$\pi' = -\frac{m^2_{01}}{RT}\Phi' x. \tag{34}$$

L'équation de la connodale peut maintenant s'écrire:

$$0 = (v - v_{Tk})^2 - 2\Phi'(v - v_{Tk}) + \Phi'^2 - \Phi'^2, \tag{35}$$

le long de laquelle, en première approximation:

$$\frac{d^2x}{dv^2} = -\frac{2m_{30}\,RT_k}{m^2_{01} + RT_k\,m_{11}} = \frac{2k_{30}\,RT_k}{RT^2_k\,k_{11}\,\alpha - m^2_{01}}. \tag{35'}$$

Cette expression a le signe contraire de $RT_k^2 k_{11} \alpha - m^2_{01}$; il y a donc deux cas à distinguer.

1. $RT^2_k k_{11} \alpha > m^2_{01}$; $\frac{d^2x}{dv^2} < 0$, c. à d. que la connodale tourne sa concavité vers le bas (fig. 14, p. 211);

2. $RT^2_k k_{11} \alpha < m^2_{01}$; $\frac{d^2x}{dv^2} > 0$ et la connodale est courbée vers le haut (fig. 15, p. 211).

b) Le réseau des isobares.

L'équation de ce réseau est donnée par la formule (17), quand on y considère x et v comme variables et p comme paramètre. Nous pouvons la mettre sous la forme:

$$x = n_0 + n_1 (v - v_{Tk}) + n_2 (v - v_{Tk})^2 + \ldots, \tag{36}$$

où les coefficients n sont encore des fonctions de p, p. ex.

$$n_0 = n_{00} + n_{01} (p - p_{Tk}) + n_{02} (p - p_{Tk})^2 + \ldots \tag{36'}$$

En identifiant les équations (36) et (17), nous pouvons exprimer les n au moyen des m; nous trouvons ainsi, en première approximation:

$$n_{00} = x_{Tk}, n_{01} = \frac{1}{m_{01}}, n_{02} = -\frac{m_{02}}{m^3_{01}}, \ldots$$

$$n_{01} = 0, n_{11} = -\frac{m_{11}}{m^2_{01}}, n_{12} = 3\frac{m_{02} m_{11}}{m^4_{01}} - \frac{m_{12}}{m^3_{01}}, \ldots$$

$$n_{20} = 0, n_{21} = \frac{m^2_{11}}{m^3_{01}} - \frac{m_{21}}{m^2_{01}}, \ldots$$

$$n_{30} = -\frac{m_{30}}{m_{01}}, \ldots$$

$$n_{40} = \frac{m_{11} m_{30}}{m^2_{01}} - \frac{m_{40}}{m_{01}}, \text{etc.} \tag{37}$$

Le réseau des isobares ressemble à un réseau d'isothermes, avec le point x_{Tk}, v_{Tk} comme point critique. Il y a pourtant cette différence que, tandis que dans le cas des isothermes la dérivée $\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_k$ est toujours négative, dans ce cas l'expression correspondante $\left(\frac{\partial^3 x}{\partial v^3}\right)_{Tk} = -6\frac{m_{30}}{m_{01}}$

peut être positive. Il suit donc de là qu'il y a, dans le réseau des isobares, une diversité d'allure plus grande encore que dans celui des isothermes; mais je ne m'occuperai pas de déduire les divers cas qui peuvent se présenter.

Si nous considérons l'isobare p_{Tpl}, nous trouvons que pour cette courbe on a, en vertu des formules (27) et (28), au point de plissement:

$$\left(\frac{d^2x}{dv^2}\right)_{pl} = \frac{m_{11}}{RT_k} x_{Tk} = \frac{m^2{}_{01} + RT_k\, m_{11}}{R^2 T^2{}_k} x_{Tpl}.$$

Or, si nous comparons cette expression avec la formule (35'), nous trouvons que toutes deux sont de même signe, du moins pour un point de plissement réel ($x_{Tpl} > 0$); c. à d. que la courbe connodale et l'isobare du point de plissement sont courbées en ce point dans le même sens; d'ailleurs, comme la courbure de la connodale est finie et que celle de l'isobare du point de plissement est infiniment petite, nous voyons que l'isobare embrasse la connodale, conformément à une règle générale donnée par M. VAN DER WAALS [1]).

c) *La courbe spinodale.*

L'équation de cette courbe, qui sépare sur la surface ψ la région à courbure elliptique de la région à courbure hyperbolique, est, comme on sait,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\, \partial v}\right)^2 = 0.$$

Remplaçant ψ par son expression (20), on trouve qu'en première approximation cette courbe est une parabole du second degré, passant par le point de plissement, et le long de laquelle:

$$\frac{d^2x}{dv^2} = -\frac{6\, RT_k\, m_{30}}{m^2{}_{01} + RT_k\, m_{11}}.$$

Cette expression, comparée avec la formule (37), nous apprend que la courbe spinodale est courbée dans le même sens que la connodale, et que sa courbure est trois fois plus forte, ainsi que M. KORTEWEG [2]) l'a d'ailleurs démontré d'une manière générale.

---

[1]) Ces *Archives*, 30, 269, 1896.

[2]) *Wien. Ber.*, 98, 1160, 1889.

d) La courbe des pressions maxima et minima.

Le lieu de tous les points où les isothermes des mélanges atteignent un maximum ou un minimum de pression, c. à d. où les droites parallèles à l'axe des v (x = Cte.) sont tangentes aux isobares [1], est déterminé par $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_x = 0$ ou $\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right)_x = 0$. En première approximation c'est une parabole du second degré dont le sommet est au point (x_{Tk}, v_{Tk}), et pour laquelle

$$\frac{d^2x}{dv^2} = -6\,\frac{m_{30}}{m_{11}}\,.$$

Elle coupe l'axe des v aux mêmes points que la courbe spinodale, mais n'est par toujours courbée dans le même sens. Sa courbure est notamment toujours négative (concave vers le bas), alors que la spinodale, pour laquelle on peut écrire

$$\frac{d^2x}{dv^2} = -6\,\frac{m_{30}}{m_{11}}\,\frac{x_{Tpl}}{x_{Tk}}$$

a une courbure négative ou positive, suivant que x_{Tpl} et x_{Tk} sont de même signe ou de signes contraires.

10. Le point de contact critique.

Ce point est le sommet de la projection de la courbe connodale sur le plan x, v. Physiquement il est caractérisé par cette circonstance que la condensation y cesse sitôt qu'elle a commencé, c. à d. que les deux états du mélange pour lesquels la condensation commence et s'achève (la condensation finissant par être rétrograde) sont identiques.

Représentons par x_{Tr}, p_{Tr} et v_{Tr} les éléments du point de contact critique. En ce point on a donc:

$$\Phi' = v_{Tr} - v_{Tk},\ \Phi' = 0,\ \Pi' = p_{Tr} - p_{Tk},\ \pi' = 0 \text{ et } x = x_{Tr}.$$

Il résulte ainsi de (32):

$$x_{Tr} = \frac{RT_k\, m_{11}}{m^2_{01} + RT_k\, m_{11}}\, x_{Tk}, \tag{38}$$

[1]) Elle est donc aussi le lieu des points où les isobares passent par un maximum ou un minimum.

ce qui veut dire qu'en première approximation la composition au point de contact critique est la même qu'au point de plissement (voir form. 26).

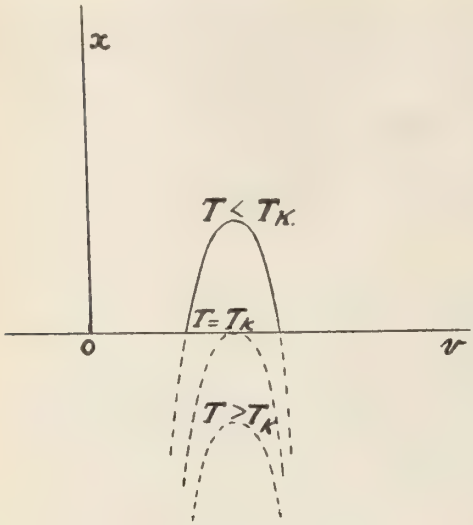


Fig. 14.

Voici maintenant quels sont les divers cas qui peuvent se présenter.

1. $RT_k^2 k_{11} z > m^2_{01}$ (fig. 14).

a) $T > T_k$; x_{Tr} est négatif et la connodale est située toute entière en dehors du domaine d'observation. Cela est conforme à la situation de la courbe limite dans les figg. 5 et 11.

b) $T = T_k$; $x_{Tr} = 0$ et la connodale touche l'axe des v, mais on n'observe pas encore de phénomènes critiques.

c) $T < T_k$; $x_{Tr} > 0$ et la connodale pénètre pour une partie dans le domaine des mélanges réels (v. les figg. 6 et 12).

2. $RT_k^2 k_{11} z < m_{01}^2$ (fig. 15).

a) $T > T_k$; $x_{Tr} > 0$ et la courbe connodale est située toute entière dans le domaine accessible à l'observation (figg. 1, 3, 7 et 9).

b) $T = T_k$; $x_{Tr} = 0$ et la connodale touche l'axe des v.

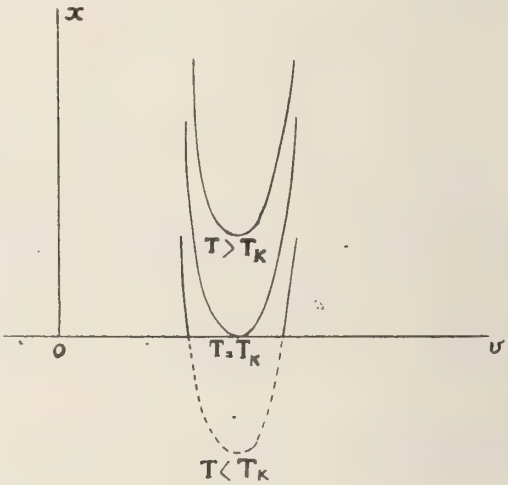


Fig. 15.

c) $T < T_k$; $x_{Tr} < 0$ et la courbe connodale passe en partie dans le domaine de x négatifs (figg. 2, 4, 8 et 10).

L'équation (33) donne:

$$p_{Tr} = p_{Tk} + m_{01}(x_{Tr} - x_{Tk}) = p_{Tk} - \frac{m^3_{01}}{m^2_{01} + RT_k m_{11}} x_{Tk}; \qquad (39)$$

en première approximation on a donc aussi $p_{Tr} = p_{Tpl}$ (form. 27).

Enfin, l'équation (31) donne, en rapport avec (38),

$$v_{Tr} = v_{Tk} + \frac{1}{3} \frac{m^2_{01}}{m_{30}(m^2_{01} + RT_k m_{11})} \left(m_{21} + \frac{m_{01} m_{11}}{RT_k}\right) x_{Tk}, \qquad (40)$$

ce qui, combiné avec (28), conduit à:

$$v_{Tr} - v_{Tpl} = \frac{1}{2} \frac{m_{01} m_{11}}{RT_k m_{30}} x_{Tk} = -\frac{1}{2} \frac{k_{11} m_{01}}{RT_k k_{30}} (T - T_k). \qquad (41)$$

La différence $v_{Tr} - v_{Tpl}$ peut être positive ou négative, ce qui veut dire que le point de contact critique peut être situé sur la branche vapeur ou sur la branche liquide de la courbe limite (ou de la connodale). Dans le premier cas on observe, comme on sait, pour des mélanges compris entre x_{Tr} et x_{Tpl}, une condensation rétrograde de 1re espèce; dans le deuxième cas la condensation rétrograde est de 2me espèce: [1])

	$m_{01} > 0$	$m_{01} < 0$
$T > T_k$	$v_{Tr} < v_{Tpl}$; c. r. II; figg. 1 et 3	$v_{Tr} > v_{Tpl}$; c. r. I; figg. 7 et 9
$T < T_k$	$v_{Tr} > v_{Tpl}$; c. r. I; fig. 6	$v_{Tr} < v_{Tpl}$; c. r. II; fig. 12

En exprimant que le point de plissement et le point de contact critique sont situés sur la courbe connodale nous trouvons, en rapport avec (41),

$$x_{Tr} - x_{Tpl} = \frac{1}{4} \frac{m^2_{01} m^2_{11}}{RT_k m_{30}(m^2_{01} + RT_k m_{11})} x^2_{Tk}; \qquad (42)$$

[1]) Eu égard à ce qui a été remarqué à la p. 206 au sujet de la concentration des deux phases, nous pouvons donc dire que si $T > T_k$ c'est la phase passagère qui contient la plus forte proportion de la composante additionnelle, tandis que c'est la phase rémanente dans le cas où $T < T_k$.

une expression qui est positive ou négative suivant que $RT_k^2 k_{11} \alpha >$ m^2_{01} (fig. 14) ou $RT_k^2 k_{11} \alpha < m^2_{01}$ (fig. 15).

Opérant de même avec la courbe limite, nous obtenons:

$$p_{Tr} - p_{Tpl} = -\frac{1}{4} \frac{m^3_{01} m^2_{11}}{RT_k m_{30} (m^2_{01} + RT_k m_{11})} x^2_{Tk}, \tag{13}$$

de sorte que

	$m_{01} > 0$	$m_{01} < 0$
$RT^2_k k_{11} \alpha > m^2_{01}$	$p_{Tr} < p_{Tpl}$; fig. 6	$p_{Tr} > p_{Tpl}$; fig. 12
$RT^2_k k_{11} \alpha < m^2_{01}$	$p_{Tr} > p_{Tpl}$; figg. 1 et 3	$p_{Tr} < p_{Tpl}$; figg. 7 et 9

11. La courbe limite dans le diagramme p, v, T pour un mélange de composition x.

Si, dans l'équation (35) de la projection de la courbe connodale sur le plan x, v, nous considérons x comme une constante et T comme variable, cette équation exprime comment, pour un même mélange, les volumes pour lesquels la condensation commence et finit dépendent de la température. Nous pouvons donc considérer aussi l'équation (35) comme celle de la projection, sur le plan v, T, de la courbe limite de la surface p, v, T pour le mélange dont la composition moléculaire est x.

Cette projection, je l'écrirai sous la forme suivante:

$$0 = (v - v_{xk})^2 - 2\,\Phi''(v - v_{xk}) + \Phi''^2 - \Phi''^2, \tag{44}$$

où

$$\Phi'' = \frac{1}{2}(v'_2 + v'_1) - v_{xk} = \Phi' + v_{Tk} - v_{xk} = \text{(en première approximation)}$$

$$\frac{m^2_{01}}{RT_k} \frac{}{k_{30}} \left[\frac{1}{3}\frac{m_{01}}{RT_k} + \frac{2}{5}\frac{k_{40}}{k_{30}}\right] x -$$

$$- \frac{1}{k_{30}} \left[\frac{1}{3} k_{21} - \frac{2}{5}\frac{k_{11} k_{40}}{k_{30}}\right] (T - T_{xk}), \tag{45}$$

et

$$\Phi''^2 = \frac{1}{4}(v'_2 - v'_1)^2 = \Phi'^2 = -\frac{m^2_{01}}{RT_k k_{30}} x - \frac{k_{11}}{k_{30}}(T - T_{xk}). \quad (46)$$

A ces formules j'ajouterai encore:

$$\Pi'' = \frac{1}{2}(p'_2 + p'_1) - p_{xk} = k_{01}(T - T_{xk})$$

et

$$\pi'' = \pi' = -\frac{m^2_{01}}{RT_k}\Phi'' x. \quad (47)$$

En première approximation la courbe considérée est une parabole dont le sommet est le point de contact critique du mélange x. J'en déduis:

$$T_{xr} = T_{xk} - \frac{m^2_{01}}{RT_k k_{11}} x, \quad (48)$$

$$p_{xr} = p_{xk} - \frac{k_{01} m^2_{01}}{RT_k k_{11}} x, \quad (49)$$

$$v_{xr} = v_{xk} + \frac{m^2_{01}}{3RT_k k_{30}}\left(\frac{m_{01}}{RT_k} + \frac{k_{21}}{k_{11}}\right) x. \text{ [1]} \quad (50)$$

Pour déduire maintenant de la formule (14) l'équation de la courbe limite dans le diagramme p, v, T, nous devons exprimer T en fonction de p et v à l'aide de l'équation (13). Représentant par $v_{xk} + \Phi'''$ l'abscisse du diamètre pour les cordes parallèles et l'axe des v, et par Φ''' la demi-corde, j'obtiens

$$\Phi''' = \frac{m^2_{01}}{RT_k k_{30}}\left[\frac{1}{3}\frac{m_{01}}{RT_k} + \frac{2}{5}\frac{k_{40}}{k_{30}} - \frac{1}{2}\frac{k_{11}}{k_{01}}\right] x -$$

$$- \frac{1}{k_{01} k_{30}}\left[\frac{1}{3} k_{21} - \frac{2}{5}\frac{k_{11} k_{40}}{k_{30}}\right](p - p_{xk}) \quad (51)$$

et

$$\Phi'''^2 = -\frac{m^2_{01}}{RT_k k_{30}} x - \frac{k_{11}}{k_{01} k_{30}}(p - p_{xk}). \quad (52)$$

---

[1]) On arrive à ces mêmes formules en remplaçant, dans la formule (38), x_{Tk} par sa valeur (16), en posant $T = T_{xr}$ et $x_{Tr} = x$, tirant de là la valeur de T_{xr} et substituant enfin dans (39) et (40).

Si T_1''' et T_2''' sont les températures de saturation qui correspondent à une même pression, on a encore

$$\mathrm{T}''' = \frac{1}{2}(T_2''' + T_1''') - T_{xk} = \frac{p - p_{xk}}{k_{01}}$$

et (53)

$$\tau''' = \frac{1}{2}(T_2''' - T_1''') = \frac{m^2_{01}}{RT_k k_{01}} \Phi''' x.$$

La courbe limite est, en première approximation, une parabole du second degré, le long de laquelle:

$$\frac{d^2p}{dv^2} = -2\frac{k_{01}\,k_{30}}{k_{11}}, \tag{54}$$

tout comme pour la courbe limite d'une substance simple (form. 12').

Le sommet de la courbe limite est le point où la pression de coexistence est maxima [1]). Si nous représentons ses éléments par p_{xm}, v_{xm} et T_{xm} nous trouvons, en posant $\Phi''' = 0$, $\Phi''' = v_{xm} - v_{xk}$ et $\mathrm{T}''' = T_{xm} - T_{xk}$,

$$T_{xm} = T_{xk} - \frac{m^2_{01}}{RT_k k_{11}} x, \tag{55}$$

$$p_{xm} = p_{xk} - \frac{k_{01}\,m^2_{01}}{RT_k k_{11}} x, \tag{56}$$

$$v_{xm} = v_{xk} + \frac{m^2_{01}}{RT_k k_{30}}\left[\frac{1}{3}\frac{m_{01}}{RT_k} - \frac{1}{2}\frac{k_{11}}{k_{01}} + \frac{1}{3}\frac{k_{21}}{k_{11}}\right] x. \tag{57}$$

En première approximation $p_{xm} = p_{xr}$ et $T_{xm} = T_{xr}$, mais

$$v_{xm} - v_{xr} = -\frac{1}{2}\frac{m^2_{01}\,k_{11}}{RT_k k_{01}\,k_{30}} x; \tag{58}$$

pour des mélanges réels ($x > 0$) cette dernière expression est toujours négative, ce qui veut dire que le point de contact critique est toujours situé sur la branche descendante (de droite) de la courbe limite (on ne peut pas parler ici de branche liquide, parce que le sommet de la courbe limite n'est pas le point de plissement, comme dans le diagramme p, v,

[1]) Voir Hartman, *Journ. Phys. Chem.*, 5, 437, 1901. *Comm. Phys. Lab. Leiden*, suppl. n°. 3, p. 14.

x des isothermes relatives à une même température). Cette situation du point de contact critique provient de ce que l'isotherme qui passe par ce point y est tangente à la courbe limite; or comme $T_{xc} > T_{xk}$ (toujours pour des mélanges réels) tout le long de cette isotherme $\frac{\partial p}{\partial v} < 0$.[1])

Dans ce diagramme, le point de plissement n'a aucune signification géométrique simple. Les éléments s'expriment en fonction de x en remplaçant dans (26) T par T_{xpl} et x_{Tpl} par x, puis en tirant de là la valeur de T_{xpl} et la substituant dans (27) et (28). Il vient ainsi:

$$T_{xpl} = T_{xk} - \frac{m^2_{01}}{RT_k k_{11}} x, \tag{59}$$

$$p_{xpl} = p_{xk} - \frac{k_{01} m^2_{01}}{RT_k k_{11}} x, \tag{60}$$

$$v_{xpl} = v_{xk} - \frac{m^2_{01}}{RT_k k_{30}} \left[\frac{1}{6} \frac{m_{01}}{RT_k} + \frac{1}{2} \frac{m_{11}}{m_{01}} - \frac{1}{3} \frac{k_{21}}{k_{11}} \right] x.\ ^{2}) \tag{61}$$

---

[1]) Ceci est conforme à la représentation schématique, donnée par M. Kuenen (Theorie der Verdampfung etc., p. 75), du diagramme p, v, T d'un mélange, ainsi qu'au diagramme que j'ai tracé d'après mes observations (tome XI, pl. X) pour un mélange contenant 0,95 mol. CO^2 et 0,05 mol. H^2. Malgré la petite valeur de x pour ce mélange, l'influence des termes d'ordre supérieur au premier est déjà si grande, que le sommet de la courbe limite est situé bien loin en dehors du domaine de l'observation, et qu'au point de contact critique la courbe limite ne tourne plus sa concavité du côté de l'axe des x, mais est devenue convexe.

[2]) Moyennant quelques transformations, les équations (59), (60) et (61) peuvent être mises sous la forme que leur a donnée M. Keesom (*loc. cit.*, pp. 91 et 94, équ. 4*a*, 4*b* et 4*c*).

Les formules que j'ai données antérieurement (chap. IV, p. 444) pour les éléments du point de plissement et du point critique des mélanges de CO^2 et H^2 fournissent:

$$\frac{p_{xpl} - p_{xk}}{T_{xpl} - T_{xk}} = 1{,}68\,(1 + 2{,}4\,x),$$

ce qui s'accorde bien avec la relation (62) ($k_{01} = 1{,}61$; voir page 198).

De même, pour des mélanges d'anhydride carbonique et d'oxygène (voir page 98),

$$\frac{p_{xpl} - p_{xk}}{T_{xpl} - T_{xk}} = 1{,}657\,(1 + 1{,}737\,x).$$

En empruntant à M. Keesom (*loc. cit.*, p. 66) les valeurs: $\frac{T_k}{p_k}\left(\frac{dp}{dT}\right)_k = 6{,}712$

Des équations (59) et (60) résulte immédiatement la relation suivante, déjà connue [1]),

$$p_{xpl} - p_{xk} = k_{01} (T_{xpl} - T_{xk}), \tag{62}$$

qui existe aussi, en vertu des équations (48), (49), (55) et (57), pour les éléments du point de contact critique et pour le sommet de la courbe limite.

Les équations précédentes apprennent qu'encore une fois, en première approximation, $p_{xpl} = p_{xr}$ et $T_{xpl} = T_{xr}$, mais

$$v_{xpl} - v_{xr} = -\frac{1}{2} \frac{m_{01}}{R T_k k_{30}} \left(\frac{m^2_{01}}{R T_k} + m_{11} \right) x. \tag{63}$$

Le point de plissement peut donc être situé à droite ou à gauche du point de contact critique. Pour des mélanges réels on a:

$\frac{R T_k^2}{p_k^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v \partial T} \right)_k = -26{,}9$ et $\frac{R T_k}{p_k v_k} = 3{,}45$, et en substituant ces valeurs dans les formules (59) et (60) avec les valeurs de α et β trouvées (p. 201) pour des mélanges d'anhydride carbonique et d'hydrogène, j'obtiens

$$T_{xpl} = T_k (1 + 0{,}37\, x)$$
$$p_{xpl} = p_k (1 + 9\, x).$$

En prenant les valeurs de α et β déduites des éléments du point critique K (p. 99), j'obtiens de même, pour les mélanges d'anhydride carbonique et d'oxygène:

$$T_{xpl} = T_k (1 - 0{,}147\, x)$$
$$p_{xpl} = p_k (1 + 2{,}091\, x).$$

Quand on compare ces formules avec celles qui résultent de l'observation, on constate que pour l'hydrogène l'accord n'est pas satisfaisant; le coefficient de x dans l'expression de T_{xpl} a même changé de signe, mais, vu la petite valeur de ce coefficient, cette circonstance n'a pas une bien grande importance. Il est assez difficile de savoir à quoi ce mauvais accord doit être attribué, mais on voit qu'il est désirable que de nouvelles recherches soient faites, avec des mélanges plus nombreux.

[1]) Voir VAN DER WAALS, *Versl. Kon. Akad.*, 1897, p. 298. On obtient immédiatement cette formule en exprimant que les éléments du point de plissement satisfont à l'équation d'état (13), et en négligeant les termes d'ordre supérieur au premier.

	$m_{01} > 0$	$m_{01} < 0$
$RT^2_k k_{11} \alpha > m^2_{01}$	$v_{xpl} < v_{xr}$; c. r. I	$v_{xpl} > v_{xr}$; c. r. II
$RT^2_k k_{11} \alpha < m^2_{01}$	$v_{xpl} > v_{xr}$; c. r. II	$v_{xpl} < v_{xr}$; c. r. I [1])

Dans le cas où le point de plissement est situé à la gauche du point de contact critique, il peut encore tomber à droite ou à gauche du sommet de la courbe limite. En effet, les équations (54) et (59) donnent, par soustraction,

$$v_{xpl} - v_{xm} = -\frac{1}{2}\frac{m_{01}}{RT_k k_{30}}\left(\frac{m^2_{01}}{RT_k} + m_{11} - \frac{m_{01} k_{11}}{k_{01}}\right)x, \quad (64)$$

de sorte que le point de plissement est placé:

a) à droite du point de contact critique quand m_{01} et $\frac{m^2_{01}}{RT_k} + m_{11}$ sont de même signe,

b) entre le point de contact critique et le sommet quand

$$m_{01} > \frac{k_{01}}{k_{11}}\left(\frac{m^2_{01}}{RT_k} + m_{11}\right) > 0 \text{ ou } 0 > \frac{k_{01}}{k_{11}}\left(\frac{m^2_{01}}{RT_k} + m_{11}\right) > m_{01} \text{ et}$$

c) à la gauche du sommet quand

$$\frac{k_{01}}{k_{11}}\left(\frac{m^2_{01}}{RT_k} + m_{11}\right) > m_{01} > 0 \text{ ou } 0 > m_{01} > \frac{k_{01}}{k_{11}}\left(\frac{m^2_{01}}{RT_k} + m_{11}\right).$$

En exprimant que les éléments du point de contact critique et ceux du point de plissement satisfont à l'équation de la courbe limite, on trouve, eu égard à (63), en seconde approximation,

$$T_{xpl} - T_{xr} = -\frac{1}{4}\frac{m^2_{01}}{R^2 T^2_k k_{30} k_{11}}\left(\frac{m^2_{01}}{RT_k} + m_{11}\right)^2 x^2. \quad (65)$$

Cette expression est toujours négative, c. à d. que $T_{xr} > T_{xpl}$, ainsi que cela résulte nécessairement de la signification du point de contact critique. On trouve de même:

[1]) Comme on peut écrire, en première approximation,

$$T_{xr} = T_k + \left[RT^2_k k_{11} \alpha - m^2_{01}\right]\frac{x}{RT_k k_{11}},$$

on voit que $T_{xr} > T_k$ ou $< T_k$ suivant que $RT^2_k k_{11} \alpha < m^2_{01}$ ou $> m^2_{01}$, de sorte que le critérium trouvé ici pour le genre de condensation rétrograde est d'accord avec celui trouvé plus haut (p. 215).

$$p_{xpl} - p_{xv} = -\frac{1}{4}\frac{k_{01}\, m_{01}^{\,2}}{R^2 T^2_k\, k_{30}\, k_{11}}\left(\frac{m^2_{01}}{RT_k} + m_{11}\right)\times$$
$$\times\left[\left(\frac{m^2_{01}}{RT_k} + m_{11}\right) - 2\,\frac{m_{01}\, k_{11}}{k_{01}}\right]x^2, \quad (66)$$

une formule dont j'abandonne la discussion au lecteur.

Enfin, pour être complet, je communiquerai encore les formules suivantes:

$$T_{xm} - T_{xv} = -\frac{1}{4}\frac{m^4_{01}\, k_{11}}{R^2\, T_k^{\,2}\, k^2_{01}\, k_{30}}\, x^2 \quad (67)$$

$$p_{xm} - p_{xv} = \frac{1}{4}\frac{m^4_{01}\, k_{11}}{R^2\, T_k^{\,2}\, k_{01}\, k_{30}}\, x^2 \quad (68)$$

$$T_{xpl} - T_{xm} = \frac{1}{4}\frac{m^2_{01}}{R^2\, T_k^{\,2}\, k_{30}\, k_{11}}\left[\frac{m^2_{01}\, k^2_{11}}{k^2_{01}} - \left(\frac{m^2_{01}}{RT_k} + m_{11}\right)^2\right]x^2 \quad (69)$$

$$p_{xpl} - p_{xm} = -\frac{1}{4}\frac{k_{01}\, m^2_{01}}{R^2\, T_k^{\,2}\, k_{11}\, k_{30}}\left(\frac{m^2_{01}}{RT_k} + m_{11} - \frac{m_{01}\, k_{11}}{k_{01}}\right)^2 x^2. \quad (70)$$

12. La condensation.

La ligne qui représente la variation corrélative de la pression et du volume pendant la condensation, ce qu'on appelle l'isotherme pratique (par opposition à l'isotherme théorique qui relie d'une façon continue les branches gazeuse et liquide), s'étend entre les deux points p_1', v_1' et p_2', v_2', où s'achève et où commence la condensation. On peut cependant se figurer qu'on la prolonge au-delà de ces deux limites, mais alors elle n'a plus qu'une signification mathématique, puisqu'en dehors de ces deux points la masse d'une des deux phases deviendrait négative.

Pour trouver l'équation de l'isotherme pratique, nous devons chercher quelle est, pour chaque volume, la pression sous laquelle coexistent les deux phases dans lesquelles le mélange se sépare. A cet effet je reviens à la projection sur le plan x, v (§ 9) de la surface ψ correspondant à la température T. Soient v_1, x_1 et v_2, x_2 les phases dans lesquelles le mélange se sépare quand le volume v est atteint ($v_2 > v > v_1$);

alors le point v, x est situé sur la droite qui joint les deux points v_1, x_1 et v_2, x_2, de sorte qu'on a la relation:

$$\frac{v - v_{Tk} - \Phi}{x - x_{Tk} - \Xi} = \frac{\varphi}{\xi}, \tag{71}$$

où Φ, Ξ, φ et ξ ont la même signification qu'au § 6. Si p_c est la pression sous laquelle les deux phases x_1 et x_2 coexistent, nous obtenons l'équation de l'isotherme pratique en exprimant, dans l'équation (71), les grandeurs Φ, Ξ, φ et ξ en fonction de p_c, à l'aide des équations (22), (23), (24) et (25).

Par approximations successives on trouve qu'on peut mettre (71) sous la forme:

$$p_c = p_{Tk} + m_{01}(x - x_{Tk}) - \frac{m^2_{01}}{RT_k}(v - v_{Tk})x + \ldots;\ ^{1)} \tag{71'}$$

si nous n'allons pas plus loin que les trois premiers termes, c'est l'équation d'une ligne droite qui joint les deux points où la condensation commence et finit.

En rapport avec l'équation (17) on trouve, en négligeant les termes d'ordre supérieur, comme différence entre les ordonnées des isothermes théorique et pratique,

$$p - p_c = m_{11}(v - v_{Tk})(x - x_{Tk}) + \frac{m^2_{01}}{RT_k}(v - v_{Tk})x + m_{30}(v - v_{Tk})^3, \tag{72}$$

ce qui, en vertu de (32), peut s'écrire:

$$p - p_c = k_{30}(v - v_{Tk})[(v - v_{Tk})^2 - \varphi'^2]. \tag{72'}$$

Sous cette forme nous voyons que l'isotherme pratique coupe l'isotherme théorique en trois points [2]), savoir $v = v_{Tk} + \varphi'$, $v = v_{Tk} - \varphi'$ et $v = v_{Tk}$ (le tout en première approximation); les deux premiers points sont ceux où la condensation commence et finit (Φ' a été omis comme d'ordre plus élevé que φ'), le troisième est compris entre les deux autres.

---

[1]) On peut encore l'écrire:

$$p_c = p_k + k_{01}(T - T_k) + \ldots\ldots$$
$$- x\left[k_{01}\, T_k\, \alpha + \frac{m^2_{01}}{RT_k}(v - v_k) + \ldots\ldots\right] + \ldots\ldots \tag{71''}$$

[2]) Voir HARTMAN, ces *Archives*, (2), 11, 401, 1906.

Quand $v_{Tk} + \Phi > v > v_{Tk}$, c. à d. au commencement de la condensation, $p > p_c$ et l'isotherme théorique est placée au dessus de la courbe pratique; si $v_{Tk} > v > v_{Tk} - \Phi$, c. à d. à la fin de la condensation, $p < p_c$ et l'isotherme pratique est placée au-dessus de l'autre [1]).

On sait que [2]), quand un mélange M se sépare en deux phases A et B (fig. 16, p. 225) [3]), le rapport des quantités moléculaires de ces deux phases est égal au rapport des deux segments AM et MB de la corde de contact; cela veut dire que, si l'on considère une molécule-gramme du mélange et que les points A et B représentent respectivement la phase liquide et la phase gazeuse, la phase liquide contient $\frac{BM}{AB}$ mol.-gr. du mélange qui la constitue, et la phase gazeuze $\frac{AM}{MB}$ mol.-gr. Quand nous nous occupons de l'allure de la condensation, c'est le rapport $r = \frac{BM}{AB}$ qui nous intéresse [4]).

Or, on a

[1]) Cela résulte d'ailleurs nécessairement de la forme en s de l'isotherme théorique, combinée avec l'allure sensiblement rectiligne de la courbe pratique. La preuve n'en est fournie ici que pour des mélanges avec une petite proportion d'une des composantes; pour la preuve générale, voir Kuenen, Theorie der Verdampfung etc., p. 54.

[2]) Voir van der Waals, Cont. II, p. 127.

[3]) Dans la figure 16 j'ai donné une représentation schématique de l'allure de la condensation. En réalité la largeur de la figure devrait être infiniment petite. J'y ai dessiné deux courbes connodales, l'une en trait plein, l'autre en pointillé, courbées en des sens différents, mais pour lesquelles les phénomènes de condensation sont identiquement les mêmes. Au bas de la figure on voit comment la quantité moléculaire (r) du liquide varie avec le volume total du mélange. Telle que la figure est placée, elle montre l'allure de la condensation dans le cas où elle est rétrograde de première espèce ($v_{Tr} > v_{Tpl}$). On n'a qu'à retourner la figure sens dessus dessous pour obtenir le cas d'une condensation rétrograde de deuxième espèce ($v_{Tr} < v_{Tpl}$).

[4]) Ce qu'on observe directement dans la condensation, c'est évidemment la variation du volume. Mais, dans nos considérations, où la variation totale du volume est infiniment petite, de sorte que les variations de densité des phases coexistantes le sont également, tandis que la variation du rapport du volume liquide au volume total est finie, le rapport des quantités moléculaires est égal, en première approximation, au rapport des volumes. La fig. 16 représente donc aussi la variation du volume de la phase liquide. (Comparez cette figure avec la pl. X, fig. 2, du tome XI et la fig. 2 à la page 79 de ce tome-ci).

$$r = \frac{v_2 - v}{v_2 - v_1} = \frac{v_{Tk} + \Phi + \phi - v}{2\phi} = \frac{1}{2} - \frac{v - v_{Tk} - \Phi}{2\phi}. \qquad (73)$$

Pour plus de facilité je poserai maintenant $y = r - \frac{1}{2}$ et $v - v_{Tpl} = x$. Je me bornerai d'ailleurs à considérer des valeurs de x différant infini-

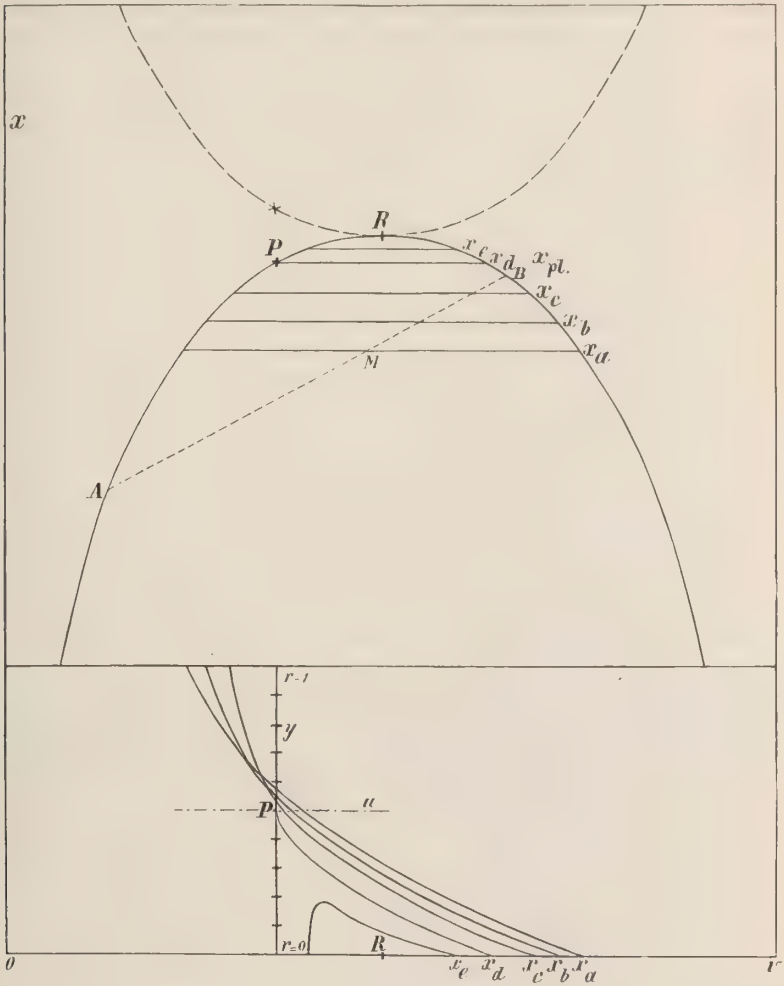


Fig. 16.

ment peu de x_{Tpl} (c. à d. $x - x_{Tpl}$ du même ordre que $x_{Tpl} - x_{Tr}$, donc du second ordre). Remplaçant maintenant Φ par son expression (form. 23) et éliminant p, au moyen de l'équation (71'), on peut écrire dans ces conditions

$$y = \frac{-z}{2\sqrt{-\frac{(m^2_{01} + RT_k m_{11})}{RT_k m_{30}}\left[(x - x_{Tpl}) - \frac{m_{01}}{RT_k} x_{Tpl}\, z\right]}}. \quad (73')$$

En réalité y ne peut pas dépasser les limites $+ {}^1/_2$ et $- {}^1/_2$; mais, à un point de vue mathématique, on peut se figurer que y prenne des valeurs plus grandes que la première limite ou plus petites que la seconde [1]). Quant à z, il reste toujours infiniment petit du premier ordre [2]). Nous pouvons il est vrai donner à la représentation schématique (fig. 16) une largeur finie en introduisant comme nouvelle variable $u = \frac{z}{x_{Tpl}}$; l'équation (73') prend alors la forme

$$y = \frac{-u}{2\sqrt{-\frac{(m^2_{01} + RT_k m_{11})}{RT_k m_{30}}\left(\frac{x - x_{Tpl}}{x^2_{Tpl}} - \frac{m_{01}}{RT_k} u\right)}},$$

que l'on peut encore écrire:

$$y = \frac{-u}{\sqrt{\frac{m^2_{01}(m^2_{01} + RT_k m_{11})^2}{R^4 T^4_k m^2_{30}}\left(\frac{2\, x_{Tpl}}{v_{Tr} - v_{Tpl}} u - \frac{x - x_{Tpl}}{x_{Tr} - x_{Tpl}}\right)}}. \quad (73'')$$

Mise sous cette dernière forme, l'équation fait voir que l'allure de la condensation dépend uniquement des valeurs relatives de x_{Tr} et x_{Tpl} d'une part, de v_{Tr} et v_{Tpl} d'autre part. En premier lieu, le dénominateur étant essentiellement positif, y et u sont de signes contraires, c. a d. que la courbe est située dans le 2me ou dans le 4me quadrant. Elle présente une asymptote verticale correspondant à l'abscisse:

$$u = \frac{1}{2}\frac{v_{Tr} - v_{Tpl}}{x_{Tpl}\,(x_{Tr} - x_{Tpl})}(x - x_{Tpl});\ ^{3})$$

[1]) Dans le premier cas cela signifierait un volume liquide plus grand que le volume total, dans le second un volume liquide négatif.

[2]) De l'ordre de $v_{Tr} - v_{Tpl}$.

[3]) Une valeur infiniment grande de y correspond à $\phi = 0$; c. à d. que le volume correspondant à l'asymptote est déterminé par l'intersection de la droite horizontale, se rapportant au mélange considéré, avec la tangente au point de plissement.

si $v_{Tr} > v_{Tpl}$, cette asymptote est située à droite ou à gauche de l'origine (volume de plissement) suivant que $x - x_{Tpl}$ et $x_{Tr} - x_{Tpl}$ sont de même signe ou de signes contraires; et si $v_{Tr} < v_{Tpl}$ c'est le contraire qui a lieu. La quantité sous le radical devant nécessairement rester positive, on trouve que la courbe est toujours située à la droite de l'asymptote quand $v_{Tr} > v_{Tpl}$ et à la gauche quand $v_{Tr} < v_{Tpl}$. Si x n'est pas compris entre x_{Tr} et x_{Tpl}, u peut s'annuler et passer du positif au négatif en même temps que y passe du négatif au positif. Mais si x est compris entre x_{Tpl} et x_{Tr}, u ne change pas de signe pendant la condensation et passe par un maximum ou un minimum (condensation rétrograde); si, dans ces conditions, $v_{Tr} > v_{Tpl}$, u reste toujours positif, donc y négatif (condensation rétrograde de première espèce), tandis que si $v_{Tr} < v_{Tpl}$, u est toujours négatif, donc y positif (condensation rétrograde de deuxième espèce). L'existence d'une asymptote verticale rend asymétrique l'allure de la condensation rétrograde, en ce sens qu'une phase liquide disparaît plus rapidement qu'elle ne prend naissance et qu'une phase gazeuse se forme plus rapidement qu'elle ne disparaît [1]).

Dans le cas où le mélange est précisément celui qui correspond au point de plissement ($x = x_{Tpl}$), l'équation (73″) devient:

$$y = \frac{-u}{\sqrt{\dfrac{m^2_{01}\,(m^2_{01} + RT_k\, m_{11})^2}{R^4\, T_k^4\, m_{30}^2} - \dfrac{2\, x_{Tpl}}{v_{Tr} - v_{Tpl}}\, u}};$$

sous cette forme elle représente une droite verticale (y indéterminé) correspondant au volume de plissement, et une demi-parabole située dans le 2me ou dans le 4me quadrant, suivant que $v_{Tr} <$ ou $> v_{Tpl}$.

Toutes ces circonstances sont d'accord avec la fig. 16.

---

13. Examen de deux cas particuliers.

A. $m_{01} = 0$.

Dans le cas particulier ou $m_{01} = 0$, c. à d. s'il existe par hasard, entre les grandeurs α et β, la relation $p_k\, \beta = k_{01}\, T_k\, \alpha$, nous avons vu

[1]) Voir aussi VAN DER WAALS, Cont. II, p. 128.

que les isothermes, dans le diagramme p, v, x, s'entrecoupent dans la voisinage du point critique p_{Tk}, v_{Tk} (voir p. 202). Dans ces conditions, les formules générales nous apprennent qu'en première approximation les points de plissement et de contact critique coïncident avec le point p_{Tk}, v_{Tk}.

Pour la courbe limite dans le diagramme p, v, x, la formule (30′) donne $\frac{d^2p}{dv^2} = 0$, ce que veut dire évidemment que cette courbe limite est maintenant une parabole de degré supérieur au second. Effectivement nous trouvons dans ce cas:

$$\Phi = -\frac{1}{m_{30}}\left(\frac{1}{3}m_{21} - \frac{2}{5}\frac{m_{11}\,m_{40}}{m_{30}}\right)\Xi, \tag{74}$$

$$\Phi^2 = -\frac{m_{11}}{m_{30}}\,\Xi, \tag{75}$$

$$\xi = \frac{2\,A}{RT}\,\Phi\,\Xi\,(\Xi + x_{Tk}) \tag{76}$$

et

$$p_c - p_{Tk} = A\,\Xi^2 \tag{77}$$

où

$$A = m_{02} - \frac{1}{3}\frac{m_{11}\,m_{21}}{m_{30}} + \frac{1}{5}\frac{m^2_{11}\,m_{40}}{m^2_{30}};$$

de sorte que la courbe limite a maintenant pour équation:

$$p - p_{Tk} = \frac{m^2_{30}}{m^2_{11}}\,A\,(v - v_{Tk})^4. \tag{77'}$$

La condition $m_{01} = 0$ introduit aussi une modification dans l'allure de la projection des isobares sur le plan x, v (p. 211). En première approximation ces courbes forment deux systèmes d'hyperboles, représentés par l'équation:

$$m_{02}\,(x - x_{Tk})^2 + m_{11}\,(x - x_{Tk})\,(v - v_{Tk}) = p - p_{Tk}; \tag{78}$$

les asymptotes sont, l'une

$$x - x_{Tk} = -\frac{m_{11}}{m_{02}}\,(v - v_{Tk}),$$

tandis que l'autre, $x = x_{Tk}$, peut s'écrire, en deuxième approximation:

$$x - x_{Tk} = -\frac{m_{30}}{m_{11}}(v - v_{Tk})^2.$$

La nature de la courbe connodale n'est pas modifiée: elle reste une parabole du second degré, le long de laquelle on a maintenant:

$$\frac{d^2x}{dv^2} = -2\frac{m_{30}}{m_{11}} = \frac{2k_{30}}{T_k k_{11} z}.$$

En première approximation elle se confond donc avec la deuxième asymptote.

Enfin, dans le diagramme p, v, T des isothermes relatives à un même mélange, les points de plissement et de contact critique coïncident avec le sommet de la courbe limite (voir les formules 58, 64, 68 et 70). Il résulte de là que l'isotherme du point de contact critique présente en ce point une tangente horizontale, et que le mélange se comporte, en première approximation, comme une substance simple.

$$B.\, m^2_{01} + RT_k m_{11} = 0.$$

Dans ce deuxième cas particulier, le terme en Ξ dans l'expression de Φ^2 (form. 23) disparaît, ce qui fait que Φ devient du premier degré par rapport à cette variable. On trouve alors

$$\Phi = -\frac{1}{3m_{30}}\left(\frac{m_{01}m_{11}}{RT_k} + m_{21}\right)\Xi - \frac{m_{01}}{RT_k m_{30}}\left(\frac{1}{3}m_{11} - \frac{2}{5}\frac{m_{01}m_{40}}{m_{30}}\right)x_{Tk} \quad (79)$$

et

$$\Phi^2 = \frac{m_{11}}{m_{30}}x_{Tk} + M\Xi^2 + N\Xi x_{Tk}, \quad (80)$$

où

$$M = -\frac{1}{m_{30}}\left(4\frac{m_{01}m_{02}}{RT_k} + \frac{1}{3}\frac{m^3_{11}}{RT_k m_{30}} + m_{11} + m_{12} - \right.$$
$$\left. -\frac{2}{3}\frac{m_{01}m_{11}m_{21}}{RT_k m_{30}} - \frac{1}{3}\frac{m^2_{21}}{m_{30}} + 2X_2\frac{m_{11}}{RT_k}\right)$$

et

$$N = -\frac{1}{m_{30}}\left(4\frac{m_{01}m_{02}}{RT_k} + \frac{m^3_{11}}{RT_k m_{30}} + 2m_{11} - \frac{m_{01}m_{11}m_{21}}{RT_k m_{30}} - \right.$$
$$\left. -\frac{2}{5}\frac{m_{01}m^2_{11}m_{40}}{RT_k m^2_{30}} - \frac{2}{5}\frac{m_{11}m_{21}m_{40}}{m^2_{30}} + 4X_2\frac{m_{11}}{RT_k}\right).$$

En substituant ces expressions dans la formule (30) et tenant compte de (24), il vient pour la courbe limite, en première approximation, une équation du second degré. Cette équation ne représente toutefois plus une parabole mais une courbe à centre. Les coordonnées de ce centre sont:

$$p_c = p_{Tk} - \frac{1}{2}\frac{m_{01}}{M}\frac{N}{M}x_{Tk}$$

$$v_c = v_{Tk} + \frac{1}{6\,m_{30}}\frac{N}{M}\left(\frac{m_{01}\,m_{11}}{RT_k} + m_{21}\right)x_{Tk} -$$

$$-\frac{m_{01}}{RT_k m_{30}}\left(\frac{1}{3}m_{11} - \frac{2}{5}\frac{m_{01}\,m_{40}}{m_{30}}\right)x_{Tk},$$

et, rapportée à ce centre, l'équation de la courbe peut s'écrire; en première approximation,

$$\left[v - v_c + \frac{1}{3\,m_{30}}\left(\frac{m_{01}\,m_{11}}{RT_k} + m_{21}\right)\frac{p - p_c}{m_{01}}\right]^2 - M\frac{(p - p_c)^2}{m_{01}^2} =$$

$$= \frac{m_{11}}{m_{30}}x_{Tk} = -\frac{k_{11}}{k_{30}}(T - T_k). \qquad (81)$$

En appliquant le critérium ordinaire des courbes du second degré, on constate qu'elle appartient au genre ellipse ou au genre hyperbole suivant que $M < 0$ ou $M > 0$.

Quant à la courbe connodale, son équation s'obtient, en première approximation, en remplaçant dans celle de la courbe limite $p - p_{Tk}$ par $m_{01}(x - x_{Tk})$. Elle est du même genre que la courbe limite. Les coordonnées de son centre sont

$$v_c \text{ et } x_c = x_{Tk} - \frac{1}{2}\frac{N}{M}x_{Tk}.$$

Il y a deux cas à distinguer:

a. $M < 0$; les courbes limite et connodale sont des ellipses. Comme $k_{11} < 0$ et $k_{30} < 0$, ces ellipses ne sont réelles que lorsque $T < T_k$; elles ne sont situées qu'en partie, — pour la moitié, en première approximation —, dans la region des mélanges réels ($x > 0$). On trouve deux points de plissement, — dont un seul physiquement possible —, et deux points de contact critique coïncidant avec les points de plisse-

ment (du moins au degré d'approximation que nous considérons ici, savoir $\frac{1}{2}$, les écarts étant du 1er ordre; voir les formules 11, 12 et 13). Les éléments de ces points sont:

$$x_{Tpl} = x_{Tr} = x_c \pm \sqrt{\frac{k_{11}}{Mk_{30}}(T - T_k)} \tag{82}$$

$$p_{Tpl} = p_{Tr} = p_c \pm m_{01}\sqrt{\frac{k_{11}}{Mk_{30}}(T - T_k)} \tag{83}$$

$$v_{Tpl} = v_{Tr} = v_c \mp \frac{1}{3m_{30}}\left(\frac{m_{01}\,m_{11}}{RT_k} + m_{21}\right)\sqrt{\frac{k_{11}}{Mk_{30}}(T - T_k)}. \tag{84}$$

Si $T = T_k$, les deux courbes sont réduites à un point, le point critique de la composante principale; et si $T > T_k$ les deux courbes sont imaginaires.

b. $M > 0$; les courbes considérées sont des hyperboles. Si $T > T_k$, seule la branche de l'hyperbole située au-dessus de l'axe $p = p_c$ (ou $x = x_c$) peut être observée. On trouve de nouveau deux points de plissement (ou de contact critique), dont un seul est accessible à l'observation, et dont les coordonnées sont de nouveau fournies par les formules (79), (80) et (81). Si $T = T_k$ les deux courbes en question se réduisent à deux droites qui s'entrecroisent au point critique de la composante principale; ce point critique est alors un point de plissement double. Enfin, si $T < T_k$, il n'y a plus de points de plissement; on peut alors observer, pour chacune des deux courbes, deux demi-branches; chaque phase de l'une des branches correspond à une phase de l'autre.

On voit ainsi que dans le cas particulier où $m^2_{01} + RT_k\,m_{11} = 0$, la surface ψ présente un pli fermé, dans le voisinage immédiat de la composante principale; du moins si la température est moins élevée que la température critique de cette composante, car à des températures plus hautes le pli a totalement disparu (T_k est un maximum pour T_{xpl}). Ou bien elle présente deux plis, qui se fusionnent en un seul dès que la température s'abaisse au-dessous de la température critique de la composante principale (T_k est un minimum).

14. Le diagramme p, T des courbes limites.

1. *La courbe de tension de vapeur de la composante principale.* Nous avons déjà trouvé, en première approximation, pour l'équation de cette courbe (voir form. 11):

$$p_c = p_k + k_{01}(T - T_k).$$

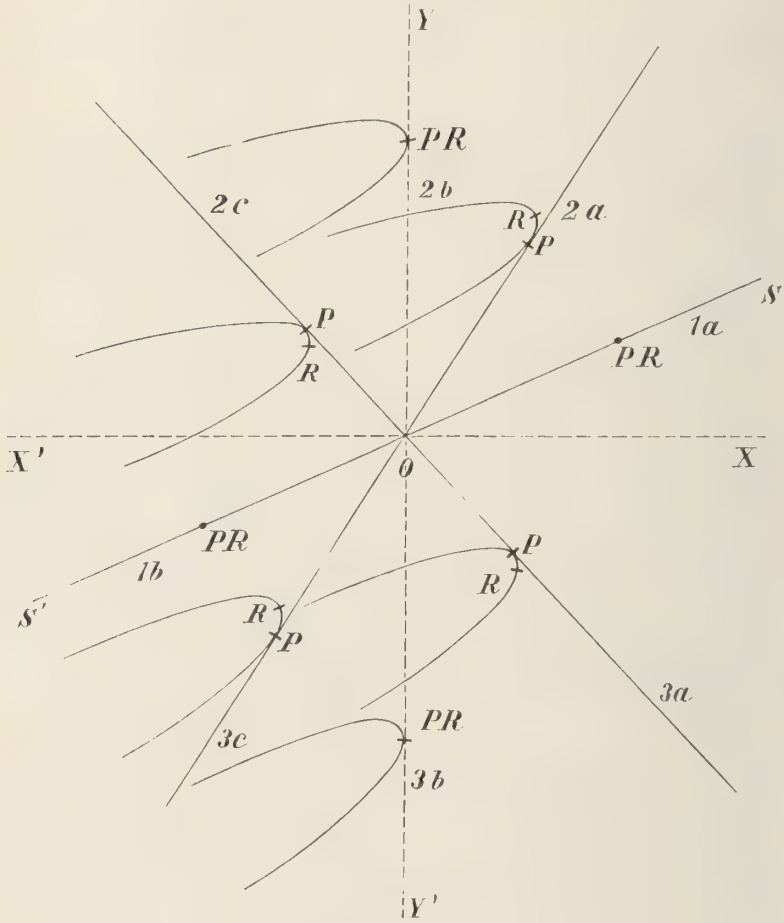


Fig. 17.

Puisque k_{01} est positif, cette ligne droite monte à mesure que T augmente et s'arrête au point p_k, T_k. T_k est une température maxima; la droite est située dans le 3me quadrant ($S'O$, fig. 17).

2. *La courbe de plissement.* En vertu de l'équation (27), on a

$$p_{Tpl} = p_k + \left[p_k\beta - \frac{m^3{}_{01}}{m^2{}_{01} + RT_k\, m_{11}}\right]\frac{T - T_k}{\alpha\, T_k} =$$

$$= p_k + \left(k_{01} - \frac{RT_k\, k_{11}\, m_{01}}{m^2{}_{01} + RT_k\, m_{11}}\right)(T - T_k). \quad (27')$$

La droite que cette équation représente peut prendre toute les directions autour du point 0. Pour des mélanges réels ($x > 0$) elle ne s'étend que d'un côté de ce point, notamment du côté où $T - T_k$ et $m^2{}_{01} + RT_k\, m_{11}$ sont de même signe (voir form. 26', p. 208).

Dans la situation de la ligne de plissement nous avons à distinguer les cas suivants:

a. $m_{01} = 0$. $p_{Tpl} = p_k + k_{01}\,(T - T_k)$; c. à d. que le premier élément de la ligne de plissement est situé dans le prolongement de la droite 1, ou coïncide avec elle, suivant que $T > T_k$ ou $T < T_k$, donc suivant que z est positif ou négatif (voir form. 26'). Dans le 1er cas (a') la ligne de plissement est donc située dans le 1er quadrant (OS), dans le 2d cas (a'') dans le 3me quadrant (OS').

J'ai déjà fait remarquer (p. 229) que dans ce cas le mélange se comporte, en première approximation, comme une substance simple; c'est le cas $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial v} = 0$, déjà traité par M. VAN DER WAALS [1]). Il faut alors qu'il y ait un mélange, — ici la composante principale elle-même —, dont la tension de vapeur est un maximum ou un minimum. En effet, l'expression de p_c (form. 24 et 77) nous apprend que dans ce cas $\left(\frac{\partial p_c}{\partial \Xi}\right)_k = 0$, et que p_k est un maximum ou un minimum, suivant que A est négatif ou positif.

b'. $m_{01} > 0$ et $m^2{}_{01} + RT_k\, m_{11} > 0$. $\frac{dp_{Tpl}}{dT} > k_{01}$, et la ligne de plissement est située dans l'angle SOY, parce que $T - T_k$ doit aussi être positif (form. 26').

b''. $m_{01} > 0$ et $m^2{}_{01} + RT_k\, m_{11} = 0$. $\frac{dp_{Tpl}}{dT} = \infty$, et le premier élément de la ligne de plissement coïncide avec OY [2]).

[1]) Ces *Archives*, 30, 271, 1896.

[2]) D'après les formules (82) et (83) on a alors

$$p_{Tpl} = p_k + m_{01}\, x_{Tpl},$$

de sorte que $p_{Tpl} > p_k$ pour des mélanges reéls.

C'est là le deuxième des cas particuliers, traités par M. VAN DER WAALS [1]), relatifs à l'allure de la courbe de plissement; c'est notamment celui où il y a un mélange pour lequel la température de plissement est un maximum ou un minimum. Tel est en effet le cas ici (voir § 13 *B*); d'après la formule (83):

$$T - T_k = \frac{M k_{30}}{k_{11} m^2_{01}} (p_{Tpl} - p_k)^2,$$

donc $\left(\frac{dT_{pl}}{dp_{Tpl}}\right)_k = 0$. Si $M > 0$, $T > T_k$ et T_k est une température de plissement minima; c'est le cas où les courbes limite, connodale et spinodale sont des hyperboles (mélanges du 3me type de HARTMAN). Si $M < 0$, $T < T_k$ et T_k est un maximum; c'est le cas où ces trois courbes sont des ellipses (mélanges du 2^d^ type).

b'''. $m_{01} > 0$ et $m^2_{01} + RT_k m_{11} < 0$. $\frac{dp_{Tpl}}{dT} < k_{01}$ et, comme $T - T_k$ est aussi négatif (form. 26'), la ligne est située dans l'angle $S'OY$.

c'. $m_{01} < 0$ et $m^2_{01} + RT_k m_{11} > 0$. $\frac{dp_{Tpl}}{dT} < k_{01}$ et $T - T_k > 0$; donc dans l'angle SOY.

c''. $m_{01} < 0$ et $m^2_{01} + RT_k m_{11} = 0$. La ligne de plissement commence par avoir la direction OY' [2]). Pour le reste, voir *b''*.

c'''. $m_{01} < 0$ et $m^2_{01} + RT_k m_{11} < 0$. $\frac{dp_{Tpl}}{dT} > k_{01}$ et $T - T_k < 0$; donc dans l'angle $S'OY'$.

3. *La courbe des points de contact critique.* En première approximation, $p_{Tr} = p_{Tpl}$ et la courbe des points de contact critique coïncide avec la ligne de plissement. Les considérations du n°. 2 sont donc applicables ici. La formule (43) nous apprend d'ailleurs qu'en seconde approximation

$$p_{Tr} - p_{Tpl} = -\frac{1}{4} \frac{m^3_{01} k^2_{11}}{RT_k m_{30} (m^2_{01} + RT_k m_{11})} (T - T_k)^2; \quad (43')$$

il s'ensuit que la courbe de contact critique est située au-dessus de la courbe de plissement lorsque m_{01} et $m^2_{01} + RT_k m_{11}$ sont de même

[1]) Ces *Archives*, 30, 271, 1896.

[2]) Ici $p_{Tpl} < p_k$; voir la note à la page précédente.

signe: c'est ce qui se présente dans les cas a' et c''', donc dans les angles SOY et $S'OY'$. Dans les autres cas c'est le contraire qui a lieu. Les deux courbes coïncident jusqu'en deuxième approximation dans le cas particulier où $m_{01} = 0$ et même quand

$$m^2_{01} + RT_k m_{11} = 0 \left(\frac{dp_{Tpl}}{dT} = \frac{dp_{Tr}}{dT} = \pm \infty\right),$$

bien que dans ce dernier cas le point de plissement ne coïncide pas, en seconde approximation, avec le point de contact critique.

4. *Les courbes limites.* En première approximation ce sont des droites dont l'équation est, d'après la formule (47),

$$p = p_{xk} + k_{01}\,(T - T_{xk}) = p_{xpl} + k_{01}\,(T - T_{xpl}).$$

Ces droites sont donc parallèles à la ligne de tension de vapeur de la composante principale et elles aboutissent sur la ligne de plissement, au point de plissement du mélange auquel elles appartiennent.

En seconde approximation ce sont des paraboles, dont la droite précédente est un diamètre; c'est comme telles que je les ai représentées, d'une façon exagérée, sur la fig. 17, afin de bien faire voir les rapports entre les points de plissement et les points de contact critique. Ces paraboles touchent, comme on sait, la ligne de plissement au point de plissement, tandis qu'elles présentent une tangente verticale au point de contact critique. La relation entre ces deux points, d'après la figure 17, est conforme aux considérations du n°. 3.

---

15. La surface ψ dans le voisinage immédiat du point de plissement.

En appliquant, suivant l'exemple de M. Keesom (*loc. cit.*, p. 95), la transformation projective de M. Korteweg à l'équation de la surface ψ, j'ai exprimé les coefficients de mon équation (20) en fonction de ceux introduits par M. Korteweg dans l'étude des plis.

J'introduis donc les nouvelles coordonnées:

$$\psi'' = (\psi - \psi_{Tpl}) - (v - v_{Tpl}) \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)_{Tpl} - (x - x_{Tpl}) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{Tpl},$$

$$x'' = (x - x_{Tpl}) - m\,(v - v_{Tpl}),$$

$$v'' = v - v_{Tpl},$$

où m est déterminé par l'équation:

$$m \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)_{Tpl} + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v}\right)_{Tpl} = 0;$$

en première approximation on tire de là, en faisant usage de l'équation (20):

$$m = \frac{m_{01}}{RT_l}\, x_{Tpl}\ ^{1)}.$$

Puisque l'équation de la surface ψ contient un terme avec $\log x$, elle ne peut être identifiée avec l'équation (2) de Korteweg que dans le cas où $\log x$ peut être développé en série. Or, il n'en peut être ainsi que dans le cas où la différence entre x et x_{Tpl} est si petite, que $x - x_{Tpl}$ est infiniment petit par rapport à x_{Tpl}. Nous restons donc dans le voisinage immédiat du point de plissement [2]). Dans ces circonstances, l'équation de la surface ψ peut se mettre sous la forme:

$$\psi'' = c_1 x''^2 + d_1 x''^3 + d_2 x''^2 v'' + d_3 x'' v''^2 + e_1 x''^4 + \ldots,$$

où l'on a, en première approximation,

[1]) Ce qui est d'accord avec l'expression donnée par M. Keesom (p. 96). La valeur de m doit encore satisfaire aux deux équations:

$$m \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial v}\right)_{Tpl} + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}\right)_{Tpl} = 0$$

et

$$m^3 \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}\right)_{Tpl} + 3\,m^2 \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2\, \partial v}\right)_{Tpl} + 3\,m \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x\, \partial v^2}\right)_{Tpl} + \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial v^3}\right)_{Tpl} = 0;$$

tel est en effet le cas quand on remplace x_{Tpl} et v_{Tpl} par leurs valeurs (form. 26 et 28). Inversement, ces équations peuvent servir à déterminer x_{Tpl} et v_{Tpl}, c'est ainsi qu'a opéré M. Korteweg (ces *Archives*, (2), 8, 249, 1903).

[2]) On voit donc que le développement en question peut servir à déterminer les coordonnées du point de contact critique (voir p. 96).

$$\left.\begin{aligned}
&c_1 = \frac{1}{2}\frac{RT_k}{x_{Tpl}},\ d_1 = -\frac{1}{6}\frac{RT_k}{x^2_{Tpl}},\ d_2 = -\frac{1}{2}\frac{m_{01}}{x_{Tpl}},\\
&d_3 = -\frac{1}{2\,RT_k}(m^2{}_{01} + RT_k m_{11}),\ e_1 = \frac{1}{12}\frac{RT_k}{x^3{}_{Tpl}},\\
&e_2 = \frac{1}{3}\frac{m_{01}}{x^2{}_{Tpl}}, e_3 = \frac{1}{2}\frac{m^2{}_{01}}{RT_k\,x_{Tpl}}, e_4 = \frac{1}{3\,R^2T^2{}_k}(m^3{}_{01} - R^2T^2{}_k m_{21}),\\
&e_5 = -\frac{1}{4}m_{30}\ldots, f_6 = -\frac{1}{5}m_{40}\ \text{etc.}\ ^{1}).
\end{aligned}\right\}\quad(85)$$

L'expression $4\,c_1\,e_5 - d_3{}^2 = -\frac{1}{2}\frac{RT_k\,m_{30}}{x_{Tpl}}$ est toujours positive, puisque nous supposons ici que le point de plissement est réel et que m_{30} est négatif; le point de plissement de la surface ψ est donc toujours de première espèce [2]).

Puisque $d_3 = 0$ quand $m^2{}_{01} + RT_k\,m_{11} = 0$, le second cas particulier que j'ai examiné au sujet de la courbe limite et de la courbe connodale (p. 229) correspond au premier cas d'un point de plissement double de Korteweg (*l. c.* p. 1166). Le second cas d'un point de plissement double, notamment celui où $4\,c_1\,e_5 - d^2{}_3 = 0$ n'existe pas pour la surface ψ.

Le diagramme α, β.

Dans ce qui précède les différents phénomènes présentés, par des mélanges où une des composantes n'est présente qu'en petites quantités, dans le voisinage du point critique, ont été exprimés, conformément au plan exposé dans l'introduction, exclusivement à l'aide des constantes α et β, caractéristiques du mélange, et des coefficients différentiels que l'on peut déduire de l'équation d'état empirique générale, réduite. Pour abréger, et pour éviter une répétition continuelle des mêmes coefficients (voir § 1), j'ai fait usage jusqu'ici, non des dérivées sous forme réduite, mais des coefficients k, ou plutôt des coefficients m dont

---

[1]) Voir aussi p. 96.

[2]) Voir Korteweg, *Wien. Ber.*, *loc. cit.*, p. 1158.

j'ai déterminé les relations avec les k, ainsi qu'avec α et β (form. 18'). Mais, comme j'aurai besoin dans la suite des valeurs numériques des coefficients, je ferai usage maintenant des dérivées de l'équation d'état réduite, c. à d. des coefficients de l'équation (1). Pour abréger, je poserai d'ailleurs:

$$\mathfrak{p}_{01} = \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}, \mathfrak{p}_{11} = \frac{\partial^2 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}\, \partial \mathfrak{t}}, \mathfrak{p}_{21} = \frac{\partial^3 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}^2 \partial \mathfrak{t}}, \ldots \mathfrak{p}_{30} = \frac{\partial^3 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}^3}, \mathfrak{p}_{40} = \frac{\partial^4 \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{v}^4}, \text{ etc.},$$

et je supposerai que ces dérivées se rapportent au point critique. Avec cette nouvelle notation nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned}
m_{01} &= p_k (\beta - \mathfrak{p}_{01}\, \alpha), \\
m_{02} &= p_k [\beta + \alpha(\alpha - \beta)\mathfrak{p}_{01} + \frac{1}{2}\alpha^2 \mathfrak{p}_{02} + \alpha(\alpha - \beta)\mathfrak{p}_{11} - \alpha' \mathfrak{p}_{01}], \\
m_{11} &= -\frac{p_k}{v_k}\mathfrak{p}_{11}\, \alpha, \; m_{21} = -\frac{1}{2}\frac{p_k}{v_k^2}[\mathfrak{p}_{21}\, \alpha + \mathfrak{p}_{30}(\alpha - \beta)], \\
m_{30} &= \frac{1}{6}\frac{p_k}{v_k^3}\mathfrak{p}_{30}, \; m_{40} = \frac{1}{24}\frac{p_k}{v_k^4}\mathfrak{p}_{40}, \text{ etc.;}
\end{aligned} \tag{18''}$$

je poserai encore

$$C_k = \frac{RT_k}{p_k v_k}.\ ^{1)}$$

Il m'a paru intéressant de déterminer quels sont, au point de vue des valeurs numériques de α et β, les divers cas qui peuvent se présenter, d'après les formules données dans ce qui précède, quant à la situation relative des divers points critiques; pour illustrer ces divers cas, je me suis proposé de tracer un diagramme α, β, séparé par des lignes en divers champs, dont chacun serait caractérisé par une situation relative déterminée des points critiques; ce diagramme est donc l'analogue du diagramme α, γ de M. Korteweg, tracé dans le même but et avec lequel il offre beaucoup de ressemblance, comme on peut s'en convaincre par la comparaison. Mais, pour ne pas pousser trop loin cette illustration, je me suis borné à comparer la situation du point de plissement avec celle du point critique de la composante principale; c. à d. que j'ai

---

[1]) Cette constante a été notée antérieurement C_4 par M. Kamerlingh Onnes (ces *Archives*, (2), 5, 670, 1901). Voir aussi Keesom, p. 66.

déterminé les limites des champs où $T_{xpl} >$ ou $< T_k$, $p_{xpl} >$ ou $< p_k$ et $v_{xpl} >$ ou $< v_k$; en outre, j'ai déterminé les domaines où la condensation rétrograde est de première ou de seconde espèce.

1. *La température de plissement.* En vertu de la form. (59), la température de plissement du mélange est plus élevée ou plus basse que la température critique de la composante principale, suivant que l'expression:

$$-\frac{m^2_{01} + RT_k m_{11}}{RT^2_k k_{11}}$$

est positive ou négative; et comme k_{11} est négatif. $T_{xpl} - T_k$ a le signe du numérateur de cette expression. Or

$$m^2_{01} + RT_k m_{11} = p^2_k [(\beta - \mathfrak{p}_{01} \alpha)^2 - C_k \mathfrak{p}_{11} \alpha],$$

de sorte que le domaine où $T_{xpl} > T_k$ est séparé de la région où $T_{xpl} < T_k$ par une courbe dont l'équation est

$$(\beta - \mathfrak{p}_{01} \alpha)^2 - C_k \mathfrak{p}_{11} \alpha = 0.$$

Cette courbe, une parabole représentée par $bAOb'$ sur la planche V [1]), correspond à la première limite de M. Kortewg (l. c. p. 239). En dehors de cette parabole $T_{xpl} > T_k$, à l'intérieur $T_{xpl} < T_k$.

2. *La pression de plissement.* De la form. (60) je déduis que $p_{xpl} >$ ou $< p_k$ suivant que $\mathfrak{p}_{01} (\beta - \mathfrak{p}_{01} \alpha)^2 >$ ou $< C_k \mathfrak{p}_{11} \beta$. L'équation de la courbe qui sépare les deux champs est donc

$$\mathfrak{p}_{01} (\beta - \mathfrak{p}_{01} \alpha)^2 - C_k \mathfrak{p}_{11} \beta = 0;$$

c'est encore une parabole, représentée par $cOBc'$. En dehors de la parabole $p_{xpl} > p_k$, à l'intérieur $< p_k$.

3. *Le volume de plissement.* La façon dont v_{xpl} dépend de α et β peut être déduite de mon équation (61); avec les coefficients réduits celle-ci s'écrit:

---

[1]) Cette figure a été construite à l'aide des valeurs des coefficients $\mathfrak{p}_{01}$, $\mathfrak{p}_{11}$ etc. qui seront calculées dans le chapitre suivant. Pour plus de netteté j'ai représenté les α à une échelle 5 fois plus grande que les β.

$$v_{xpl} = v_k + v_k (\alpha - \beta) x - \frac{(\beta - \mathfrak{p}_{01} \alpha) v_k x}{C^2{}_k \mathfrak{p}_{11} \mathfrak{p}_{30}} [\mathfrak{p}_{11} (\beta - \mathfrak{p}_{01} \alpha^2) - \\ - C_k \mathfrak{p}_{21} (\beta - \mathfrak{p}_{01} \alpha) - 3 C_k \mathfrak{p}^2{}_{11} \alpha].$$

La frontière entre $v_{xpl} > v_k$ et $v_{xpl} < v_k$ est donc:

$$0 = - \mathfrak{p}_{11} (\beta - \mathfrak{p}_{01} \alpha)^3 + C_k \mathfrak{p}_{21} (\beta - \mathfrak{p}_{01} \alpha)^2 + \\ + 3 C_k \mathfrak{p}^2{}_{11} \alpha (\beta - \mathfrak{p}_{01} \alpha) + C^2{}_k \mathfrak{p}_{11} \mathfrak{p}_{30} (\alpha - \beta).$$

C'est une courbe du troisième degré, tout comme la troisième limite de M. Korteweg (l. c. p. 241), à laquelle elle correspond. Pour l'examiner de plus près, je suivrai l'exemple de M. Korteweg et j'introduirai un paramètre z, en posant:

$$z = \beta - \mathfrak{p}_{01} \alpha;$$

au moyen de ce paramètre, α et β sont exprimés de la manière suivante:

$$\alpha = \frac{z}{N} [- \mathfrak{p}_{11} z^2 + C_k \mathfrak{p}_{21} z - C^2{}_k \mathfrak{p}_{11} \mathfrak{p}_{30}]$$

$$\beta = \frac{z}{N} [- \mathfrak{p}_{01} \mathfrak{p}_{11} z^2 + C_k \left\{\mathfrak{p}_{01} \mathfrak{p}_{21} - 3 \mathfrak{p}^2{}_{11}\right\} z - C^2{}_k \mathfrak{p}_{11} \mathfrak{p}_{30}],$$

où

$$N = C^2{}_k \mathfrak{p}_{11} \mathfrak{p}_{30} (\mathfrak{p}_{01} - 1) - 3 C_k \mathfrak{p}^2{}_{11} z.$$

Comme α et β sont des fonctions unicursales de z, toute droite parallèle à la droite $\beta = \mathfrak{p}_{01} \alpha$ (Oa sur la figure) ne coupe la courbe qu'en un seul point à distance finie. Si nous posons

$$z_1 = \frac{C_k \mathfrak{p}_{30} (\mathfrak{p}_{01} - 1)}{3 \mathfrak{p}_{11}},$$

ce qui est une grandeur positive, puisque $\mathfrak{p}_{01} > 1$ (voir la note au bas de la page 247), la droite $\beta = \mathfrak{p}_{01} \alpha + z_1$, représentée en pointillé (CD) sur la figure, est une asympote à la courbe cubique. Cette dernière se compose de deux branches, dont l'une ($dGEd'$), située au-dessus de l'asymptote, est donnée par des valeurs de z plus grandes que z_1, tandis que l'autre ($d''OHEd'''$), au-dessous de l'asymptote, correspond à $z < z_1$.

α s'annulle non seulement pour $z = 0$, mais encore pour deux autres valeurs réelles de z_1, dont l'une est positive, l'autre négative: je nommerai la racine positive z_2, la négative z_3. De même β s'évanouit pour

$z = 0$ et aussi pour deux autres valeurs réelles de z, dont l'une encore (z_4) est positive, l'autre (z_5) négative. On peut démontrer que dans tous les cas $z_5 > z_3$; quant à z_2 et z_4, il se peut que toutes deux soient plus grandes que z_1, et alors $z_4 > z_2$, ou bien toutes deux sont égales à z_1, ou bien encore toutes deux sont plus petites que z_1 et alors $z_4 < z_2$. En vertu des valeurs que nous trouverons pour les coefficients différentiels, l'ordre de succession véritable des racines est:

$$z_4 > z_2 > z_1 > 0 > z_5 > z_3,$$

d'où résulte que la courbe cubique a la forme que je lui ai donnée dans la figure [1]).

Il est aisé de reconnaitre que $v_{xpl} > v_L$ au-dessus de la branche $z > z_1$ et à l'intérieur de la branche $z < z_1$, tandis que $v_{xpl} < v_L$ dans le champ qui est compris en partie entre ces deux branches et qui s'étend plus loin à la droite des deux.

4. *Condensation rétrograde.* Elle est de première espèce quand $v_{Tpl} < v_{Tv}$, et de deuxième espèce quand $v_{Tpl} > v_{Tv}$. Or, en vertu des formules (41) et (26), $v_{Tpl} > v_{Tv}$ quand m_{01} et $m^2_{01} + RT_k m_{11}$ sont de même signe; $m^2_{01} + RT_k m_{11}$ est positif à l'extérieur de la parabole $bAOb'$ et négatif à l'intérieur, et m_{01} est positif au-dessus de la droite Oa et négatif au-dessous. On voit donc que $v_{Tpl} > v_{Tv}$ et que la condensation est rétrograde de deuxième espèce: 1°. à l'intérieur de la parabole $bAOb'$ et au-dessous de la droite Oa, 2°. à l'extérieur de la parabole et au-dessus de la droite; partout ailleurs $v_{Tpl} < v_{Tv}$ et la condensation rétrograde est de première espèce. La droite Oa correspond à la deuxième limite de Korteweg (l. c. p. 240).

Voici maintenant quels sont les caractères physiques des divers champs dans lesquels la figure est divisée par les courbes que nous venons de considérer: [2])

---

[1]) Cette forme est absolument la même que celle de la troisième limite de M. Korteweg; il n'y a que l'orientation qui soit différente.

[2]) J'ai marqué sur la planche V quatre points P, Q, R et S indiquant les mélanges dont les propriétés ont déjà été étudiées. Le premier se rapporte à l'anhydride carbonique avec une petite quantité d'hydrogène ($\alpha = -1{,}219$, $\beta = -1{,}645$); le second à l'anhydride carbonique avec une petite quantité de chlorure de méthyle ($\alpha = 0{,}378$, $\beta = 0{,}088$); le troisième au chlorure de méthyle avec un peu d'anhydride carbonique ($\alpha = -0{,}221$, $\beta = 0{,}281$);

Champ

1:	$T_{xpl} > T_k$,	$p_{xpl} > p_k$,	$v_{xpl} > v_k$,	$v_{Tpl} > v_{Tr}$,	c. r. II
2:	$T_{xpl} > T_k$,	$p_{xpl} > p_k$,	$v_{xpl} < v_k$,	$v_{Tpl} > v_{Tr}$,	c. r. II
3:	$T_{xpl} > T_k$,	$p_{xpl} > p_k$,	$v_{xpl} < v_k$,	$v_{Tpl} < v_{Tr}$,	c. r. I
4:	$T_{xpl} > T_k$,	$p_{xpl} > p_k$,	$v_{xpl} > v_k$,	$v_{Tpl} < v_{Tr}$,	c. r. I
5:	$T_{xpl} > T_k$,	$p_{xpl} < p_k$,	$v_{xpl} > v_k$,	$v_{Tpl} < v_{Tr}$,	c. r. I
6:	$T_{xpl} < T_k$,	$p_{xpl} < p_k$,	$v_{xpl} > v_k$,	$v_{Tpl} > v_{Tr}$,	c. r. II
7:	$T_{xpl} < T_k$,	$p_{xpl} < p_k$,	$v_{xpl} > v_k$,	$v_{Tpl} < v_{Tr}$,	c. r. I
8:	$T_{xpl} < T_k$,	$p_{xpl} < p_k$,	$v_{xpl} < v_k$,	$v_{Tpl} < v_{Tr}$,	c. r. I
9:	$T_{xpl} < T_k$,	$p_{xpl} < p_k$,	$v_{xpl} < v_k$,	$v_{Tpl} < v_{Tr}$,	c. r. I.

On verra aisément que les figures 1 et 2 de la planche se rapportent à des mélanges représentés par des points situés dans les champs 1 et 2, à la droite de l'axe $O\beta$; les figures 3 et 4 à des points des mêmes champs mais à la gauche de $O\beta$; les figg. 5 et 6 aux champs 7, 8 et 9; les figg. 7 et 8 aux parties des champs 3, 4 et 5 situés à la droite de l'axe des β; les figg. 9 et 10 aux mêmes champs, mais à gauche; enfin les figg. 11 et 12 au champ 6.

---

le quatrième à l'anhydride carbonique avec un peu d'oxygène ($\alpha = -0{,}6563$, $\beta = -1{,}0871$). D'après la situation du point P dans le champ 2, on devrait avoir $T_{xpl} > T_k$, alors que les observations ont appris que $T_{xpl} < T_k$; cet écart a déjà été constaté plus haut (p. 220). De plus, la situation du point P dans le champ 2 indiquerait un système d'isothermes comme le représentent les figg. 1 et 2 de la planche IV, tandis que le véritable système d'isothermes correspond aux figg. 5 et 6, c. à d. à l'un des champs 7, 8 ou 9. En réalité le point devrait être situé dans le champ 9, en vertu des valeurs des éléments du point de plissement, et, comme il est très voisin de la frontière de ce champ, il n'est pas impossible qu'une détermination plus précise des constantes α et β l'y déplace.

La situation du point S dans le champ 9 est absolument conforme aux valeurs des éléments des points critiques des mélanges que ce point représente. Quant aux points Q et R, les déterminations d'isothermes de mélanges d'anhydride carbonique et de chlorure de méthyle par M. Brinkman (Dissertation, Amsterdam 1904) nous apprennent que le second est placé dans le vrai champ, mais que le premier devrait être situé dans le champ 4, puisque le volume de plissement d'un mélange d'anhydride carbonique avec une petite quantité de chlorure de méthyle est plus grand que le volume critique de l'anhydride carbonique. D'ailleurs, d'après les valeurs que M. Brinkman donne pour $p_{crit.}$, β est négatif, de sorte que le point Q doit être situé au-dessous de l'axe $O\alpha$.

17. La valeur numérique réduite des coefficients différentiels.

Pour trouver cette valeur numérique, j'ai d'abord tâché de la déduire directement des observations au moyen de représentations graphiques, mais, comme je ne parvenais pas à trouver, de cette façon, pour les dérivées d'ordre un peu élevé ($\mathfrak{p}_{21}$, $\mathfrak{p}_{30}$, $\mathfrak{p}_{40}$ etc.) des valeurs quelque peu dignes de confiance, j'ai été obligé de faire usage de formules qui représentaient convenablement les observations. A ce titre, ce sont sans contredit les développements en série de M. Kamerlingh Onnes [1]) qui sont tout indiqués, bien qu'ils présentent dans le voisinage des point critique, c. à d. là où nous devons les appliquer, les plus grands écarts. [2]) Aussi, les valeurs que nous trouverons pour les dérivées, surtout pour celles d'ordre supérieur, doivent elles être considérées tout au plus comme approchées.

Au moyen des coefficients de température des coefficients du viriel réduits, déduits des observations de M. Amagat, et notés V. s. 1 [3]) par M. Kamerlingh Onnes, je trouve pour ces coefficients du viriel ($\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, etc.) et leurs dérivées premières par rapport à la température ($\mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{B}'_1$, etc.) au point critique ($t = 1$)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1 &= +366{,}25 \times 10^{-5} & \mathfrak{A}'_1 &= +366{,}25 \times 10^{-5} \\
\mathfrak{B}_1 &= -471{,}614 \times 10^{-8} & \mathfrak{B}'_1 &= +622{,}387 \times 10^{-8} \\
\mathfrak{C}_1 &= +233{,}300 \times 10^{-11} & \mathfrak{C}'_1 &= -355{,}774 \times 10^{-11} \\
\mathfrak{D}_1 &= -360{,}485 \times 10^{-18} & \mathfrak{D}'_1 &= +789{,}380 \times 10^{-18} \\
\mathfrak{E}_1 &= +683{,}07 \times 10^{-25} & \mathfrak{E}'_1 &= +346{,}72 \times 10^{-25} \\
\mathfrak{F}_1 &= -90{,}14 \times 10^{-32} & \mathfrak{F}'_1 &= -698{,}82 \times 10^{-32}
\end{aligned}$$

Posant encore $\lambda = 0{,}00102$ (calculé au moyen de $T_k = 304$, $p_k = 72{,}9$, et $v_k = 0{,}00424$), je trouve au point critique:

$\mathfrak{p}_{00} = 0{,}98833$, $\mathfrak{p}_{10} = 0{,}10305$, $\mathfrak{p}_{20} = -0{,}16831$, $\mathfrak{p}_{30} = -5{,}30648$, $\mathfrak{p}_{40} = 75{,}79292$, $\mathfrak{p}_{01} = 7{,}34410$, $\mathfrak{p}_{11} = -9{,}99986$, $\mathfrak{p}_{21} = 27{,}76082$, etc.

---

[1]) Ces *Archives*, (2), 6, 874, 1901.

[2]) *Ibidem*, p. 887. J'ai fait connaître antérieurement (ces *Archives*, (2), 6, 650, 1901) des formules paraboliques qui représentent fort bien les observations dans le voisinage immédiat du point critique; mais elles ne s'accordent pas avec les considérations actuelles, parce qu'elles ne fournissent pas des valeurs finies pour les dérivées d'ordre supérieur; elles ne sont donc ici d'aucun usage.

[3]) *loc. cit*, p. 884.

Les valeurs de $\mathfrak{p}_{00}$, $\mathfrak{p}_{10}$ et $\mathfrak{p}_{20}$ auraient dû être respectivement égales à 1, 0 et 0; l'écart relativement considérable présenté par les valeurs des deux dernières dérivées prouve que les séries dont il est fait usage ne rendent pas l'allure des isothermes, au voisinage du point critique, aussi parfaitement qu'on l'aurait désiré. Il s'ensuit que les valeurs des autres dérivées ne seront pas non plus très précises, et il est à prévoir que l'incertitude augmentera avec l'ordre de la dérivée.

Je prends comme valeurs approchées des coefficients différentiels réduits au point critique,

$$\mathfrak{p}_{01} = 7{,}3,\ \mathfrak{p}_{11} = -10,\ \mathfrak{p}_{21} = 28,\ \mathfrak{p}_{30} = -5{,}3,\ \mathfrak{p}_{40} = 76,$$
$$\text{avec } C_k = 3{,}6\ ^{1}).$$

18. Application à une équation particulière.

M. Korteweg s'est également occupé de la détermination du point de plissement et du point de contact critique de mélanges où un des composants n'est présent qu'en petite quantité [2]; il est toutefois parti de l'hypothèse que les mélanges satisfont à l'équation d'état de van der Waals: [3])

---

[1]) M. Keesom a donné comme résultat de ses observations

$$\mathfrak{p}_{01} = 6{,}712,\quad \mathfrak{p}_{11} = -7{,}80,\quad C_k = 3{,}45.$$

[2]) Ces *Archives*, (2), 8, 235, 1903.

[3]) Suivant l'équation réduite de M. van der Waals:

$$\mathfrak{p} = \frac{8\mathfrak{t}}{3\mathfrak{v}-1} - \frac{3}{\mathfrak{v}^2},$$

nous aurions:

$$\mathfrak{p}_{01} = 4,\quad \mathfrak{p}_{11} = -6,\quad \mathfrak{p}_{21} = 18,\quad \mathfrak{p}_{30} = -9,\quad \mathfrak{p}_{40} = 126$$
$$\text{et } C_k = \frac{8}{3} = 2{,}7;$$

puisque ces valeurs s'accordent assez bien avec celles déduites de l'équation d'état empirique, il n'est guère étonnant qu'il existe une si grande ressemblance entre les courbes de mon diagramme α, β et celles du diagramme $\varkappa$, γ de M. Korteweg.

$$p = \frac{RT}{v - b_x} - \frac{a_x}{v^2},$$

où

$$a_x = a_1 (1-x)^2 + 2a_{12}\, x\,(1-x) + a_2\, x^2$$

$$b_x = b_1 (1-x)^2 + 2b_{12}\, x\,(1-x) + b_2\, x^2.$$

Or, on peut retrouver toutes les formules données par M. Korteweg, en substituant dans mes formules correspondantes les valeurs particulières que prennent mes coefficients k, et les constantes α, β et γ pour l'équation considerée.

Remarquons d'abord que, dans ce cas, les constantes critiques du mélange homogène sont:

$$T_{xk} = \frac{8}{27}\frac{a_x}{b_x R},\quad p_{xk} = \frac{1}{27}\frac{a_x}{b_x^2} \text{ et } v_{xk} = 3b_x,$$

de sorte que les constantes α, β et γ prennent les valeurs:

$$\alpha = 2\left(\frac{a_{12}}{a_1} - \frac{b_{12}}{b_1}\right),\ \beta = 2\left(1 + \frac{a_{12}}{a_1} - 2\frac{b_{12}}{b_1}\right),\ \gamma = 2\left(\frac{b_{12}}{b_1} - 1\right). \quad (86)$$

Comparant ensuite mon équation (18) avec l'équation particulière en question, on trouve:

$$\left.\begin{aligned}
m_{01} &= \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{Tk} = \frac{2a_1}{27 b_1^2}\left(1 - 3\frac{a_{12}}{a_1} + 2\frac{b_{12}}{b_1}\right)\\
m_{11} &= \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v \partial x}\right)_{Tk} = \frac{4a_1}{27 b_1^3}\left(\frac{a_{12}}{a_1} - \frac{b_{12}}{b_1}\right)\\
m_{21} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^2 \partial x}\right)_{Tk} = -\frac{1}{27}\frac{a_1}{b_1^4}\left(1 + 2\frac{a_{12}}{a_1} - 3\frac{b_{12}}{b_1}\right)\\
m_{30} &= \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_{Tk} = -\frac{1}{486}\frac{a_1}{b_1^5}.
\end{aligned}\right\} \quad (87)$$

Mes coefficients m sont ainsi exprimés en fonction des grandeurs a_1 et b_1, qui déterminent les propriétés de la substance simple, et les constantes $\alpha = \frac{a_{12}}{a_1}$ et $\gamma = \frac{b_{12}}{b_1}$ de M. Korteweg, qui déterminent la façon

dont se comportent les mélanges, et qui remplacent donc nos constantes α et β.

Il serait trop long d'établir complètement un parallèle entre l'étude de M. Korteweg et la mienne. Je me bornerai à faire remarquer, à titre d'exemple, que les cas 1, 2, 3 et 4 de la fig. 1 de M. Korteweg correspondent à ma fig. 15 et les cas 5, 6, 7 et 8 à ma fig. 14. Comme la fig. 15 est obtenue dans le cas où $m^2_{01} + RT_k\, m_{11} > 0$ et la fig. 14 dans celui où $m^2_{01} + RT_k\, m_{11} < 0$, la limite entre ces deux cas est déterminée par la condition $m^2_{01} + RT_k\, m_{11} = 0$, qui, eu égard aux expressions spéciales que nous venons de trouver pour les coefficients m, peut maintenant s'écrire:

$$\left(1 - \frac{3a_{12}}{a_1} + 2\,\frac{b_{12}}{b_1}\right)^2 + 8\left(\frac{a_{12}}{a_1} - \frac{b_{12}}{b_1}\right) = 0.$$

Cette équation est identique avec l'équation (4) de M. Korteweg.

Une remarque encore. M. Korteweg a trouvé que son 8me cas particulier: $T_{xpl} < T_k$, $v_{xpl} < v_k$ et $\left(\frac{dx}{dv}\right)_{pl} < 0$ n'existe pas. Cela veut dire que ces trois circonstances réunies sont incompatibles avec l'équation d'état, sous la forme particulière qu'il a admise; mais il n'est pas certain a priori que cette incompatibilité existe en général. Je me propose de démontrer que ce 8me cas fait réellement défaut.

Au moyen des formules (35'), (41) et (26) je trouve que

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)_{pl} = -\frac{2m_{30}\,RT_k}{m^2_{01} + RT_k m_{11}}\,(v_{Tpl} - v_{Tr}) = \frac{m_{01}}{RT_k}\,x_{Tpl}.$$

Cette expression a donc le signe de m_{01}, de sorte que dans ce 8me cas m_{01} doit être négatif. D'autre part, la condition $T_{xpl} < T_k$ exige que l'on ait (voir form. 59) $m^2_{01} + RT_k\, m_{11} < 0$; il s'ensuit que m_{11} aussi a une valeur négative, et, comme $m_{11} = -k_{11}\, T_k\, \alpha$, et que k_{11} est négatif, il en est de même de α. Puis, comme $m_{01} = p_k\,\beta - k_{01}\, T_k\, \alpha$, la condition $m_{01} < 0$ exige que β soit négatif à son tour, avec une valeur absolue plus grande que la valeur absolue de $k_{01}\,\frac{T_k}{p_k}\,\alpha$, donc plus grande aussi que la valeur de α, puisque $k_{01}\,\frac{T_k}{p_k}$ a une valeur plus

grande que 1 [1]); il résulte de là que $\alpha - \beta$ est une grandeur positive.

Si nous mettons maintenant v_{xpl} sous la forme

$$v_{xpl} = v_k + v_k(\alpha - \beta)x - \frac{1}{2}\frac{m_{01}x}{R^2T^2_k k_{30}}(m^2_{01} + RT_k m_{11}) + \\ + \frac{1}{3}\frac{m^3_{01}x}{R^2T_k^2 k_{30}} + \frac{1}{3}\frac{m^2_{0\rho}k_{21}x}{RT_k k_{30}k_{11}},$$

nous reconnaissons que dans cette expression tous les termes sont positifs, de sorte que $v_{xpl} > v_k$.

---

[1]) On reconnaît que la condition $k_{01}\frac{T_k}{p_k} > 1$ est nécessaire, quand on songe que k_{01}, c. à d. le $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ au point critique, est égal au coefficient de direction $\left(\frac{dp}{dT}\right)_k$ de la courbe de tension de vapeur au point critique. Or, comme cette courbe est continuellement courbée vers le haut, le coefficient de direction $\left(\frac{dp}{dT}\right)_k$ est nécessairement plus grand que $\frac{p_k}{T_k}$, le coefficient de direction de la droite qui joint le point critique à l'origine des coordonnées. Le raisonnement que j'ai fait plus haut n'exige donc pas la connaissance exacte de la constante $k_{01}\frac{T_k}{p_k}$.

VIII.

La surface ψ dans le voisinage d'un mélange binaire qui se comporte comme une substance simple,

par

J. E. VERSCHAFFELT. [1])

A. Considérations théoriques.

1. On sait qu'il y a des mélanges qui peuvent être soumis à une distillation isothermique, sans que leur composition se modifie, et qui inversement peuvent être condensés, par diminution du volume, sans que la pression change. De pareils mélanges se comportent donc comme une substance simple, avec cette différence toutefois qu'une substance simple présente ce phénomène à toute température, — au-dessous de la température critique évidemment, — tandis que le mélange ne se conduit ainsi qu'à une seule température. A toute autre, la condensation est accompagnée d'une variation de composition des deux phases et d'une augmentation de la pression. Des expériences de M. Kuenen [2]) ont appris, pour la première fois, que cette circonstance particulière, que le mélange se comporte comme une substance simple, peut se présenter dans le voisinage du point de plissement du mélange; ce phénomène, M. van der Waals [3]) en a fait le sujet d'une étude théorique et il en a donné l'explication.

Quand un mélange se conduit comme une substance simple à la température de plissement même, le point critique du mélange homogène, le point de contact critique et le point de plissement n'en forment plus qu'un seul, que l'on peut convenablement appeler le *point critique* de ce mélange particulier. J'en représenterai les éléments par T_k, p_k, v_k, tout comme pour une substance simple.

M. van der Waals a montré [4]) que dans ce cas $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_k = 0$. Il s'ensuit que les isothermes de deux mélanges voisins s'entrecoupent deux

[1]) *Versl. Kon. Akad. Amsterdam*, 31 oct. 1903; *Comm. phys. lab. Leiden*, suppl. n°. 7.

[2]) *Phil. Mag.*, 40, 173—194, 1895. *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 16.

[3]) Ces *Archives*, 30, 266, 1896.

[4]) Contin. II, p. 116.

à deux, et qu'à la température critique du mélange particulier le réseau des isothermes des mélanges ressemble à la fig. 13 (voir chap. VII, p. 202) La planche VI donne une représentation d'un pareil mélange, d'après les données expérimentales de M. QUINT [1]), relatives à des mélanges d'acide chlorhydrique et d'éthane.

Mais, bien que le mélange particulier se comporte comme une substance simple au point critique même, il ne résulte pas encore de là que, dans le diagramme p, v, t, la courbe limite puisse être trouvée de la même manière que pour une substance simple, c. à d. en faisant usage de la règle de MAXWELL—CLAUSIUS. En effet, immédiatement au dessous de la température critique, la pression ne reste plus invariable pendant la condensation et l'isotherme pratique n'est plus parallèle à l'axe des v; il est vrai que son inclinaison est infiniment petite. Il s'ensuit que le réseau isothermique satisfait bien à la loi des états correspondants, mais qu'il n'en est pas nécessairement de même de la courbe limite. Aussi verrons-nous que la courbe limite ne satisfait à cette loi qu'en première et seconde approximation.

2. *La surface* ψ. Je représenterai par x la composition du mélange qui se comporte comme une substance simple. Dans le voisinage du point critique le réseau isothermique de ce mélange peut alors être représenté par les équations (2) et (2') du chap. VII (p. 193); en outre, toutes les considérations exposées aux §§ 3 et 4 de ce chapitre sont immédiatement applicables, à condition de remplacer x par $x - x_k$ et x_{Tk} par $x_{Tk} - x_k$. Nous retrouvons ainsi, pour le réseau des isothermes des mélanges, à une température voisine de T_k, les équations (17) et (17'), où $x - x_{Tk}$ est infiniment petit, sans que x et x_{Tk} le soient individuellement. La circonstance, que $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_v = 0$ au point critique, exige évidemment $m_{01} = 0$; et comme $m_{01} = p_k \beta - k_{01} T_k \alpha$ (voir chap. VII, p. 199), on doit avoir:

$$\frac{\beta}{\alpha} = k_{01} \frac{T_k}{p_k} = \left(\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \mathfrak{t}}\right)_k = 7{,}3.$$

Remarquons encore que la ligne pointillée de la fig. 13, qui, correspondant à $x < 0$ (voir chap. VII, p. 202), n'avait aucune signification physique, est réellement possible dans le cas actuel, puisque $x < x_k$ est tout aussi bien possible que $x > x_k$.

---

[1]) Dissertation, Amsterdam, 1900.

L'équation de la surface ψ peut s'écrire:

$$\psi = -m_0(v-v_{Tk}) - \frac{1}{2}m_1(v-v_{Tk})^2 - \frac{1}{3}m_2(v-v_{Tk})^3 - \frac{1}{4}m^3(v-v_{Tk})^4$$

$$- \ldots + RT\,x_k(1-x_k)\left[\frac{1}{1.2\,x_k^2(1-x_k)^2}(x-x_k)^2 + \frac{2x_k-1}{2.3\,x_k^3(1-x_k)^3}(x-x_k)^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{3x_k^2-3x_k+1}{3.4\,x_k^4(1-x_k)^4}(x-x_k)^4 + \ldots\right] + X_2(x-x_{Tk})^2 + X_3(x-x_{Tk})^3 + \ldots \quad (2)$$

où nous négligeons comme d'ordinaire une fonction linéaire de x; d'ailleurs $m_{00} = p_{Tk}$, tandis que m_{01}, m_{10} et m_{20} sont nuls.

3. *La ligne limite à la température T.* Comme au chap. VII, je poserai

$$\frac{1}{2}(v_2+v_1) - v_{Tk} = \Phi, \qquad \frac{1}{2}(v_2-v_1) = \varphi$$

$$\frac{1}{2}(x_2+x_1) - x_{Tk} = \Xi, \qquad \frac{1}{2}(x_2-x_1) = \xi,$$

v_1, v_2, x_1 et x_2 représentant les volumes moléculaires et les compositions moléculaires des phases coexistantes. Les conditions de coexistence (voir p. 205) conduisent aux relations suivantes

$$\varphi^2 = -\frac{m_{11}}{m_{30}}\,\Xi \quad (3)$$

$$\Phi = -\frac{1}{m_{30}}\,\frac{m_{11}\left(2m_{02}m_{30} - \frac{1}{3}m_{11}m_{21}\right) + 2\left\{2X_2 + \frac{RT}{x_k(1-x_k)}\right\}\left(\frac{1}{3}m_{21}m_{30} - \frac{2}{5}m_{11}m_{40}\right)}{m_{11}^2 + 2m_{30}\left\{2X_2 + \frac{RT}{x_k(1-x_k)}\right\}}\,\Xi \quad (4)$$

$$\frac{\xi}{\varphi} = 4m_{30}\,\frac{m_{02} - \frac{1}{3}\frac{m_{11}m_{21}}{m_{30}} + \frac{1}{5}\frac{m_{11}^2 m_{40}}{m_{30}^2}}{m_{11}^2 + 2m_{30}\left\{2X_2 + \frac{RT}{x_k(1-x_k)}\right\}}\,\Xi \quad (5)$$

$$p_c - p_{Tk} = \left(m_{02} - \frac{1}{3}\frac{m_{11}m_{21}}{m_{30}} + \frac{1}{5}m_{11}^2\frac{m_{40}}{m_{30}^2}\right)\Xi^2. \quad (6)$$

Les relations (3) et (6) sont les mêmes que celles que j'ai trouvées antérieurement (chap. VII, p. 228, form. 75 et 77) au bord de la surface ψ, dans le cas particulier où $m_{01} = 0$; tandis que les formules (4) et (5) deviennent identiques à (74) et (76), quand on suppose que

x_L est infiniment petit, ou infiniment voisin de 1. Pour la courbe limite dans le diagramme p, v des mélanges à la température T, je retrouve d'ailleurs, en première approximation, la même parabole du quatrième degré :

$$p - p_{TK} = \frac{m^2_{30}}{m^2_{11}}\left(m_{02} - \frac{1}{3}\frac{m_{11}\,m_{21}}{m_{30}} + \frac{1}{5}\frac{m^2_{11}\,m_{40}}{m^2_{30}}\right)\left(v - v_{TK}\right)^4. \qquad (7)$$

Le point de plissement, c. à d. le sommet de cette parabole, coïncide en première approximation avec le point p_{TK}, v_{TK}, x_{TK}. Suivant que le facteur entre parenthèses est positif ou négatif, la parabole tourne sa concavité vers le haut ou vers le bas; dans le premier cas, le mélange particulier x_L possède une tension de vapeur minima, dans le second une tension maxima.

4. *La courbe connodale.* En éliminant $p - p_{TK}$ entre l'équation de la courbe limite (7) et l'équation des isobares:

$$m_{02}\,(x - x_{TK})^2 + m_{11}\,(x - x_{TK})\,(v - v_{TK}) = p - p_{TK}, \qquad (8)$$

identique à l'équation (78) du chap. VII, on obtient l'équation de la courbe connodale, en projection sur le plan x, v. En première approximation, cette équation peut s'écrire :

$$(x - x_{TK}) = -\frac{m_{30}}{m_{11}}\,(v - v_{TK})^2. \qquad (9)$$

Le point de contact critique, qui est le sommet de cette parabole, coïncide en première approximation avec le point x_{TK}, v_{TK}, p_{TK}, tout comme le point de plissement.

5. *La courbe limite pour un mélange x.* Si dans l'équ. (8) nous considérons x comme une constante et T, donc aussi x_{TK} et v_{TK}, comme variables, et que nous nous servions de l'équation d'état du mélange, c. à d. de l'équ. (13) du chap. VII, pour exprimer T en fonction de p et v, nous obtenons la courbe limite pour le mélange x, dans le diagramme p, v, T; en première approximation, son équation est :

$$p - p_{xk} = -\frac{k_{01}\,k_{30}}{k_{11}}\,(v - v_{xk})^2, \qquad (10)$$

tout comme pour une substance pure (voir form. 12′ et 54 du chap. VII). En première approximation la courbe limite satisfait à la loi des états correspondants.

Dans le cas des mélanges particuliers que nous considérons, pas plus que dans le cas d'une substance pure, la courbe limite ne suivra complètement la loi des états correspondants; mais dans le premier cas l'écart a encore une autre cause. Ce n'est pas seulement pour des mélanges voisins du mélange particulier x_k que l'isotherme expérimentale offre une faible inclinaison, mais il en est ainsi pour ce mélange x_k même. Ce n'est qu'à la température de plissement qu'elle présente une portion parfaitement horizontale, infiniment petite d'ailleurs. Il s'ensuit que, même si la loi des états correspondants était rigoureusement applicable aux courbes limites de substances pures, il n'en serait pas encore ainsi pour le mélange particulier x_k.

Si nous développons comme au chap. VII (p. 223) l'équation de l'isotherme expérimentale :

$$\frac{v - v_{Tk} - \Phi}{x - x_{Tk} - \Xi} = \frac{\Phi}{\xi},$$

nous trouvons :

$$p - p_{Tk} = \left(m_{02} - \frac{1}{3}\frac{m_{11}m_{21}}{m_{30}} + \frac{1}{5}\frac{m^2_{11}m_{40}}{m^2_{30}}\right)(x - x_{Tk})^2 -$$

$$- 8m_{30}\frac{\left(m_{02} - \frac{1}{3}\frac{m_{11}m_{21}}{m_{30}} + \frac{1}{5}\frac{m^2_{11}m_{40}}{m^2_{30}}\right)^2}{m^2_{11} + 2m_{30}\left\{2X_2 + \frac{RT}{x_k(1-x_k)}\right\}}(v - v_{Tk})(x - x_{Tk})^2 + \ldots, \quad (11)$$

donc, pour $x = x_k$,

$$p = p_k + k_{01}(T - T_k) - 8m_{30}\frac{\left(m_{02} - \frac{1}{3}\frac{m_{11}m_{21}}{m_{30}} + \frac{1}{5}\frac{m^2_{11}m_{40}}{m^2_{30}}\right)^2}{m^2_{11} + 2m_{30}\left\{2X_2 + \frac{RT}{x_k(1-x_k)}\right\}}(v - v_k)\frac{(T - T_k)^2}{\alpha^2 T_k^2} + \ldots \quad (11')$$

Ce n'est que pour $x_k = 0$ ou 1, c. à d. pour une substance pure, que le troisième terme disparaît, et avec lui tous les termes qui contiennent $v - v_k$.

Si nous éliminons maintenant $T - T_k$ entre l'équation d'état du mélange x_k et l'isotherme expérimentale (11'), pour trouver la courbe limite de ce mélange dans le diagramme p, v, T, nous constatons que l'inclinaison de l'isotherme expérimentale n'a d'influence que sur le troisième terme, — celui en $(v - v_k)^4$ —, du développement (10); ce

n'est donc qu'en troisième approximation que la courbe limite du mélange particulier s'écarte de la loi des états correspondants; bien entendu quand on suppose que cette loi est rigoureusement vérifiée par le réseau des isothermes. Pour les mélanges voisins cet écart ne se manifeste aussi qu'en troisième approximation, tandis qu'il se manifestait déjà en deuxième approximation pour les mélanges voisins du bord de la surface ψ.

La cause de cet écart moins prononcé pour les mélanges voisins du mélange en question doit être cherchée dans le fait, que dans toutes leurs propriétés ces mélanges ne s'écartent qu'en deuxième approximation d'une substance pure; ainsi par exemple les quatre points remarquables: point de plissement, point de contact critique, point critique du mélange homogène et point de pression de coexistence maxima, ne diffèrent qu'à partir de la deuxième approximation. Il s'ensuit que les quatre courbes dans l'espace (p, v et T étant les coordonnées), qui relient les points critiques des divers mélanges, sont tangentes les unes aux autres au point critique du mélange x_k, alors qu'un pareil contact n'a pas lieu en général aux extrémités communes, c. a d. aux points critiques des composantes pures.

B. Application à des mélanges d'acide chlorhydrique et d'éthane.

Les observations de M. Kuenen, relatives à des mélanges d'éthane et d'oxyde azoteux, les premières qui aient prouvé l'existence de mélanges dont les phénomènes critiques sont semblables à ceux d'une substance simple, ne nous permettent pas complètement de nous faire une idée de la façon dont se conduisent les mélanges voisins. D'ailleurs, ses recherches avaient pour but la découverte de la deuxième espèce de condensation rétrograde, et l'existence du mélange particulier en question était une découverte nouvelle, et non un sujet d'étude. Depuis lors quelques déterminations ont été faites d'isothermes de mélanges, parmi lesquels il y en a un qui se comporte comme une substance simple; je me servirai des données de M. Quint [1]), relatives à des mélanges d'acide chlorhydrique et d'éthane, où le mélange qui se comporte comme une substance simple a pour composition $x_k = 0,44$, c. à d. contient 0,44 molécules grammes d'éthane sur 0,56 d'acide chlorhydrique.

Pour opérer sur ces mélanges de la manière qui a été indiquée par

[1]) Dissertation, Amsterdam, 1900.

M. Kamerlingh Onnes, j'ai commencé par déterminer les éléments critiques T_{xk}, p_{xk}, v_{xk} des mélanges homogènes. Au lieu de tracer les diagrammes $\log pv$, $\log v$ ou $\frac{pv}{T}$, $\log p$, j'ai reconnu qu'il suffisait d'employer les diagrammes $\log p$, $\log v$, comme dans mon examen des mélanges d'anhydride carbonique et d'hydrogène [1]); en effet, non seulement les diagrammes logarithmiques des deux substances simples, mais encore ceux des quatre mélanges examinés par M. Quint, pouvaient être amenés à coïncider convenablement avec celui de l'anhydride carbonique, par un simple déplacement parallèle.

Il est regrettable pourtant que M. Quint n'ait pas fait un plus grand nombre d'observations dans le voisinage des points critiques; non seulement parce que cette région est pour nous la plus intéressante, mais aussi parce que ce sont surtout les portions des isothermes voisines du point d'inflexion qui permettent de superposer les réseaux; dans la région des grands volumes, on peut parfois déplacer notablement les réseaux sans que la coïncidence soit notablement troublée. C'est surtout pour l'acide chlorhydrique que se fait sentir le manque d'observations, dans le voisinage du point critique, parce que l'écart entre les éléments critiques donnés par M. Quint et ceux obtenus par superposition des réseaux est beaucoup plus grande qu'on ne s'y serait attendu, eu égard à la bonne coïncidence dans la région observée. D'autant plus qu'en superposant les diagrammes de l'éthane et de l'anhydride carbonique j'ai constaté une coïncidence fort satisfaisante des points critiques.

J'ai mis dans le tableau suivant les valeurs ainsi obtenues pour les éléments critiques des mélanges homogènes.

x =	0 (HCl pur)	0,1318	0,4035	0,6167	0,7141	1 (C^2H^6 pur)
t_{xk} =		42°,5	30°,0	26°,4	25°,8	
p_{xk} =		77,3 atm.	65,5	58,6	55,7	
v_{xk} =		0,00429	0,00490	0,00543	0,00570	
t_{xpl} =	51°,3	43°,1	30°,53	27°,25	27°,37	31°,88
p_{xpl} =	84,13 atm.	77,51	65,42	54,30	56,84	48,94
v_{xpl} =	0,00380	0,00420	0,00471	0,00540	5,00576	0,00652
C_k =		3,48	3,46	3,45	3,45	3,50

[1]) *Arch. Néerl.*, (2), 5, 644, 1900.

Pour faciliter la comparaison, j'y ai mis aussi les éléments des points de plissement des mélanges, observés par M. QUINT, et en dernière ligne les valeurs de l'expression $C_k = \frac{RT_{xk}}{p_{xk}\, v_{xk}}$, qui sont sensiblement les mêmes pour les diverses compositions. Les données fournies par M. QUINT pour HCl conduisent cependant à une valeur beaucoup plus grande: 3,71; je suis tenté de mettre cet écart en rapport avec celui, sur lequel j'ai attiré tantôt l'attention.

Si nous portons les t_{xk} et t_{xpl} en ordonnées et les x en abscisses, nous obtenons deux courbes qui doivent se toucher en un certain point; il est pourtant difficile de déterminer ce point exactement. En opérant de la même façon avec p_{xk} et p_{xpl}, la détermination du point de contact est moins certaine encore, surtout à cause de cette circonstance que, suivant le tableau précédent, $p_{xk} > p_{xpl}$, pour $x = 0,4035$, ce qui est impossible; cela résulte certainement pour la plus grande partie du manque de précision de la méthode. Quant à déduire le point de contact d'une représentation graphique des v_{xk} et v_{xpl}, cela serait absolument illusoire, puisque les volumes sont loin d'être connus avec une précision suffisante.

Il m'a donc semblé que la meilleure méthode pour déterminer la composition du mélange qui se comporte comme une substance simple est celle à laquelle M. QUINT a lui-même eu recours; il l'a déduite de la forme de la courbe de plissement dans le diagramme p, T, en cherchant sur cette courbe le point où elle est touchée par la ligne limite qui aboutit en ce point. On peut déterminer ce point assez exactement, et on trouve pour ses coordonnées: $t_k = 29°,0$ et $p_k = 63,8$ atm., d'où l'on déduit ensuite $x_k = 0,44$ et $v_k = 0,00500$.

Au moyen d'une représentation graphique des eléments t_{xk}, p_{xk} et v_{xk}, j'ai trouvé, dans le voisinage de $x_k = 0,44$, $\frac{dT_{xk}}{dx} = -20$, $\frac{dp_{xk}}{dx} = -30$ et $\frac{dv_{xk}}{dx} = 0,0020$; d'où $\alpha = -0,07$, $\beta = -0,50$ et $\gamma = 0,40$, de sorte que les relations $\gamma = \alpha - \beta$ et $\frac{\beta}{\alpha} = 7,3$ sont assez confirmées.

En me servant des observations de M. QUINT, j'ai trouvé par interpolation ou par extrapolation, pour une partie aussi en appliquant la loi des états correspondants et faisant usage des valeurs de t_{xk}, p_{xk}

et x_{rl} trouvées tantôt, les isothermes relatives aux 6 valeurs de x considérées, à la température critique 29°,0 du mélange particulier $x_l = 0,44$. Ce réseau d'isothermes est figuré pl. VI, qui représente donc le diagramme p, v des isothermes des mélanges à la température 29°,0. La ligne en trait interrompu est l'isotherme critique $x_l = 0,44$; le point critique est en C. L'isotherme $x = 0,40$ a été pointillée dans sa partie instable; vu la faible courbure des isothermes expérimentales, j'ai représenté ces dernières par des droites. La ligne limite est figurée en trait plein, tout comme les parties stables des isothermes.

Sous ce diagramme p, v, j'ai figuré la projection sur le plan v, x. L'isobare critique (63,8 atm.) est représentée en trait interrompu; j'ai tracé encore quelques autres isobares, ainsi que la projection de la courbe connodale (dont la ligne limite est une autre projection); les portions instables, c. à d. intérieures à cette projection, sont pointillées. Comme la température de 29° est plus basse que la température critique de l'éthane pur (31°,88), la courbe connodale se compose de deux branches; je n'ai pas représenté la seconde, pour ne pas compliquer inutilement la figure. Cette seconde branche aurait son sommet, c. à d. son point de contact critique, vers $x_{Tr} = 0,92$, $v_{Tr} = 0,0063$ et couperait l'axe $x = 1$ aux points $v = 0,00472$ et $v = 0,01031$.

A cette seconde branche de la connodale correspond une seconde ligne limite, qui commence au niveau $p = 46,1$ (tension maxima de la vapeur d'éthane à 29°,0) et finit au point de plissement $p_{Tpl} = 51,2$, $v_{Tpl} = 0,0063$; cette seconde branche de la courbe limite est également concave vers le bas. J'ai encore omis cette seconde branche, ainsi que l'isotherme de l'éthane pur.

La figure au bas de la planche montre clairement, qu'au voisinage du point critique C les isobares ont, en première approximation, une forme hyperbolique.

Il est inutile de tâcher d'examiner si réellement la ligne limite est du 1me ordre et la connodale du 2me; les données ne sont pas assez nombreuses, ni le tracé suffisamment précis pour permettre une pareille constatation. Mais la raison pour laquelle la ligne limite doit être d'ordre plus élevé que la connodale est évidente. La surface p, v, x, dont la planche reproduit les projections sur les plans p, v et x, v, a, au voisinage du point critique, la forme d'une selle; dans la figure supérieure, on regarde cette surface parallèlement au plan tangent au point C. Les

isothermes des mélanges $x = 0$, $x = 0,14$ et $x = 0,40$ sont situées sur la face qui est tournée vers l'observateur; la dernière constitue même, sur une assez grande étendue (depuis les grands volumes jusqu'à $x = 0,006$ environ), sensiblement le contour apparent de la surface; l'isotherme critique est déjà située de l'autre côté du dos, mais elle devient visible au point C et reste visible dans toute l'étendue des petits volumes. Les isothermes $x = 0,62$, $x = 0,71$ et $x = 1$ sont situées sur la face cachée de la surface p, v, x, mais deviennent néanmoins visibles aux petits volumes. La parabole:

$$p - p_{Tk} = -\frac{1}{4}\frac{m_{11}^{2}}{m_{02}}(v - v_{Tk}^{2}),$$

qui enveloppe les isothermes au voisinage du point C (voir chap. VII, p. 202) est le contour apparent de la surface dans ces environs.

La figure inférieure nous donne une idée de la surface, telle qu'elle est vue d'en haut; les isobares sont des lignes de niveau. L'isobare critique forme une boucle, ce qui est bien d'accord avec la forme de la surface, telle que je viens de la décrire. Une section, faite à un niveau un peu plus élevé, se compose de deux parties, dont une est fermée et située à l'interieur de la boucle. A l'intérieur de la boucle, la surface présente donc une proéminence, dont le sommet a pour coordonnées $x = 0,40$, $v = 0,006$, $p = 63,9$, cette dernière pression est donc un maximum, non seulement pour le mélange $x = 0,40$, mais encore pour tous les mélanges voisins. Des plans horizontaux plus élevés ne coupent plus la surface que suivant une seule branche. Et des plans horizontaux menés à des niveaux $p < 63,8$ atm. donnent des sections également constituées par une seule branche, qui entoure la boucle critique.

A partir de $x = 0$, la ligne limite s'étend sur la face antérieure de la surface p, v, x; mais elle atteint le contour apparent vers le volume 0,008, et passe alors sur la face postérieure, où elle reste jusqu'en C; puis elle redevient visible. Au point C, le plan osculateur à la ligne limite, en même temps plan tangent à la surface, est horizontal; dans la figure d'en bas, on voit donc la courbe limite de plus en plus sous sa vraie forme, à mesure que l'on se rapproche du point C; mais dans la figure supérieure on la voit de plus en plus en raccourci, et finalement dans un sens tangentiel, ce qui fait qu'elle semble aplatie, et par là s'explique l'ordre plus élevé de cette projection.

SIMON MARIUS.
RÉHABILITATION D'UN ASTRONOME CALOMNIÉ.

PAR

J. BOSSCHA.

I. Introduction. Le Mémoire de M. J. Klug.

M. J. Klug, professeur royal du Real-gymnasium royal de Nürnberg, a récemment rendu service à la Société hollandaise et, en quelque sorte aussi, à l'histoire des Sciences.

Il s'est fait connaître comme l'auteur du Mémoire présenté au concours de cette Société, mais refusé à la suite des avis unanimes de MM. J. A. C. Oudemans, J. C. Kapteyn et E. F. van de Sande Bakhuyzen, et il a publié son travail. Nous avons parlé de ce Mémoire dans ces *Archives* [1]). La mention, faite de ce travail et de la décision du jury dans le Programme de la Société hollandaise pour l'année 1900 [2]), avait induit M. Favaro, le savant directeur de l'*Edizione Nazionale* des Œuvres de Galilée, à exprimer dans la *Bibliotheca mathematica* de septembre 1902 son regret de ce que le Mémoire de l'auteur encore inconnu se trouvait ainsi soustrait à la connaissance du public. Les termes, dans lesquels M. Favaro faisait connaître ses sentiments ne pouvaient manquer de faire peser sur la Société hollandaise et sur ses experts le soupçon de quelque partialité et même du désir de supprimer la discussion sur une question importante pour l'histoire des Sciences. En effet, le sujet proposé au concours consistait dans un examen critique des observations des Satellites de Jupiter publiées par Galilée et par Marius. Comme but spécial de cette

[1]) *Galilée et Marius*, par J. A. C. Oudemans et J. Bosscha, *Archives Néerl.*, Série 2, T. VIII, p. 115.

[2]) l. c., T. IV, p. 2.

recherche on avait indiqué l'acquisition de données, qui pourraient faire décider si GALILÉE avait eu le droit d'accuser l'astronome allemand de plagiat, commis dans son livre *Mundus Jovialis*.

Or, tandis que l'auteur du Mémoire présenté avait tâché de confirmer en tous points le verdict de GALILÉE, le jugement des trois savants hollandais portait que le travail, jugé inadmissible à cause de ses défauts, les avait conduits à examiner eux-mêmes la question proposée, et à déclarer qu'ils étaient arrivés à une conclusion toute opposée à celle de l'auteur.

Comme l'opinion exprimée par le jury impliquait une erreur et même une faute commise par GALILÉE, OUDEMANS et moi, dans le but d'écarter tout soupçon de partialité de la part du jury, nous avons exposé les raisons qui, à notre avis, suffisaient à conclure que la cruelle accusation, émise par GALILÉE contre MARIUS plus de 8 ans après la publication du *Mundus Jovialis*, lorsque ce dernier, souffrant de la maladie à laquelle il devait succomber, ne pouvait plus se défendre, était complètement dénuée de fondement et contenait des assertions dont GALILÉE lui-même devait connaître la fausseté [1]). Nous croyons avoir montré de plus que MARIUS, bien loin d'être un homme sans valeur scientifique, présomptueux, plagiaire et faux, comme le repré-

[1]) Aux preuves, que nous avons données dans notre article, je puis ajouter la suivante, qui se rapporte à une assertion d'ordre scientifique. Dans sa diatribe GALILÉE, pour montrer que MARIUS se trompait au sujet des déviations en latitude des Satellites, dit: „et pourtant la vérité est que par quatre mois „entiers, à savoir de mi-février à mi-juin de 1611, quand la latitude de Jupiter „fut très petite ou nulle, ces quatre étoiles furent toujours disposées en ligne „droite dans toutes les positions."

Si l'on consulte le journal de GALILÉE, reproduit en phototypie par les soins de M. FAVARO, on remarque que GALILÉE y avait noté lui-même ce qui suit:

7 mars 1611, dans une figure représentant une constellation observée, au-dessus d'un des Satellites: paululum attollebatur in boream;

le 11 mars 1611, de même: in boream;

le 16 mars 1611: paululum attollebatur in boream;

le 18 mars 1611: minor in boream elatus alterum quam proxime tangebat;

le 17 avril 1611, au-dessus d'un des Satellites: in boream;

le 6 mai 1611 de même: in boream;

le 29 mai 1611 de même: in boream attollebatur.

Pendant la période indiquée GALILÉE avait donc sept fois constaté que les quatre étoiles ne furent pas disposées en ligne droite.

De ces indications ALBERI, dans sa publication, a omis la première.

sentent ordinairement les panégyristes de GALILÉE, avait des mérites très réels en astronomie, spécialement dans la théorie des Satellites de Jupiter et que, au lieu de commettre un plagiat envers GALILÉE, il lui a accordé tout l'honneur qui lui était dû.

Dans notre Mémoire nous avons dû nous abstenir de critiquer les arguments contraires du Mémoire refusé, qui n'était pas public.

Encouragé, à ce qu'il semble, par le jugement favorable que M. FAVARO avait publiquement émis sur l'importance d'un travail étendu tendant à la justification de GALILÉE, M. KLUG s'est résolu à faire imprimer son Mémoire. Il a eu l'honneur de rencontrer dans l'Académie royale des Sciences de Bavière, qui admit son travail parmi ses *Abhandlungen* in-4°, un organe d'un crédit considérable, et tel a été l'effet de cette publication, que M. GERLAND, le collaborateur de plus d'une revue critique allemande, et qui d'abord avait reconnu le bien fondé des arguments développés dans l'article de OUDEMANS et de moi, s'est aussitôt rangé du côté de M. KLUG.

En annonçant dans les *Beiblätter* des *Annalen der Physik* [1]) l'article *Galilée et Marius*, M. GERLAND avait dit: „d'une manière extrêmement „solide et complète le Mémoire élève au-dessus de tout doute que „GALILÉE avait tort, lorsqu'il dénonça comme un plagiat la découverte „des Satellites, faite indépendamment par MARIUS. C'est le principal „mérite de cet excellent Mémoire d'avoir démontré ceci par des argu- „ments astronomiques. D'un intérêt historique non médiocre sont „cependant aussi le tableau de l'astronomie en 1609, l'histoire de l'in- „vention de la lunette et l'analyse détaillée de l'ouvrage *Mundus* „*Jovialis*. Nous laissons toutefois hors de considération si le jugement „porté sur GALILÉE est toujours équitable".

Après le travail de M. KLUG, tout est changé chez M. GERLAND. Dans les *Beiblätter* de 1905 [2]) il écrit à ce sujet: „On suit avec intérêt „l'auteur (M. KLUG) dans son chemin long, souvent tortueux et épi- „neux, où les points de repos sont toujours l'indication d'un travail de „GALILÉE, qui rend possible une communication de MARIUS et d'après „son caractère le détermine. Que ceci s'applique également aux temps „périodiques donnés par MARIUS, malgré qu'ils s'accordent mieux que „ceux donnés par GALILÉE avec les moyennes actuelles, se trouve

---

[1]) T. 27, p. 890.
[2]) T. 29, p. 840.

„démontré d'une manière persuasive, et ainsi apparaissent dépourvus „de leur principal fondement les résultats du travail de MM. OUDEMANS „et BOSSCHA, desquels la défense de MARIUS est démontrée insoutenable „encore par d'autres raisons. Ainsi le travail dont nous rendons compte „pourrait être considéré comme concluant décisivement et bannissant „définitivement de la Science les droits revendiqués par MARIUS sur la „découverte des Satellites de Jupiter."

Dans ces circonstances je me suis vu obligé de quitter momentanément d'autres travaux et de reprendre le travail que j'avais partagé avec OUDEMANS. Maintenant que le Mémoire de M. KLUG est rendu public, il est possible de montrer pourquoi il a été jugé inacceptable. C'est là le service que M. KLUG a rendu à la Société hollandaise.

Je me suis chargé personnellement de cette tâche, laquelle par l'étendue du Mémoire de M. KLUG devait nécessairement exiger un temps considérable qu'on aimerait employer à d'autres buts. Il m'a semblé qu'elle ne méritait pas d'occuper deux auteurs [1]).

D'autre part la question proposée par la Société hollandaise présente l'occasion d'élucider plusieurs points, restés obscurs dans l'histoire des sciences de la première moitié du dix-septième siècle, surtout en ce qui regarde GALILÉE. Les mérites de ce héros légendaire ont été célébrés avec tant d'éclat, qu'ils éclipsent presque complètement non seulement ceux de ses contemporains, mais encore ceux de ses devanciers et de ses successeurs. On lui a attribué presque toutes les découvertes qui ont illustré la Science pendant une période de près d'un siècle [2]).

Ce sont surtout les écrits populaires qui ont à ce sujet complètement faussé l'histoire et grossi les légendes et les fables, qui, dès l'origine, se sont attachées à la vie et aux œuvres du célèbre Toscan. La plupart des lecteurs ne se trouvent pas en mesure de contrôler les assertions des auteurs, qui eux-mêmes négligent trop souvent l'unique moyen de

---

[1]) Depuis que j'écrivis ces lignes j'ai eu le malheur de perdre mon ami, M. J. A. C. OUDEMANS a succombé le 10 décembre, deux jours avant d'entrer dans sa 80e année.

[2]) Voici, entre autres, les termes dans lesquels NELLI, dans la Préface de son ouvrage: *Vita e Commercio letterario di G. Galilei*, qualifie son héros: le Dissipateur des ténèbres péripatéticiennes, le Restaurateur de l'Astronomie, de la Statique, de l'Hydrostatique, le Fondateur des principes de la Dynamique, le Promoteur de la doctrine des pendules, l'Inventeur d'instruments utiles, celui qui a découvert la doctrine des Indivisibles et enfin qui a su reconnaître tant de secrets de la nature auparavant ignorés."

porter un jugement exact sur les mérites du savant qu'ils exaltent, savoir, l'étude critique de ses écrits, comparés à l'état de la Science à l'époque de leur publication. Certes, leurs appréciations, nécessairement superficielles dans ces conditions, ne pourront jamais, aux yeux des initiés, modifier le tableau de l'évolution continue qui, dès le temps de Copernic, par Stevin, Gilbert, Kepler, Descartes, Huygens et Leibniz a conduit à l'ère Newtonienne du dix-huitième siècle, mais à côté de ces hommes célèbres ont travaillé une foule de chercheurs moins connus, tels que Cavalieri, Fabricius, Marius, Snellius et tant d'autres, qui ont apporté à la Science leur tribut plus modeste, dont cependant il importe, dans l'intérêt même de la Science, de ne pas faire perdre la mémoire [1]).

Les torts, causés par l'admiration immodérée, on dirait presque le culte, dont Galilée a été l'objet, prennent un caractère particulièrement grave, lorsque, pour cacher les faiblesses du „divin philosophe", on les attribue à ceux qu'il dénonce comme ses adversaires, et que, les fautes commises par Galilée devenant de plus en plus apparentes et sérieuses, à mesure que ses œuvres sont mieux connues, on ne craint pas de recourir à des dénigrements systématiques qui non seulement représentent l'homme, qui a eu le malheur d'être gênant pour sa gloire, comme le type du plagiaire, menteur habituel, mais qui tendent aussi à bannir de la science des contributions d'une valeur réelle.

Tel est le cas de Simon Marius. Les panégyristes de Galilée ont pris la coutume de ne jamais citer son nom sans l'accompagner de quelque expression de mépris. L'insouciance, avec laquelle ces insultes se trouvent interjetées dans le cours d'une phrase, tout en donnant au

[1]) Qu'il me soit permis de citer à ce propos ce que j'ai écrit dans une étude sur van Marum à l'occasion de l'expérience, par laquelle il fut le premier à condenser un gaz. Après avoir montré qu'on avait à tort attribué à Lavoisier l'honneur d'avoir compris, mieux que van Marum, la portée de ce fait nouveau, découvert quatre ans après la fin tragique de l'illustre chimiste, j'ai dit: „De telles erreurs, résultant d'une certaine violence faite à la vérité pour exagérer les mérites de quelque auteur aux dépens d'un autre, ne se rencontrent que trop souvent. Elles s'excusent ou au moins s'expliquent, non seulement par le désir de faire servir l'histoire à la gloire de sa propre nation, mais aussi par la tendance, que l'on estimerait instinctive, tant elle est générale, d'attribuer à quelques élus ce qui en réalité est le fruit du travail de plusieurs autres, de concentrer en quelques figures brillantes les mérites qui appartiennent à de plus modestes chercheurs, afin de créer ainsi dans notre imagination des héros, qui réalisent toute la valeur, qu'il peut être donné à l'homme d'atteindre."

lecteur l'impression qu'il s'agit d'un fait trop connu pour avoir besoin de preuve, échappe en même temps à la critique, qui ne peut s'occuper de telles exclamations.

Envers MARIUS tout est permis: GALILÉE l'a couvert d'opprobre, cela suffit à le condamner et dispense de la peine de consulter ses écrits.

Le service que M. KLUG, comme nous le disions, a rendu à certain point de vue à la science, consiste en ceci qu'il a au moins tâché de fournir les preuves de l'incapacité et des machinations frauduleuses dont on accuse l'astronome allemand. Il l'a fait avec un zèle et une application telles, que s'il se trouve qu'elles n'ont pas réussi, on peut bien dire que l'on ne réussira jamais.

Le Mémoire de M. KLUG [1]) occupe 128 pages in-4° d'une typographie serrée, avec 12 pages d'Annexes, et constitue pour la plus grande partie une reproduction du travail présenté à la Société hollandaise, mais remanié, corrigé, et considérablement augmenté. L'auteur a retranché des parties du Mémoire refusé, en a ajouté d'autres et introduit de nouvelles données, empruntées à des recherches ultérieures, entre autres à celles de OUDEMANS et de moi. Il a pu se servir de Tables calculées à son intention par un astronome distingué, M. BERBERICH, lesquelles permettent de trouver plus facilement les vraies positions des Satellites de Jupiter aux temps de GALILÉE et MARIUS que par les Tables beaucoup plus compliquées de DAMOISEAU. Disons tout de suite que nous sommes très éloignés de rendre M. BERBERICH responsable de l'usage que, de son très utile travail, a fait M. KLUG.

D'autre part celui-ci a pu consulter la reproduction phototypique du journal, dans lequel GALILÉE notait ses observations des Satellites depuis leur découverte jusqu'au 23 février 1613. Ce journal, retrouvé en 1843 par ALBERI, avec d'autres manuscrits de GALILÉE sur les Satellites, a été publié par l'éditeur cité des Œuvres de GALILÉE, mais d'une manière qui a laissé beaucoup à désirer [2]). M. FAVARO a gratifié la Société

---

[1]) SIMON MARIUS *aus Gunzenhausen und* GALILEO GALILEI. *Ein Versuch zur Entscheidung der Frage über den wahren Entdecker der Jupitertrabanten und ihrer Perioden von* JOSEF KLUG *K. Gymnasialprofessor am K. Realgymnasium in Nürnberg. Abhandlungen der mathematisch-physikalikalischen klasse der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Band XXII. Zweite Abtheilung*, *pp.* 385—526.

[2]) Dans le Tome V des *Opere Complete di Galileo Galilei Firenze* 1846, et encore séparément sous le titre: *Galilei et Renieri in Jovis Satellites lucubrationes quae per ducentos fere annos desiderabantur ab Eugenio Albero*

hollandaise d'un des vingt tirés à part de cet important document, qui doit faire partie de la Parte Seconda si longtemps attendue [1]) du vol. III de l'*Edizione Nazionale*. J'ai pu constater ainsi dans l'édition d'ALBERI des incorrections, des omissions, des modifications arbitraires et une manipulation singulière des premières observations, laquelle a fait perdre des détails très importants. Nous aurons l'occasion d'y revenir dans la suite.

Du nouveau matériel très considérable, que lui ont fourni le concours de MM. BERBERICH et FAVARO, M. KLUG n'a fait qu'un usage discret, au moins il n'en a fait profiter ses lecteurs que dans une mesure par trop restreinte. Les Tables de M. BERBERICH rendent très facile de contrôler l'exactitude de celles des observations de GALILÉE et de MARIUS, qui nous ont été transmises ensemble avec les données numériques des temps d'observation et des élongations des Satellites. M. KLUG n'applique ce contrôle à aucune des observations de MARIUS. Quant à celles de GALILÉE il ne le fournit que pour une seule, celle du 8 janvier 1610, pour laquelle GALILÉE n'a noté ni le temps de l'observation ni les valeurs des élongations. Il applique pour le calcul l'heure d'une observation de MARIUS, néglige la différence entre les valeurs géocentriques et héliocentriques [2]) des positions des Satellites et produit ainsi, pour ces dernières, quatre valeurs qui, comparées à celles qui résultent des Tables de M. BERBERICH, sont toutes en erreur. [3])

---

im lucem editae Florentiae Typis Societatis Editricis Florentiae MDCCCXLVI.

[1]) Depuis bientôt 15 ans. Heureusement une communication épistolaire de M. FAVARO fait espérer que cette lacune dans l'important Recueil, avancé maintenant jusqu'au vol. XVIII, sera comblée bientôt. La Parte II du vol. III est complètement imprimée depuis plusieurs mois, et la distribution ne se trouve retardée que par des difficultés d'ordre administratif.

[2]) Afin d'abréger le langage, nous emploierons dans la suite les mots *héliocentriques* et *géocentriques* pour distinguer les apparences du Satellites, vues du Soleil et de la Terre. De même les mots *aphélie* et *apogée* serviront pour indiquer les points où se trouve le Satellite dans ses conjonctions supérieures vues de ces deux endroits.

[3]) Il trouve, p. 509, pour cinq heures du soir à Anspach, les positions héliocentriques

I	II	III	IV
298°,5	238°	297°	80°,5

tandisque, avec la différence de près de 33 minutes entre le temps civil de Paris et celui d'Anspach, les Tables de M. BERBERICH donnent:

290°,0	233°,1	294°,8	79°,4

Les différences

8°,5	4°,9	2°,2	1°,1

Les valeurs numériques citées ne figurent dans le Mémoire de M. Klug que pour montrer que les Satellites I, II, III se trouvaient, à l'heure indiquée, à l'occident de la planète et que le Satellite IV avait à peu près sa plus grande élongation orientale. Ni Galilée ni Marius n'ont remarqué, le soir du 8 janvier, la présence du Satellite IV. M. Klug y trouve une raison suffisante pour accuser Marius d'avoir pris de Galilée cette observation, mentionnée par Marius dans sa Préface comme la première qu'il avait notée après avoir acquis la conviction que Jupiter était accompagné d'étoiles errantes. M. Klug appuie spécialement sur cette coïncidence, selon lui étrange, de ce qu'il appelle une *erreur d'observation*, mais néglige d'informer ses lecteurs que ni Galilée ni Marius ne pouvaient être renseignés sur le nombre de ces étoiles errantes. Il n'insiste pas non plus sur le fait que le Satellite IV se trouvait de l'autre côté de Jupiter par rapport au groupe de trois étoiles occidentales qui, disposées en ligne droite avec la planète, devaient aussitôt attirer l'attention, de sorte que dans le champ restreint d'une lunette hollandaise, comme celles dont se servaient Galilée et Marius, il était impossible de voir en même temps le Satellite IV et les étoiles occidentales, dont les plus écartées étaient distantes de plus de 15 minutes, et que même le Satellite IV, qui se trouvait à une distance de plus de 10 minutes de Jupiter, ne pouvait être aperçu en même temps que la planète dans le champ de $7\,^1/_4$ minutes de la lunette de Galilée, ou celui de 9 minutes que très probablement a dû avoir la lunette de Marius [1]).

M. Klug ne s'arrête pas non plus à la difficulté d'expliquer l'étrange générosité de son prétendu plagiaire qui, lorsqu'il écrivait sa *Préface*, savait parfaitement qu'il y avait quatre Satellites et qui pouvait, au moyen de ses propres Tables, constater facilement que le Satellite, manquant le 8 janvier 1610, se trouvait à l'orient de Jupiter à l'extrémité de sa course périodique. Marius pouvait donc s'attribuer aussi bien la découverte des quatre Satellites que celle des trois. Marius, au contraire, reconnaît franchement que le 8 janvier il ne croyait encore qu'à l'exis-

sont à très peu près égales aux mouvements horaires des Satellites, de sorte qu'il semble avoir, par mégarde, placé Anspach à l'ouest de Paris.

Les positions géocentriques furent

296° 239° 300° 86°

Le Satellite IV se trouvait donc tout près de sa plus grande élongation à l'orient de Jupiter.

[1]) Voir la Note II p. 173 (29) de notre article *Galilée et Marius*.

tence de trois Satellites et que seulement vers le commencement de mars c'est-à-dire six semaines plus tard que GALILÉE il était tout à fait édifié sur l'existence d'un quatrième.

En dehors de l'observation citée, M. KLUG affirme avoir vérifié, au moyen des Tables de M. BERBERICH, plusieurs centaines d'observations de GALILÉE. Mais il estime que le résultat de ce contrôle prendrait trop de place pour pouvoir être communiqué à ses lecteurs, *parce qu'elles devraient être accompagnées de remarques critiques* (page 499). Il s'abstient donc de propos délibéré d'entrer dans la voie expressément indiquée par les termes de la question proposée par la Société hollandaise: savoir fournir un *examen critique des observations* du *Sidereus Nuncius* et celles du *Mundus Jovialis*. La Société avait été d'avis que, pour décider une question de critique historique, examinée jusqu'ici exclusivement au moyen de faits allégués, dont la constatation était peu sûre, de circonstances supposées et très douteuses, il conviendrait de provoquer le verdict d'un examen critique, basé sur la teneur des écrits publiés par les deux partis en cause, et sur le témoignage irrécusable de chiffres. Elle a voulu contribuer à introduire ainsi dans les recherches d'histoire scientifique autant que possible la méthode des Sciences exactes.

Au lieu d'examiner les 65 constellations chiffrées du *Sidereus Nuncius* et les trois ou quatre, que nous possédons de MARIUS, M. KLUG consacre autant d'espace, qu'aurait demandé cette analyse, à la critique des *Tables* de MARIUS, ce qui n'offre aucune utilité, puisque les Tables ne peuvent donner plus d'information que les éléments connus qui ont servi à les construire. Ces éléments sont pour chaque satellite: le *temps périodique* et la position que MARIUS lui attribue à un moment donné c. à d. *l'époque*.

Au lieu de critiquer ces 8 données, M. KLUG étale devant les yeux des lecteurs une série de plus de 80 écarts entre les positions héliocentriques calculées d'après les Tables de MARIUS et celles calculées d'après les Tables de M. BERBERICH, déduites de calculs modernes. Il s'applique à faire ressortir la grandeur des écarts pour arriver à cette conclusion remarquable: Il n'est pas possible que MARIUS, avec des *observations* tellement défectueuses, soit arrivé à des temps périodiques aussi exacts [1])

[1] KLUG, p. 498. „Bei dieser ganz erheblichen Unsicherheit der Beobachtungen ist es ganz unbegreiflich, wie MARIUS zur Periode von $1^d\ 18^h\ 28^m\ 30^s$ kommen konnte, die gegenüber der wirklichen mittleren Perioden zwischen 1610 und 1614 um kaum 4^s zu klein war.

que ceux qu'il donne dans son livre; il faut donc qu'il les ait pris d'autre source; cette source ne peut être autre que les données publiées par GALILÉE: le travail de MARIUS constitue donc un plagiat commis envers GALILÉE. M. KLUG ne semble pas s'apercevoir de la curieuse conséquence, à laquelle doit nécessairement conduire sa logique. Il s'agit ici des écarts des *Tables*, non pas des erreurs *d'observation*; or, les écarts des *Tables* ont pour cause directe les erreurs dans les données qui ont servi à les calculer. Mais, d'après M. KLUG, ces données ont été empruntées à GALILÉE, il faut donc nécessairement rendre GALILÉE responsable des écarts des Tables de MARIUS; et, continuant le raisonnement, arriver à la conclusion que GALILÉE lui-même a fait de trop mauvaises observations pour pouvoir obtenir des données aussi exactes, qu'il a donc commis un plagiat envers quelqu'autre observateur encore inconnu. Cet imbroglio inextricable est la conséquence naturelle de l'insuffisance de la critique de M. KLUG, qui ne s'arrête pas à rechercher les causes et origines des écarts constatés, ni à analyser la nature de leur influence. Pour lui, chaque constellation que l'on peut calculer au moyen des Tables de MARIUS représente une *observation*.

En réalité, les erreurs des positions calculées d'après les Tables doivent provenir, en dehors de quelque inadvertance de calcul ou des fautes d'impression possibles [1]), de trois sources, savoir pour chaque Satellite: 1°. de l'époque, 2°. du temps périodique, 3°. de la théorie adoptée, laquelle suppose un mouvement des Satellites parfaitement uniforme dans des orbites circulaires autour d'un corps central. Quant à cette dernière source d'erreurs, elle était inévitable et commune aussi aux recherches de MARIUS et de GALILÉE. De leur temps il était impossible de tenir compte des principales inégalités dans les mouvements apparents des Satellites: une théorie des perturbations n'existait pas, la vitesse de la lumière était inconnue. MARIUS, astronome beaucoup plus exercé que GALILÉE, parle seulement des inégalités qui doivent résulter des excentricités des orbites du Soleil, — il était Tychonien, — et de Jupiter, mais il remarque judicieusement que leur influence ne peut être que très faible, ajoutant modestement qu'il se contente de donner des valeurs approximatives, qu'il ne s'est proposé que d'établir les premiers fondements d'une théorie des circonjoviales, laquelle après lui pourra être perfectionnée par d'autres. Pour lui, il ne prétend pas avoir pu atteindre dans ses obser-

[1]) OUDEMANS, dans notre article *Galilée et Marius*, en a signalé une: l'époque du Satellite III pour 1608: 1s 26° 13′ au lieu de 1s 27° 23′ (voir page 171 (571).

vations une précision de secondes [1]). Il y a raison de croire que ces dernières paroles font allusion à diverses observations du *Sidereus Nuncius*, où les distances sont données en dizaines de secondes une fois même (le 1er mars) jusqu'à deux secondes. GALILÉE, au contraire, ne parle pas du tout de ces inégalités.

On n'a pas besoin d'être bien savant en astronomie pour reconnaître à la première inspection de la liste des écarts, signalés par M. KLUG, entre les Tables de MARIUS et les Tables modernes que, pour la plus grande partie, ils proviennent d'une erreur dans l'époque, mal choisie par MARIUS, surtout en ce qui regarde le Satellite I. Chacune des observations faites par MARIUS a pu lui servir pour établir l'époque. On ne peut savoir avec sûreté quelle est l'observation qu'il a prise comme point de départ. Il y a probabilité que dans la seconde édition ce fut une des plus récentes, celle qui donne le moindre écart, savoir du 19 avril 1613, peu de temps après l'opposition de cette année. S'il en est ainsi, l'accélération temporaire des Satellites, indiquée par les termes de correction des Tables de M. BERBERICH, a dû causer une erreur de même sens dans toutes les autres, atteignant jusqu'à plus de 4 degrés.

Pour le Satellite I, le temps périodique trouvé par MARIUS est par hasard absolument exact; le mouvement diurne ne diffère que d'un millième d'un degré du mouvement moyen réel entre les années 1610 à 1614. Les erreurs des Tables de MARIUS devraient donc être constantes pour ce Satellite; les variations qu'ils présentent sont nécessairement la conséquence des inégalités dans le mouvement apparent du Satellite. Aussi peut on vérifier facilement, que les erreurs montent et descendent en concordance avec les termes de correction qui, dans les Tables de M. BERBERICH, représentent l'influence de ces inégalités. Les écarts des Tables corrigées de MARIUS sont comprises, pour le Satellite I, entre 12° et 17°6 [2]).

Les 21 écarts de 12° à 17°,6 dans les positions du Satellite I, qui figurent dans la liste de M. KLUG, mettent ainsi 21 fois sous les yeux du lecteur la même erreur d'une seule observation, augmentée ou diminuée des écarts produits par l'inégalité du mouvement dont on ne peut rendre

---

[1]) Page C_4 verso.

[2]) Nous nous bornons aux Tables de la seconde édition du *Mundus Jovialis*, laquelle a paru vers la fin de 1614 et dont j'ai fait connaître l'existence dans la Note III, p. 181 (67) de notre article *Galilée et Marius*. Ces Tables ont dû être calculées au moyen de données, dont MARIUS disposait dans la seconde moitié de 1614. Nous les comparerons dans la suite à celles admises par GALILÉE à la même époque.

responsable MARIUS. M. KLUG aurait pu les calculer et faire imprimer autant de fois qu'il y a de jours entre le 1er janvier 1610 et le 27 janvier 1614, sans augmenter en rien l'évidence que MARIUS, pour établir l'époque du Satellite I, a fait un choix malheureux parmi ses observations. Nous verrons dans la suite que, si ce choix de MARIUS se fût porté sur une autre observation, qui nous a été conservée, l'erreur n'eût été que de 7 degrés, augmentés ou diminués tout au plus de 4 à 5 degrés, dûs aux inégalités du mouvement.

De plus, M. KLUG ne se rend pas compte qu'une erreur dans l'époque ne peut pas affecter les temps périodiques, lorsque ces derniers ne sont pas déduits de la même observation qui a fourni l'époque. L'erreur dans le mouvement moyen diurne est égale à la différence des erreurs dans les positions trouvées dans les deux observations extrêmes de la période considérée, divisée par le nombre de jours écoulés entre les deux dates.

MARIUS avait parfaitement conscience de cette vérité élémentaire, lorsqu'il disait que les petites différences dans les périodes ne pouvaient être aperçues qu'au moyen d'observations séparées par de longs intervalles de temps. [1]) M. KLUG, au contraire, croit naïvement que MARIUS, pour établir les périodes définitives, observait le temps employé pour une seule revolution, et cela encore dans les plus mauvaises conditions pour obtenir quelque exactitude, savoir depuis une élongation extrême à la suivante, procédé que MARIUS décrit comme employé par lui pour obtenir une première approximation et qui, en effet, était le plus approprié pour débrouiller d'abord les apparences compliquées de quatre points lumineux oscillant sur une droite qui passe par le corps central, et que l'on ne pouvait identifier que par leurs mouvements.

La discussion des Tables de MARIUS n'est pas la seule preuve que sur ce terrain M. KLUG n'est guère un guide sûr. MARIUS, s'étant occupé des déviations en latitude, c'est-à-dire des écarts que les Satellites présentent d'un alignement droit passant par le centre de Jupiter, a construit une Table, qui donne pour un temps quelconque la déviation

[1]) MARIUS, en parlant de la détermination des temps périodiques, dit expressément: „Necesse est quam plures observationes habere, satisque longo intervallo inter sese distantes, praecipue autem tales in quibus est eadem habitudo Jovis ad Solem et terram; Causa in sequentibus ostendetur.

Non autem sufficiebant maximae elongationes ad indagationem temporis periodici sed adhibui post etiam observationes, quae prope Jovem accidebant, ubi celerior et incitatior est motus."

boréale ou méridionale de chaque Satellite, exprimée en secondes et calculée de 15 à 15 degrés des angles parcourus depuis la plus grande élongation occidentale [1]).

Cette *Tabula latitudinum* contient trois colonnes, une pour les Satellites I et II, les autres pour III et IV séparément. MARIUS attribue aux deux premiers Satellites un écart maximum de 10 secondes, aux deux suivants respectivement de 12 et de 15 secondes. Il dit avoir obtenu ces valeurs au jugé à l'œil armé, parce que l'instrument dont il se servait pour mesurer les distances ne permettait pas de déterminer d'aussi petites grandeurs. Dans sa *Dédicace* il a dit que les Tables qu'il imprime à la fin de son livre permettent de trouver la position des Satellites *ad quoddam tempus*, c'est-à-dire qu'elles servent à perpétuité. Les Tables des époques qui ont pour argument le temps embrassent la période de 1608 à 1630. Elle donne les angles de position pour la fin de chaque année et peut être continuée facilement au moyen des deux Tables suivantes, qui donnent les angles parcourus dans une année ordinaire et dans une année bissextile. Les Tables sont donc décidemment permanentes. La *Tabula latitudinum* n'a pour chaque Satellite qu'un seul argument, savoir l'angle de position, ce qui montre que dans l'opinion de MARIUS il n'y a pas d'autre variable dont dépendrait pour chaque Satellite la valeur de l'écart en latitude. Cet écart, dans l'esprit du calculateur, ne peut donc provenir que de la situation constante du plan de l'orbite par rapport à la ligne de vision de l'observateur ou, ce qui pour de si faibles valeurs revient au même, par rapport au rayon vecteur de Jupiter dans son orbite. Comme MARIUS ne fait pas entrer comme argument dans sa Table la latitude variable de la planète, il est clair qu'il croit pouvoir admettre que le plan de l'orbite de Jupiter diffère trop peu de l'Ecliptique pour qu'il ait besoin d'y avoir égard. Il est certain qu'il n'a pas cru que les plans des orbites fussent parallèles entre eux, car dans ce cas les déviations maxima des quatre Satellites devaient avoir entre eux les rapports des rayons des orbites, admis par MARIUS, savoir:

$$3 : 5 : 8 : 13,$$

[1]) Pour cette Table MARIUS choisit donc une autre origine du mouvement que pour le calcul des élongations. La raison est évidemment qu'il préfère calculer les déviations en latitude au moyen d'une table des sinus, ainsi qu'il l'a fait dans sa *Tabula distantiarum*. Comme les distances en latitude sont proportionnelles aux cosinus des angles parcourus depuis l'aphélie, il emploie ces derniers augmentés de 90° comme argument de sa *Tabula latitudinum*.

ou $$1 : 1,7 : 2,7 : 4,3,$$

tandis que la Table a été calculée au moyen des rapports:

$$1 : 1 : 1,2 : 1,5.$$

MARIUS attribue donc aux orbites des inclinaisons sur l'orbite à très peu près proportionnelles aux valeurs

$$1 : 0,60 : 0,45 : 0,35.$$

Enfin, comme il dit expressément que dans leurs plus grandes élongations les Satellites se trouvent toujours en ligne droite parallèle à l'écliptique, il est clair aussi qu'il se représente les plans des orbites comme coupant l'orbite de Jupiter ou l'écliptique suivant une même ligne perpendiculaire à la ligne de vision de l'observateur, c'est-à-dire que les lignes des nœuds des quatre orbites coïncident et restent sensiblement perpendiculaires au rayon vecteur de Jupiter.

C'est sur ces raisons élémentaires, dans lesquelles aucune place n'est accordée aux hypothèses, que OUDEMANS et moi nous avons dit p. 148 (34): „MARIUS attribue le phénomène (c. à d. les déviations en latitude) à l'inclinaison du plan des Satellites sur le plan de l'orbite de Jupiter, mais il commet l'erreur de considérer cette inclinaison comme étant dirigée toujours dans le même sens par rapport au Soleil.

M. KLUG, dans la critique qu'il donne de notre Mémoire, dit peremptoirement que notre conclusion est complètement erronée (durchaus unrichtig); c'est une sentence qu'il prononce page 441; quant aux raisons qu'il en peut donner, le lecteur doit aller les chercher quarante pages plus loin où, dans une note, M. KLUG nous fait dire que la *ligne des apsides* d'après MARIUS resterait perpendiculaire à la ligne Soleil-Jupiter, ce qui n'aurait aucun sens, puisque dans un orbite circulaire autour d'un corps central il n'existe pas d'apsides. Dans le texte on lit la remarquable assertion suivante: „La Table de MARIUS ne représente la théorie des orbites parallèles à l'écliptique que *pour un seul cas*, savoir lorsque la latitude de Jupiter est boréale, telle qu'elle était lors de l'achèvement du *Mundus Jovialis* en 1613." [1]) Ici encore il faut

[1]) Lorsqu'on lit le travail de M. KLUG, il est quelquefois difficile d'en croire ses yeux. En parlant de la Tabula latitudinum que nous avons suffisamment décrite, M. KLUG dit que cette table ne donne les déviations que *qualitativement* et il ajoute en parenthèse: *non pas quantitativement*. Une table qui ne contient que des chiffres! Est-ce que les chiffres cessent d'exprimer des quantités, lorsqu'ils sont inconciliables avec les hypothèses de M. KLUG?

se contenter d'une sentence du professeur de Nürnberg, car il ne condescend pas à fournir la moindre preuve de son assertion, si ce n'est que MARIUS eût dû parler plus clairement des plans des orbites et de leurs inclinaisons.

Comme MARIUS ne parle ni des plans des orbites des Satellites ni de celui de Jupiter et de son inclinaison sur l'Ecliptique, il est clair que l'unique preuve que M. KLUG produit contre ce qu'on lit clairement dans sa Table, renverse en même temps l'hypothèse complètement arbitraire de M. KLUG, qui décrète que pour MARIUS les plans des orbites étaient parallèles à celui de l'Ecliptique. MARIUS n'avait-il pas le droit de supposer que ses lecteurs pourraient bien comprendre sa Table? Peut-on lui faire un reproche de n'avoir pas prévu que près de trois siècles plus tard son ouvrage tomberait entre les mains d'un critique qui ne serait pas capable de lire une Table, et dont il est au moins douteux s'il connaît la différence entre la ligne des nœuds et la ligne des apsides?

Les points que nous venons de toucher constituent, avec quelques autres moins importants que nous analyserons dans la suite, la partie proprement *scientifique* du Mémoire. C'est la partie qui a déterminé M. GERLAND à déclarer dénué de fondement les arguments astronomiques de MM. OUDEMANS et BOSSCHA, qu'il avait d'abord loués dans son résumé de l'article *Galilée et Marius.*

M. GERLAND nous semble avoir été mieux inspiré lorsqu'il caractérise la partie *historique* du Mémoire de M. KLUG en disant que l'auteur a pris „un chemin long, tortueux et épineux, où les points de repos „sont chaque fois l'indication d'un travail de GALILÉE *qui rend possible* „une communication de MARIUS et d'après son caractère le *détermine.*" En effet, le plan général de cette partie de l'ouvrage est de démontrer, à l'occasion de divers résultats scientifiques acquis par MARIUS, qu'un plagiat a chaque fois été *possible* et que, MARIUS étant plagiaire de sa nature, cela suffit pour prouver qu'il l'a commis en effet.

Nous nous permettons de douter qu' un juge impartial puisse trouver un point de repos dans une telle conclusion, qui méconnaît les principes les plus élémentaires de justice et de droit commun.

La tentative de faire accepter par des lecteurs non prévenus un jugement aussi singulier est d'autant plus audacieuse que MARIUS, lorsqu'il dit avoir observé tel phénomène, ou trouvé telle théorie, cite souvent des témoins. La manière dont l'auteur leur ferme la bouche ou les écarte

nous semble sans précédent dans la littérature historique. Nous nous bornons à deux exemples.

Dans sa Préface, MARIUS cite comme témoin de sa découverte des Satellites de Jupiter, et de ses premières observations, un personnage d'importance: le „nobilissimus, fortissimus et maxime strenuus" JOHANNES PHILIPPUS FUCHSIUS DE BIMBACH et MÖHN, Capitaine de renom, conseiller intime des deux Markgraves de Brandenburg, les protecteurs de MARIUS, et qui lui-même prenait un vif intérêt dans les travaux de l'astronome d'Anspach. MARIUS raconte comment FUCHS, ayant rencontré à la foire de Frankfurt un Néerlandais, qui se disait l'inventeur d'un instrument à voir de loin, avait eu l'occasion d'examiner la lunette et d'en essayer l'effet, mais avait refusé de l'acheter, non seulement à cause du prix exorbitant que l'inventeur demandait pour un modèle gravement endommagé, mais aussi parce qu'il ne pouvait avoir le premier exemplaire, c'est-à-dire entrer en possession du secret. De retour à Anspach, FUCHS et MARIUS s'ingénièrent à contrefaire l'instrument; ce qui n'était guère difficile. Ils ne parvinrent pas cependant à construire un instrument d'un aussi fort grossissement que celui de la lunette que l'inventeur avait présentée à FUCHS. Ceci s'explique facilement: les verres convexes, que l'on pouvait acheter chez les marchands de verres pour l'usage des presbytes, n'avaient pas une distance focale assez grande. On ne les trouve pas même dans les boîtes de lentilles concaves et convexes, en usage chez les oculistes actuels. En attendant d'autres verres qu'ils avaient commandés, ils eurent l'occasion de se procurer une lunette appropriée, envoyée des Pays-Bas. et c'est avec cet instrument que MARIUS se mit aussitôt à inspecter le ciel étoilé, entre autres la planète Jupiter qui, s'approchant de son opposition, était un objet particulièrement en vue. Au mois de novembre 1609 il aperçut de petites étoiles qui accompagnaient la planète dans son mouvement rétrograde. Supposant qu'elles circulaient autour de Jupiter, de même que Mercure, Vénus, Jupiter et Saturne (selon le système de Tycho) circulent autour du Soleil, MARIUS se décida à noter ses observations. La première de ses observations enregistrées fut celle du 29 décembre 1609, vieux style (8 janvier 1610 s. n.), lorsqu'il vit trois étoiles à l'occident de Jupiter. MARIUS continue son récit dans les termes suivants: „Pendant ce temps furent envoyés de Venise deux „verres d'un poli excellent, l'un convexe et l'autre concave, par le très „savant et très prudent seigneur JEAN BAPTISTE LENCCIUS, qui, après

„la conclusion de la paix [9 avril 1609 à la Haye] retourné des Pays-„Bas, s'était rendu à Venise et auquel cet instrument était déjà très „connu. Ces verres se trouvaient adaptés à un tube de bois et me furent „transmis *par le très noble et très vaillant (nobilissimo maximeque stre-„nuo) Seigneur déjà nommé, afin que j'examinasse leur effet sur les astres „et sur les étoiles près de Jupiter.* Donc, depuis ce temps jusqu'au 12 „janvier [c. à d. 22 janvier s. n.] je m'appliquai plus diligemment à „ces étoiles Joviales et j'aperçus en quelque manière qu'il y avait qua-„tre de ces corps qui regardaient Jupiter dans leurs circonvolutions. „Enfin, vers la fin de février et le commencement de mars, je fus tout „à fait édifié sur le nombre de ces étoiles. Du 13 janvier au 8 février „[23 janvier au 18 février s. n.] je fus à Hall en Souabe et je laissai „l'instrument chez moi craignant qu'il ne reçût quelque avarie en „voyage. Après que je fus retourné je m'accommodai à mes observa-„tions accoutumées et *pour que je pusse observer avec plus d'exactitude „et plus de diligence ces étoiles Joviales, par l'effet d'une singulière „affection envers ces études mathématiques le très noble et très célèbre „seigneur plusieurs fois cité m'accorda la pleine possession de cet instru-„ment.*

„Ainsi après ce temps jusqu'aujourdhui je continuai mes observations „avec cet instrument et avec d'autres construits depuis. *Cette histoire „est tout à fait véritable* (Haec est historia verissima). *En effet, je ne „pourrais pas mentir impunément dans un écrit public à l'égard d'un „homme aussi considérable, vivant et présent, lequel non seulement par „sa très noble et très ancienne descendance, mais surtout par ses vaillants „gestes, ses actes d'héroisme et son expérience de la guerre est très célèbre „en France, en Hongrie en Belgique et en Allemagne.*"

Peut-on dans un récit aussi circonstancié invoquer plus ouvertement, plus solennellement le témoignage d'un homme public, généralement connu, qui s'intéressait spécialement aux travaux de Marius et qui, comme nous le verrons plus loin [1]), s'était déjà, à une autre occasion, porté garant de la bonne foi de Marius?

Et cependant, en présence du texte clair et précis de Marius, M. Klug ose entreprendre de faire croire à ses lecteurs que Marius n'a pas cité Fuchs comme témoin de ce qu'il raconte. C'est ici que l'auteur manie avec une liberté magistrale la méthode tortueuse. *Il lit*, comme

---

[1]) Dans l'article *Kepler et Marius.*

il l'avoue lui-même „*entre les lignes*" que FUCHS n'a pas vu lui-même les Satellites, car autrement MARIUS n'aurait pas manqué de le dire. „Quel „homme non initié," s'écrie M. KLUG „ne devait pas entrer en extase „et s'adonner à des exclamations lorsqu'il voyait subitement devant „lui un phénomène aussi remarquable et aussi beau. Pourquoi MARIUS „n'en dit il rien?" [1]) Aux yeux de M. KLUG cela suffit pour prouver que FUCHS n'a pas lui-même vu les satellites, que par conséquent il n'a pas été témoin de la découverte et ne peut être cité comme tel par MARIUS. Toutefois il est clair que la conjecture invraisembable de M. KLUG, dût elle être admise, ne peut en rien infirmer la témoignage de FUCHS. Il suffit, pour le prouver, de lire les passages que nous avons imprimés en italiques. FUCHS a fait venir de Venise une nouvelle lunette, l'a transmise et ensuite en a fait don à MARIUS, afin que celui-ci examinât plus diligemment les Satellites de Jupiter. MARIUS, sans doute possible, prend donc FUCHS pour témoin qu'il s'est occupé et a parlé avec lui des Satellites avant le 22 janvier 1610, plus de sept semaines avant la publication à Venise du *Sidereus Nuncius*.

Cependant M. KLUG ose nier ce fait indéniable et décisif. Il semble croire qu'il arrivera à faire admettre une thèse insoutenable à force de la répéter. Il y revient sans cesse dans le cours de son Mémoire, en la présentant comme un fait acquis. A la page 112, immédiatement après la traduction de la Préface de MARIUS, il prépare déjà ses lecteurs à sa prétendue démonstration, qu'il ne produit que 20 pages plus loin, là où on ne la chercherait guère, dans un chapitre de 17 pages énumérant diverses opinions émises dans les 17e, 18e, 19e et 20e siècles sur

[1]) De telles déclamations fournissent la preuve évidente que l'auteur, à moins de tromper sciemment ses lecteurs, n'a jamais regardé la constellation de Jupiter à travers une lunette hollandaise grossissant environ 20 fois, comme celles dont se servaient MARIUS et GALILÉE. Le spectacle n'a rien d'extraordinaire ni de stupéfiant et les circonstances pénibles dans lesquelles il faut observer sont bien propres à bannir l'enthousiasme. Le champ restreint fait l'effet, comme si l'on regarde le ciel par un tuyau de pipe; il exige une parfaite immobilité de la lunette pour ne pas perdre de vue la planète et ceux des Satellites qui sont visibles; il faut avoir les moyens de suivre avec la lunette le mouvement apparent de toute la constellation, laquelle autrement a disparu du champ dans une minute de temps.

Que d'ailleurs chez d'autres que FUCHS, et même chez des astronomes exercés qui devaient en comprendre immédiatement la portée, le phénomène n'excitait aucun enthousiasme nous apparaîtra clairement dans la suite de ce travail.

la question GALILÉE—MARIUS par divers auteurs. Il dit (p. 412) à propos de la nébuleuse d'Andromède, que c'est la première et l'unique découverte de MARIUS pour laquelle il peut produire un témoin irrécusable. A la page suivante il ose écrire, au sujet des Satellites de Jupiter:

„MARIUS ne cite personne avec „*lequel il aurait parlé de son impor-*„*tante découverte*, ou à laquelle il l'aurait montrée". A la page 439 on lit: „*Il n'y a pas même un témoin que* MARIUS *à cette époque* [1614] *avait seulement vu les Satellites*". M. KLUG se garde bien d'ajouter qu'il a vu lui-même, vu et lu de ses propres yeux l'extrait d'une lettre, dans laquelle MARIUS décrit exactement une constellation des Satellites observée par lui le 30 décembre 1610, communiquée dans tous ses détails à KEPLER par ODONTIUS, correspondant de MARIUS, dans une lettre du 4 décembre 1611.

Aux pages 440 et 455 M. KLUG revient encore sur sa thèse en affirmant pertinemment que MARIUS n'a pas cité FUCHS comme témoin.

Dans un autre cas, pour écarter des témoins produits par MARIUS, M. KLUG emploie les deux moyens dont, comme nous verrons dans la suite, il se sert continuellement: celui de découper une citation en tronçons et de supprimer ceux qui sont incompatibles avec ses déductions, et celui de prêter aux paroles citées un sens, qu'ils ne peuvent avoir et souvent directement opposé à celui qu'ils expriment nettement.

Lorsque MARIUS, page C_3 recto de son livre, vient à parler du système de TYCHO, il dit qu'à la première lecture de COPERNIC, étant encore à l'école de Heilbronn et ne connaissant pas encore le nom de TYCHO et bien moins encore son système, il avait conçu une opinion laquelle „in genere" convenait avec celle de TYCHO. C'était pendant l'hiver de 1595 à 1596. Ce ne fut que l'automne suivant qu'il avait vu un dessin du système de TYCHO chez un pasteur d'Anspach F. RAPHAËL, mort depuis. Ces détails, peu importants pour la gloire de MARIUS, ont cependant quelque valeur historique en ce qu'ils montrent combien la conscience religieuse de fervents protestants, non moins que celle du clergé catholique, fut mise en émoi par le nouvel évangile copernicien, qui renversait complètement la cosmogonie anthropocentrique du premier chapitre de la Genèse, et quel intérêt excitait toute tentative d'éviter le conflit entre la science et la foi. MARIUS, luthérien zèlé, en écrivant un livre dédié aux markgraves de Brandenbourg, princes protestants, ses protecteurs, avait bien quelque raison de mémorer un fait qui ne pouvait manquer de le confirmer dans leurs bonnes grâces. Il prend pour

témoins tous les assesseurs du Consistoire, auxquels, après Pâques de 1596, il présenta ses hypothèses avec leur explication.

Ce fut sur leur recommandation que le Prince GEORGE FRÉDÉRIC, markgrave de Brandenburg, lui concéda un logement particulier dans le monastère pour qu'il pût se vouer plus commodément à cette étude. Ensuite MARIUS nomme encore ses professeurs qui, quoique chargés d'autres cours, lui furent cependant de grand secours en lui fournissant les livres d'étude. Il dit expressément qu'il cite leurs noms, quoiqu'ils fussent déjà décédés, parce qu'il ne veut pas manquer de donner un témoignage d'honneur et de reconnaissance envers ceux qui à plusieurs autres égards encore ont droit à sa gratitude [1]).

Après avoir nommé encore son frère JACOB, de pieuse mémoire, il cite enfin un certain LANIUS vivant encore comme particulier à HALL, autrefois son voisin à Heilbron, lié d'étroite amitié avec MARIUS.

Ne négligeant aucune occasion pour rendre suspecte la bonne foi de MARIUS, M. KLUG présente ce passage comme une preuve de ce qu'il nomme ironiquement la remarquable faculté divinatrice de MARIUS. Il traduit le passage du *Mundus Jovialis, jusqu'à l'endroit* où MARIUS cite les assesseurs du Consistoire. Les ayant passés, M. KLUG continue: „MARIUS produit aussi des témoins de cette sienne découverte du système „tychonéen, lesquels cependant tout de même (allerdings), lorsque MA„RIUS en 1614 annonça pour la première fois sa découverte de 1595/96, „étaient, — à l'exception de LANIUS privatisant à HALL, — tous morts, „et de plus, même s'ils fussent en vie, ne pouvaient pas être des témoins

---

[1]) Il faut bien citer ici le texte original de MARIUS, pour permettre de se former un jugement sur la manière dont il a été traité par M. KLUG.

„Testes hujus mei inventi complures habeo. Praeter enim modo dictum Eruditissimum virum, omnes etiam tunc temporis Consistorii illustris Assessores quibus post festum paschatis anni 1596. hypotheses meas cum explicatione praesentavi, quorum etiam consilio, ab Illustri Principe GEORGIO FRIDERICO march. Brandenburgense laudatissimae memoriae, peculiaris habitatio in supradicto monasterio mihi concessa est ut eo commodius studium tractare possem. Insuper Praeceptores meos charissimos testor; qui quod ob alias lectiones ipsis non licebat me tamen libris plurimum in hoc studio juvarunt, quales erant hi, nimirum M. WENCESLAUS GUNKFELDERUS, M. GEORGIUS HIRSCHBAUERUS, et Dns JOHANNES NESERUS: quorum nomina, quia fatis jam concessêre, honoris & gratitudinis ergo ascribere debui et volui, quia de me non saltem in hac parte, sed etiam in aliis quam plurimis, optime meriti sunt." Suit la citation de son frère et de LANIUS.

„dangereux pour MARIUS parce que, *comme Marius le dit lui-même*, à „cause de leur enseignement dans une autre direction ils ne pouvaient „étudier eux mêmes des ouvrages astronomiques et *n'y entendaient rien*."

Peut-on dénaturer plus systématiquement le sens des paroles d'un auteur? On supprime les assesseurs du consistoire, les témoins les plus intéressés à une théorie, qui écarterait celle de COPERNIC, on omet la récompense qui échut à MARIUS de la part du prince FRÉDÉRIC, on expédie LANIUS en le reléguant dans une parenthèse, on exagère ce que MARIUS présente modestement comme une hypothèse dans le genre de celle de TYCHO, en la qualifiant de découverte du système Tychonéen; les livres d'étude fournis à MARIUS par ses précepteurs sont présentés comme des objets inutiles aux donateurs et, pour mettre le comble à ces outrages faits à la vérité, MARIUS, qui cherche l'occasion pour rendre un témoignage de sa reconnaissance, est faussement accusé d'avoir commis à leur sujet une irrévérence révoltante en disant grossièrement qu'ils n'y entendaient rien.

C'est dans ce style que le Mémoire de M. KLUG est écrit d'un bout à l'autre. On se demande s'il vaut bien la peine de s'occuper d'un écrit, dans lequel on méconnaît les premiers principes d'une critique objective. Ne faut-il pas plutôt, comme le faisait KEPLER au sujet de l'auteur d'une hypothèse absurde, quitter l'arène: „exire e peripato, relicto illo clamante et insaniente"? [1])

Malheureusement le Mémoire emprunte quelque crédit à l'hospitalité qui lui a été accordée par l'Académie royale des Sciences de Münich. De plus l'auteur, lorsqu'il donne un aperçu de la littérature de son sujet, n'a pas manqué de s'occuper de l'article *Galilée et Marius* de OUDEMANS et de moi. Le silence gardé sur ses remarques pourrait être interprêté à faux.

Je ne méconnais pas les difficultés d'une critique à laquelle on peut reprocher d'enfoncer des portes ouvertes pour quiconque veut prendre la peine d'examiner la question avec quelque détail et puis marcher droit devant lui dans la voie d'une logique élémentaire. Cette difficulté se trouve considérablement augmentée par l'abondance des matières à déblayer. L'écrit dont il s'agit est tellement encombré d'hypothèses, conjectures, assertions arbitraires ou complètement fausses que, pour les

[1]) J. KEPPLERI *de Stella Nova in Pede Serpentarii etc. Libellus.* Prague M.D.C.VI p. 100.

réfuter toutes, il faudrait se résoudre à écrire un commentaire perpétuel qui suivrait point pour point le Mémoire et présenterait ainsi le même caractère de décousu et d'embrouillement désespérant. Il n'est pas possible d'admettre qu'un lecteur voudrait nous suivre dans ce dédale.

Nous devons donc nous borner à traiter les points principaux en nous contentant pour les autres d'un „Ex iis disce omnes". Les sujets que nous aurons à examiner nous prêteront l'occasion de fournir sur les travaux et observations de MARIUS, ainsi que sur celles de GALILÉE, des informations que nous croyons inconnues jusqu'ici, et à rétablir dans leur véritable aspect historique quelques points relatifs aux mérites et au rôle de GALILÉE.

Les différents sujets à traiter n'intéresseront probablement pas au même degré les lecteurs que je me souhaite. C'est pourquoi j'ai divisé ce travail en chapitres dont j'indiquerai brièvement la substance et le but.

Le premier chapitre suivant, *sur les observations consignées dans le Sidereus Nuncius*, servira à démontrer que MARIUS n'y a pu emprunter aucune donnée pour son travail en dehors de celle qu'il signale lui-même, savoir, pour certaines dates, l'orientalité ou l'occidentalité des Satellites.

Le second, sur „*les constellations des Satellites reproduites sur les planches des Lettere solari de* GALILÉE, démontrera que de fait MARIUS, même en admettant qu'il en ait eu l'occasion, n'y a rien emprunté du tout.

Le troisième: *Sur les observations et les Tables de* MARIUS renseignera sur la véritable valeur de ses recherches et des données par lesquelles il a devancé GALILÉE.

Le quatrième fera connaître MARIUS comme l'astronome qui a le premier constaté l'existence des phases de Mercure.

Le cinquième, *sur les lunettes au temps de* MARIUS *et* GALILÉE, examinera, en dehors des fantaisies de M. KLUG, quelques énoncés et travaux récents sur ce sujet.

Le sixième: KEPLER et MARIUS, traitera des relations de MARIUS avec le célèbre astronome de Prague.

Le septième: Les deux cas GALILÉE-CAPRA, contiendra une critique des vues généralement admises sur les premières publications de GALILÉE. Une *conclusion* terminera ces études.

II. Les observations des Satellites de Jupiter consignées dans le *Sidereus Nuncius* de Galilée.

Marius, dans ses observations et ses calculs sur les Satellites de Jupiter, a estimé à une minute le diamètre de Jupiter. Il dit [1]) avoir obtenu cette mesure „per diligentem possibilem eamque diurnam observationem" et ajoute avoir constaté plusieurs fois pendant le jour que Jupiter, dans sa distance moyenne à la Terre, n'occupait pas plus d'une minute d'arc. Autant que nous sachons, Marius a été le premier à observer au moyen de la lunette les étoiles en plein jour: les planètes Jupiter et Mars et l'étoile fixe Cor Leonis. Que Marius, pour mesurer le diamètre de Jupiter, a préféré les observations faites pendant le jour, difficiles parce que le champ très restreint de sa lunette exigeait beaucoup d'habileté pour y amener un objet invisible à l'oeil nu [2]), montre bien qu'il se rendait compte des erreurs que dans les observations de nuit devait causer l'irradiation.

A ce renseignement précis de Marius, M. Klug oppose [3]) la thèse que Marius a pris de Galilée cette valeur d'une minute. Pour toute preuve il dit: „Celui-ci donna dans le *Sidereus Nuncius* 1610 et dans „le *Discorso* 1612 la valeur d'une minute pour le diamètre de Jupiter „et c'est *évidemment* cette valeur que Marius adopta dans ses écrits et „ses calculs."

Le lecteur, qui n'a pas encore acquis l'expérience du singulier aplomb avec lequel le professeur de Nürnberg émet des assertions qu'il n'a pas contrôlées, aura quelque difficulté à croire, — ce qui pourtant est la vérité, — qu'il n'y a aucun endroit dans le *Sidereus Nuncius* où Galilée donne la moindre indication sur la grandeur apparente de Jupiter. Quant au *Discorso* il n'est pas possible que Marius y ait pu emprunter cette donnée, et cela pour deux causes, d'abord parce que Marius en rédigeant son livre n'avait jamais vu cet écrit, puis encore parce que dans le *Discorso* on trouve sur le diamètre de Jupiter autant de renseignements que dans le *Nuncius*, c'est-à-dire rien du tout.

Dans l'Avis qui termine la seconde édition du *Mundus Jovialis*,

[1]) *Mundus Jovialis* A recto et verso.

[2]) Nous croyons même que c'est une chose impossible sans fixer la lunette à un cercle divisé convenablement orienté.

[3]) P. 482.

MARIUS [1]) affirme sous serment (sancte affirmo) qu'en écrivant le *Mundus Jovialis* il n'avait rien lu de GALILÉE, en dehors du *Sidereus Nuncius*. M. KLUG ne peut prétexter de n'avoir pas connu ce passage, parce qu'il le cite en lettres minuscules dans une note au pied de la page 171, tout en se permettant de rendre les mots de MARIUS „sancte affirmo" par l'expression „in Abrede stellen" = contredire. Pour M. KLUG la protestation jurée de MARIUS ne compte pas. Dans chacune de ses prétendues preuves de plagiat il présuppose que MARIUS est menteur; ici MARIUS serait parjure, KLUG tâche de le cacher par une traduction inexacte [2]).

Le *Discorso* de GALILÉE traitait de l'équilibre des corps flottants, sujet qui n'intéressait guère un astronome tel que MARIUS. Il était écrit en italien, que MARIUS n'entendait pas [3]). Enfin l'écrit ne contenait aucune donnée sur la valeur que GALILÉE attribuait au diamètre apparent de Jupiter. Voici textuellement tout ce que, en dehors des temps de révolution déjà cités, il contient au sujet des Satellites.

„Pour une telle précision [savoir pour calculer les positions des Satel-„lites dans de longs espaces de temps] les premières observations ne suf-„fisent pas, non seulement à cause des courts intervalles de temps, mais „parce que, n'ayant pas encore inventé alors la manière de mesurer avec „quelque instrument les distances des lieux entre les planètes, je notai „les interstices par le simple rapport au diamètre du corps de Jupiter, „pris pour ainsi dire à l'œil, lesquels, quoique n'admettant pas l'erreur „d'une minute, ne suffisent pas pour la détermination de l'exacte gran-

---

[1]) *Galilée et Marius*, Note III, p. 181 (67).

[2]) Dans une note p. 513, M. KLUG parle encore de l'Avis de la seconde édition et il profite de l'occasion pour émettre une assertion manifestement fausse, en disant que MARIUS s'y défend contre l'accusation de SCHEINER, d'avoir pris les temps périodiques des écrits de GALILÉE. Le jésuite ouvertement hostile envers MARIUS, qu'il qualifie de Calviniste et dont il interprête malicieusement à faux l'aveu que le NUNCIUS lui a été utile pour reconnaître l'orientalité ou occidentalité des Satellites à certaines dates, ne se permet pas cependant de l'accuser d'avoir pris de GALILÉE les temps périodiques du *Mundus Jovialis*; tout au contraire aux valeurs grossièrement évaluées du *Discorso* il ajoute les valeurs plus exactes de MARIUS, qu'il désigne comme l'émule de GALILEE (*Disquisitiones mathematicae*, p. 80).

[3]) C'est ce qui résulte d'un passage de la *Considerazione astronomica circa la Stella nuova* (*Ed. Naz.* II, p. 296 l. 22) où CAPRA dit de son maître „non essendo lui ben capace della nostra materna", ce qui l'obligea à traduire pour MARIUS quelques endroits de l'écrit de LORENZINI DA MONTEPULCIANO.

„deur des sphères de ces étoiles. Mais maintenant que j'ai trouvé la „manière de prendre une telle mesure sans erreur même de très peu de „secondes, je continuerai ces observations jusqu'à l'occultation de Jupiter, „lesquelles doivent suffire pour l'entière connaissance des mouvements „et des grandeurs des orbites de ces planètes et d'autres conséquences „encore."

Nous savons maintenant, par la publication d'Alberi (1846), que Galilée, dix jours avant d'appliquer pour la première fois l'instrument dont il parle, avait estimé à 37″,5 le diamètre de Jupiter vu d'à peu près la plus petite distance de la Terre (19 jours avant l'opposition), c'est-à-dire à une demi-minute à la distance moyenne. Dans cette observation, au lieu de déduire le rayon de l'orbite du rapport au diamètre, Galilée avait suivi la route inverse, et calculé le diamètre de Jupiter au moyen du rayon de l'orbite et de son rapport avec le diamètre de la planète.

Dans le *Nuncius* il exprime les distances en minutes, en minutes et secondes, ou en secondes seules. M. Klug veut-il en conclure que pour Galilée le diamètre de Jupiter était juste une minute? Croit-il qu'un arpenteur, lorsqu'il dit avoir trouvé pour la longueur d'un lot de terrain tel nombre de mètres et de décimètres, fait entendre par là qu'il s'est servi dans sa mesure d'un bâton d'un mètre de longueur? *Ce qui est certain, c'est que* Galilée *n'a jamais attribué au diamètre de Jupiter la valeur d'une minute.* Lorsqu'il écrivit le *Sidereus Nuncius*, son estimation était descendue à *deux* minutes, après qu'il eut, par ses premières observations, obtenu successivement les valeurs d'abord de *quatre*, puis de *trois* minutes.

C'est ce qu'on peut lire dans la reproduction phototypique du journal manuscrit des premières observations de Galilée, due aux soins de M. Favaro et que M. Klug dit avoir pu consulter. La singulière manipulation qu'Alberi, dans sa publication, a fait subir à ce précieux document avait complètement fait disparaître ces importants détails. Au lieu de le faire imprimer intégralement, Alberi a supprimé la partie du texte qui contient le détail des observations depuis le 7 janvier jusqu'au 9 mars, celles qui se trouvent consignées dans le *Nuncius*. Il a laissé ignorer ainsi que le texte du *Nuncius* diffère considérablement de celui du journal, non seulement en ce qui concerne la description verbale des constellations, mais surtout en ce qui regarde les données numériques. Alberi a ainsi soustrait à la connaissance de ses lecteurs que Galilée a remplacé l'estimation des distances, toutes les fois que

dans le journal elles sont notées dans le journal en diamètres de Jupiter, par celles en minutes et secondes que l'on trouve dans le *Nuncius*.

Par contre ALBERI a intercalé, dans le texte du *Nuncius* qu'il donne au Tome III de sa publication, les observations tirées du journal, du 9 mars jusqu'au 18 avril, et ajouté encore dans le texte du Tome V celles du 24 avril jusqu'au 21 mai 1610. Il a fait suivre les deux rédactions amplifiées de la phrase qui, dans le texte original du *Nuncius*, vient immédiatement après l'observation du 2 mars 1610: „Hae sunt „observationes quatuor Mediceorum Planetorum, recens ac primo a me „repertorum, ex quibus, quamvis illorum periodos colligere nondum „detur, licet saltem quaedam animadversione digna pronunciare". Il en est résulté que dans la rédaction d'ALBERI du tome III le *Sidereus Nuncius*, paru à Venise le 12 mars, semble contenir des observations faites le 18 du mois suivant.

Or, dans la partie du journal qu'ALBERI a supprimée et que l'Edizione Nazionale rétablira par les soins de M. FAVARO, on lit sous la date du 16 janvier:

„Die 16 hora p^a noctis talis fuit constitutio (suit la figure) 3n (empe) „tum cernebantur stellulae, duae Jovi proximae per 1^am nempe diametri „ipsius partem ab eo utrinque distantes seu per 1'. tertia vero occi- „dentalis per quadruplum diametri ipsius ab illo aberat; proximae Jovi „non majores apparebant remotiori sed lucidiores."

Ici le quart du diamètre de Jupiter est égal à une minute.

Cette même observation se trouve décrite dans le *Nuncius* dans les termes suivants:

„Die decimasexta, hora prima noctis tres vidimus stellas iuxta hunc „ordinem dispositas (suit la figure) duae Jovem intercipiebant ab eo per „min. 0 sec. 40 hinc inde remotae; tertia vero occidentalis a Jove „distabat min. 8. Jovi proximae non majores sed lucidiores apparebant „remotiori".

On voit que GALILÉE, en relatant dans le *Nuncius* l'observation consignée dans son journal, a évité de rapporter les élongations des Satellites au diamètre de Jupiter, comme il l'avait fait dans le journal, qu'il supprime la donnée qui fait connaître son estimation du diamètre de Jupiter en minutes d'arc et qu'en reduisant le résultat quantitatif de son observation à cette dernière unité il applique le rapport: diam. $\frac{1}{4}$^is = 2 min. pour le Satellite le plus éloigné, 2',6 pour les deux autres, quoique pendant l'observation même il l'eût estimé à quatre

minutes. La réduction a amélioré le résultat. Car les élongations géocentriques calculées pour l'heure de l'observation donnent, en diamètres de Jupiter depuis le centre,

I	II	III	IV
— 2,26	+ 2,11	+ 2,27	+ 13,1,

c'est-à-dire depuis le bord de la planète:

— 1,76	+ 1,61	+ 1,77	+ 12,6.

A l'occident Galilée n'a vu que deux Satellites. Il est évident qu'il a pris les Satellites II et III pour un seul. Pour Galilée ces derniers chiffres furent donc d'après le journal:

I	II et III	IV
0,25	0,25	4

valeurs 7 et 3 fois trop faibles.

Mais si l'on suppose que Galilée a réellement vu dans sa lunette la planète sous un angle beaucoup trop grand, il faut tenir compte du rétrécissement que l'intervalle entre le bord de la planète et le Satellite a subi par cette cause, et à cet effet réduire les distances à celles comptées depuis le centre de Jupiter. Les valeurs galiléennes deviennent ainsi *a centro*, en diamètres:

0,75	0,75	4,5,

qui offrent avec les valeurs calculées

2,26	2,20	13,1

un rapport à très peu près constant de 3. Il faut donc admettre que l'erreur considérable de l'observation de Galilée provient de ce que l'image de Jupiter se montrait a lui beaucoup trop grand.

Il est certain que Galilée, en rédigeant le *Nuncius*, s'était aperçu que son estimation du diamètre de Jupiter à 4 minutes était beaucoup trop élevée.

Déjà sous la date du 18 janvier on trouve noté dans le Journal „Secundum meam existimationem Jovis diameter occupat 3′ aut quoddam minus".

Cette remarque ne se trouve pas reproduite dans le *Nuncius* et de fait GALILÉE, en transformant dans le *Nuncius* en minutes et secondes toutes les distances, évaluées d'abord en diamètres de Jupiter, s'est servi de la relation sensiblement abaissée: diam. $4^{is} = 2$ min. Je n'ai pu trouver aucune indication des raisons qui ont conduit GALILÉE à admettre cette dernière valeur.

Voici quelques cas dans lesquels GALILÉE a opéré cette réduction dans la relation du *Nuncius*.

Dans l'observation du 15 janvier hora 3, *il diametro di Jove* du *Journal*, désigné comme la mesure de chacune des trois distances, est traduit dans le *Nuncius* par: „aequalia omnia et *duorum minutorum*", et: „*il doppio incirca*" [del diam.] par *minutis quatuor*; dans celle de quatre heures plus tard le „*dimidium diametri*" du journal est devenu: „*minuto uno*", $1\frac{1}{2}$ *diam:* trois minutes.

Dans l'observation du 18 janvier les distances de 9 et 11 minutes *a centro Jovis* du *Journal* sont devenues 8 et 10 minutes *a Jove* dans le *Nuncius*. Le demi-diamètre est donc compté pour une minute. La même valeur pour la différence des distances a centro (*Journal*) et a Jove (*Nuncius*) se retrouve dans l'observation du 21 janvier. Nous ne rencontrons qu'une seule exception, due probablement à quelque inadvertance. Pour l'observation du 22 janvier le journal porte: „*a stella orientali ad centrum Jovis erat* 6′, *a centro* 4 *ad stellam occidentaliorem* 7′." Dans le *Nuncius* GALILÉE écrivit: „*a stella orientali ad Jovem minutorum* 5 *fuit intervallum*"; ici encore le demi-diamètre de Jupiter est compté pour une minute, mais pour l'étoile occidentale le *Nuncius* a conservé la distance 7′. GALILÉE a donc oublié de retrancher dans sa réduction le demi-diamètre de différence entre les distances a centro et a margine. Remarquons que dans l'observation du 23 janvier où, dans le journal, il n'est pas question du diamètre de Jupiter on rencontre une incompatibilité pareille. Tandis que le journal porte: „*orientalior distabat a sequenti* 7′, *sequens ab occidentali* 6′. *Jupiter medium locum inter has obtinebat eratque aliquantulum vicinior mediae*", le *Nuncius* fait la distance de l'étoile la plus orientale à la suivante égale à 7′, de la seconde orientale à Jupiter égale à 2′40″ et de l'occidentale égale à 3′20″. La somme des distances à gauche et à droite des bords de Jupiter est donc égale à 6′, puisque dans le *Nuncius* les distances sont comptées à partir du

bord de la planète. Comme elle est la même que la distance des Satellites entre eux, le diamètre de Jupiter serait nul. La réduction à la distance prise du bord a donc encore été négligée, sans doute par inadvertance. On pourrait encore regarder comme une exception l'observation du 13 janvier, où, de la configuration de trois Satellites rapprochés placés en triangle, il est dit „*lo spazio delle tre occidentali non era maggiore del diametro „di Jove*". Dans le *Nuncius* il est dit de ces étoiles: „*reliquarum et Jovis intercapedines erant singulae unius minuti*". Mais il est possible que Galilée a voulu exprimer dans le journal que la dimension linéaire du triangle stellaire entier dans le sens de la longitude équivalait au diamètre de Jupiter; sans cela les dimensions données dans le journal, lorsque Galilée estimait encore ce diamètre à 1 minutes, seraient excessives.

Pour cette observation, la première dans laquelle Galilée vit distinctement quatre Satellites, l'heure manque tant dans le journal que dans le *Nuncius*, mais si l'on adopte comme la plus probable la moyenne des heures d'observation de la nuit précédente (12 janvier hora 1 et hora 3) on trouve pour les distances, comptées du centre de la planète:

I	II	III	IV
+ 2,76	— 2,60	+ 2,14	+ 3,56.

Les trois Satellites I, III, IV devaient donc en effet se présenter en groupe serré à l'occident, dont celui du milieu, le Satellite I, avec un angle de position géocentrique de 247°, approchant de sa plus grande élongation devait paraître élevé au-dessus des Satellites II et III, lesquels à 16°,5 et 15°,6 de leur périgée avaient presque leur maximum de latitude méridionale. Galilée a donc très bien discerné et décrit la configuration de la constellation, mais ses mesures étaient très inexactes. Elles le seraient à l'extrême s'il fallait prendre à la lettre la description du journal et attribuer aux intervalles des Satellites I, III et IV les valeurs de 4 minutes au lieu d'environ 27 et 35 secondes qu'ils atteignirent en effet.

Il n'y a rien d'étonnant à ce que Galilée, comme nous venons de le voir, n'ait pas réussi dans ses premières observations à trouver pour le diamètre de Jupiter des valeurs quelque peu concordantes. Estimant, comme après lui l'ont admis naïvement ses contemporains et même plusieurs des écrivains modernes, que la lunette hollandaise était d'autant plus parfaite qu'elle offrait un plus fort grossissement, il s'est servi dans ses premières observations d'une lunette grossissant plus de 30 fois.

Nous avons déjà fait observer [1]) que pour un système de deux verres, nécessairement sujets aux aberrations sphérique et chromatique, la recherche d'un grossissement élevé, bien loin de perfectionner l'instrument, ou de le rendre plus *exact* comme s'exprimait GALILÉE, devait nécessairement éloigner du but en rendant les images diffuses. Avec la lunette soi-disant „excellens" [2]), l'image de Jupiter a dû paraître mal définie et de grandeur différente selon l'intensité de la lumière, c'est-à-dire l'état du ciel et même selon la précision de la mise au point, très difficile à réaliser exactement. Que les images dans la grande lunette de GALILÉE étaient très mauvaises, cela ne peut être mis en doute. C'est encore le journal manuscrit de GALILÉE qui le prouve. En effet, la relation de l'observation du 15 janvier, citée plus haut, se termine dans le journal ainsi: „*Post vero aliam horam 2 mediae stellulae erant adhuc viciniores „adeo ut inter ipsas spacium mediaret ipsa minima minus, scilicet circa „minuta secunda 40″.*" Dans le *Sidereus Nuncius* il est dit seulement „*Post vero aliam horam duae stellulae adhuc viciniores erant, aberant „enim min. sc. vix* 30″ *tantum.*"

En notant dans son journal ce qu'il venait de voir, GALILÉE estima donc le diamètre *d'un des Satellites* à plus de 40 secondes, c'est-à-dire à plus du sixième du diamètre de Jupiter, puisque le jour suivant encore il compte le diamètre pour 4 minutes. En rédigeant le *Nuncius*, lorsqu'il réduit le diamètre de Jupiter à deux minutes, celui de l'intervalle des deux Satellites devient 30″; l'intervalle égal au diamètre du Satellite est maintenant le quart du diamètre de la planète.

Dans une lunette moderne grossissant 30 fois les Satellites doivent se présenter comme des points lumineux sans grandeur apparente appréciable. En réalité, les diamètres des Satellites varient entre $^1/_{42}$ et $^1/_{25}$ de celui de Jupiter c. à d. entre 0″,9 et 1″,5 à la distance moyenne.

Il faut donc conclure que la grande lunette de GALILÉE donna d'un point lumineux une image diffuse égale au sixième ou au quart de l'image également diffuse de Jupiter même, cette dernière étant estimée à 4 ou à 2 minutes d'arc. Dans le cas le plus favorable (30 secondes) son estimation du 15 janvier porterait le diamètre du Satellite à une valeur environ 25 fois trop élevée.

MARIUS a éprouvé les mêmes difficultés dans l'évaluation de la gran-

[1]) *Galilée et Marius* p. 131 (17).

[2]) *Sidereus Nuncius.* Ed. Naz. III p. 80, l. 1.

deur apparente des Satellites. Tandisqu'il estime à une minute d'arc le diamètre de Jupiter, il évalue à $^1/_{12}$, c'est-à-dire à 5″ le diamètre des Satellites I, II et IV, à $^1/_8 = 7''5$ celui du Satellite III, valeurs près de cinq fois trop élevées pour les trois premières comme pour le dernier. Comme Galilée, sans désigner expressément le Satellite, obtient une valeur 25 fois trop forte, il est clair que la définition des images dans la lunette de Marius était beaucoup meilleure que dans celle de Galilée, ce qui nous semble détruire complètement la fable, déjà insoutenable au point de vue de la théorie optique, que Galilée, en augmentant le grossissement jusqu'à 30 fois a perfectionné la lunette. Ainsi tombe l'assertion, dénuée de toute preuve, que Galilée disposait d'un instrument plus approprié aux observations astronomiques que celui de Marius.

Les données que Marius a fournies dans son livre sur les grandeurs apparentes des Satellites ont encore procuré à M. Klug (p. 483) l'occasion d'une nouvelle accusation contre Marius, celle d'inventer des observations qu'il n'avait pas faites. Après avait confronté les valeurs de Marius avec les mesures modernes, M. Klug conclut que les premières sont de 4 à 8 fois trop grandes. Puis il dit: „Une conséquence „de ces valeurs devrait être que, par exemple, les Satellites I et II, dès „qu'ils coïncident avec des latitudes de même sens, devraient se cou„vrir dans la plus grande partie de l'orbite du Satellite I. On voit „aussi par ceci que Marius se prononce sur les objets de mesure „les plus difficiles sans avoir une base expérimentale quelconque pour „ses données."

On ne peut, à ce qu'il nous semble, attribuer à ces paroles d'autre sens que le raisonnement suivant. Si Marius avait réellement observé les satellites I et II, de manière qu'il leur pouvait attribuer un diamètre de $^1/_{12}$ de Jupiter, c'est-à-dire de 5″, alors, dans le cas où les deux Satellites coïncideraient, lorsque tous les deux se trouvent soit dans la partie supérieure soit dans la partie inférieure de leur orbite (mit gleichgerichteten Breiten), les deux Satellites continueraient à se couvrir dans la plus grande partie de l'orbite du Satellite I. Ceci n'arrivant pas, Marius a affirmé une chose impossible et prouvé par là qu'il n'a pas observé du tout.

Il est évident que pour établir que Marius n'a pas vu ce qu'il décrit, il faut prouver que la coïncidence prolongée des deux Satellites qui en résulterait dans un cas particulier rend impossible que Marius *ait vu* ce qu'il décrit.

Or, dans ce que Marius dit, il n'y a rien d'improbable. M. Klug

prétend-il que MARIUS, en mesurant à l'œil les diamètres des Satellites a choisi le moment où ils coïncidaient exactement? Et s'il les a mesurés lorsqu'ils étaient séparés, est-ce qu'il n'a pas pu trouver les valeurs indiquées, parce que, dans un cas très singulier, il se présenterait un phénomène également très singulier, mais qui en soi n'a rien d'impossible? Quant à ce dernier fait même, il est à peine besoin d'ajouter que le cas singulier auquel se rapporte la remarque de M. KLUG se trouve incomplètement défini. Il faut que non seulement les deux Satellites coïncident dans les parties analogues de leurs orbites, mais qu'ils se trouvent de plus au point où leurs vitesses apparentes sont égales. En désignant par e_1 et e_2 leurs élongations, il faut que pour les deux Satellites on ait en même temps: $e_1 = e_2$ et $\frac{de_1}{dt} = \frac{de_2}{dt}$. Pour les Satellites I et II, dont les mouvements diurnes dans leurs orbites se rapportent à très peu près comme 1 à 2 (203,4 et 101,3) et les rayons des orbites comme 5,9 à 9,5, on trouve qu'une coïncidence à vitesse apparente égale correspond aux angles φ parcourus depuis l'apogée: $\varphi_1 = \pm 13°,20$ et $\varphi_2 = \pm 25°,10$ dans la partie supérieure de leurs orbites, ou aux mêmes élongations dans la partie inférieure.

Dans ces conditions le phénomène extraordinaire qui prouverait selon M. KLUG, que MARIUS invente frauduleusement des observations qu'il n'a pas faites, revient à ceci que, si, par hasard, les cas exceptionnels cités se réalisaient, les Satellites pendant tout au plus 4 heures consécutives sembleraient se couvrir, car deux heures avant leur conjonction leur distance serait déjà d'un neuvième et deux heures après la conjonction de plus d'un septième du diamètre de Jupiter, ce qui dépasse déjà le $^1/_{12}$ de MARIUS.

Il va sans dire qu'une coïncidence dans plus de la moitié de l'orbite du Satellite I, dont parle M. KLUG, est impossible parce que, dans tout au plus un quart de révolution à partir de l'élongation zéro du Satellite I, les deux Satellites coïncidants obtiennent des mouvements contraires et doivent se séparer rapidement.

Assurément M. KLUG n'a pas remarqué dans le journal photographié l'endroit auquel nous avons emprunté l'évaluation faite par GALILÉE du diamètre d'un Satellite, de laquelle l'erreur est 6 à 3 fois plus considérable que celle de MARIUS. Il se serait bien gardé de porter, avec sa remarquable logique, contre MARIUS une accusation qui s'appliquerait à fortiori à GALILÉE.

Galilée semble avoir reconnu les défauts de son „excellent" instrument. Dans ses recherches ultérieures il s'est servi de lunettes dont le pouvoir amplifiant ne dépassait pas 20 fois. C'est avec un tel instrument, semblable à ceux dont se servait Marius, que Galilée obtint successivement, probablement par suite de différentes évaluations du pouvoir amplifiant (Alberi V, p. 83, p. 399, p. 176) à 20, 19 et 18 fois, pour le diamètre de Jupiter des valeurs qui, réduites à la distance moyenne de la Terre, fournissent les résultats: 30″, 40″, 33″,3 et 16″,2.

Il résulte de notre discussion:

1°. que Galilée, ainsi qu'il l'avoue dans le *Discorso*, a, en effet, pendant ses observations, estimé les distances en les comparant aux dimensions de Jupiter;

2°. qu'il a successivement attribué au diamètre de la planète des valeurs de quatre, de trois minutes ou un peu moins, et finalement, lors de la rédaction du *Nuncius*, de deux minutes, sans que les documents connus jusqu'ici nous permettent de connaître les raisons qui l'ont conduit à admettre cette dernière valeur;

3°. que Galilée, employant une lunette de moindre grossissement, mais de meilleure définition des images, a obtenu des valeurs de 30″ à 46″ secondes sans toutefois les publier;

4°. qu'il a dans le *Nuncius* compté les distances depuis le bord de Jupiter [1]);

5°. qu'il a systématiquement évité de faire connaître au public ses évaluations du diamètre de Jupiter et a laissé ignorer aux lecteurs du *Nuncius* de quelle manière il est arrivé aux mesures des élongations des Satellites.

Sa réticence à ce dernier sujet s'explique par le fait que, dans les premières pages du *Nuncius*, il avait décrit une méthode, par laquelle on pourrait prendre les distances sans erreur d'une ou de deux minutes. Il croyait avoir démontré cette méthode par des considérations d'optique. Mais Galilée, quoique écrivant six ans après la publication de l'*Astro-*

[1]) Alberi, dans sa publication des observations posthumes de Galilée T. V. p. 67, les fait précéder de cet avis: „In omnibus, quae sequuntur, observationibus, distantiae calculatae sunt per semidiametros Jovis, et captae a circumferentia ipsius usque ad finem Martii an. 1612: deinde a centro." Cette règle est la même que celle que nous venons de démêler de la comparaison du Journal avec le *Nuncius*. Je n'ai rencontré chez Alberi aucune indication, d'où il l'a prise. Il est d'autant plus étrange qu'il a fait disparaître les premières parties du journal qui la font connaître.

nomine pars optica de KEPLER, n'avait pas la moindre notion de cette partie de la physique, spécialement de la manière dont se forment les images [1]). Il ne se doutait pas que le champ de la lunette hollandaise n'est nullement proportionnel à l'ouverture de l'objectif et que même, pour le grossissement qu'il employait, une réduction de l'ouverture au quart de sa valeur linéaire, au seizième de sa surface, ne change pas dans une mesure appréciable l'étendue du champ. Toutefois il avait annoncé cette méthode, de diminuer dans un rapport donné le champ au moyen de diaphragmes appliqués à l'objectif, comme son invention, et affirmé avant de communiquer ses observations chiffrées, que les distances avaient été mesurées au moyen de cette méthode même (superius explicata ratione).

[1]) C'est ce que nous avons fait voir dans notre article *Galilée et Marius*, en reproduisant le passage du *Nuncius* où GALILÉE donne sa théorie de la lunette.

Si l'on confronte la partie du texte que nous avons citée avec la partie correspondante de l'édition d'ALBERI, on s'étonnera peut-être qu'elles sont diamétralement opposées. Dans notre texte, GALILÉE fait partir de l'œil les rayons lumineux qui, en se réfractant dans l'instrument atteignent l'objet; c'était l'opinion des anciens, déclarée absurde par KEPLER. Dans le texte d'ALBERI c'est tout le contraire, les rayons de la lumière émaneraient d'après GALILÉE de l'objet et après avoir traversé l'instrument viendraient frapper l'œil. Il suffit de comparer avec le texte d'ALBERI le texte authentique rétabli par l'Edizione Nazionale, Tome III p. 61, conforme d'ailleurs avec la phototypie du manuscrit original publié dans le même volume, pour reconnaître que le premier est falsifié. Le texte authentique a: „Oculus inspicientis esto E. Radii, dum nulla in tubo adessent Perspicilla, „**ad objectum FG secundum lineas rectas ECF, EDG** ferrentur, sed appositis „Perspicillis, ferantur secundum lineas *ECH*, *EDI*, coarctantur enim, et qui „prius liberi ad *FG* objectum dirigebantur partem tantummodo *HI* comprehen„dunt." ALBERI, qui dit avoir confronté le texte de l'édition de Padoue avec „les „MSS. Palatini", parmi lesquels il y a deux autographes du *Sidereus Nuncius*, fait imprimer: „*Oculus inspicientis esto E. Radii, dum nulla in Tubo adessent Perspilla*, **ab objecto FG ad oculum E secundum lineas rectas FCE, GDE** *ferrentur; sed appositis Perspicillis ferentur secundum lineas refractas HCE, IDE: coarctantur enim et qui prius liberi ad objectum FG dirigebantur, partem tantummodo HS comprehendunt.*" La dernière partie de la phrase a échappé à la mutilation de l'original, entreprise pour cacher l'ignorance compromettante d'un auteur, qui avait déclaré dans sa lettre au Sénat de Venise avoir inventé un instrument tiré des spéculations les plus profondes de l'optique, la science que depuis dix sept-ans il professait à la Faculté de Padoue, et qui, dans le *Sidereus Nuncius*, prétend avoir seulement entendu parler de l'instrument et, après avoir recherché les raisons et inventé les moyens pour réaliser un organe pareil, *se basant sur les lois de la réfraction*, avait enfin réussi.

Ce n'est que dans le *Discorso* de 1612 qu'il avoue avoir obtenu les distances au jugé à l'œil, par comparaison avec le diamètre de Jupiter.

Il est clair qu'un plagiaire, ne connaissant pas ces détails, ignorés jusqu'ici, de la manière dont Galilée était arrivé aux données numériques du *Nuncius*, manquait la clef qui seule pouvait permettre de les déchiffrer. S'il avait cru que Galilée estimait le diamètre de Jupiter à une minute et comptait les distances depuis le bord, il aurait été complètement dérouté. Il lui eût été impossible d'en tirer aucune valeur approchée ni des rayons des orbites, ni des temps de révolution, ni surtout des époques.

Mais en réalité les erreurs résultant d'une fausse interprétation des observations de Galilée auraient dû être considérablement augmentées par les erreurs propres à ces observations mêmes. Pour le montrer j'ai calculé, au moyen des Tables de M. Berberich, les positions géocentriques des Satellites aux heures indiquées dans le *Nuncius*. [1])

Au moyen des rapports 2,97, 4,73, 7,54, 13,27 entre les rayons des orbites et le diamètre de Jupiter, j'ai déduit les distances exprimées en cette mesure jusqu' au centre de Jupiter, puis comparé ces dernières d'après l'estimation que Galilée donne dans le *Nuncius*, en suivant la règle ci-dessus citée savoir: pour trouver les distances des Satellites au centre de la planète il faut ajouter au nombre des minutes du *Nuncius* une unité, puis diviser par 2.

Les différences entre les deux systèmes de valeurs sont très considérables. Toutes les élongations du *Nuncius* sont beaucoup trop petites. Malgré la grande diversité des écarts on remarque cependant quelque analogie dans les quatre Satellites. Comme le nombre des observations est assez grand, j'ai recherché s'il y a quelque constance dans le rapport q entre les distances calculées d'après les Tables de M. Berberich et celles d'après le *Nuncius*, voici ce que j'ai trouvé.

Pour le Satellite I les valeurs q varient de 1,44 à 3.33. La moyenne de 29 valeurs est **2,18** [2]).

[1]) Ces heures sont données à compter du coucher du soleil. Pour les réduire en temps civil de Paris, je me suis servi des Tables du Bureau des Longitudes (1906, p. 6 et 196), qui donnent l'heure du coucher à Paris et la réduction à une latitude donnée (45° 23′) et de la différence en longitude entre Paris et Padoue: 38 minutes de temps.

[2]) Lorsque, pour le même soir à des heures différentes, un Satellite n'est indiqué qu'avec une seule élongation, l'observation n'est comptée que pour une seule.

Pour le Satellite II, 39 observations donnent une moyenne de **2,09**, avec les valeurs entrêmes: 1,30 et 3,19.

Pour le Satellite III, 44 observations donnent en moyenne **2,15**, avec les valeurs extrêmes de 1,20 et 4,62.

Le Satellite IV, par 44 observations, variant entre 1,36 et 3,50, fournit la moyenne **2,14**.

On peut en conclure que Galilée, en comparant les distances au diamètre de Jupiter, qu'il compte pour deux minutes, les a en moyenne estimées plus de deux fois trop faibles, comme si sa lunette lui eut donné une image de plus de 4 minutes, ainsi qu'il l'avait jugé dans son observation du 16 janvier.

Que l'image de Jupiter se trouvait en effet démesurément grossie par sa mauvaise définition explique les cas nombreux où Galilée a manqué de distinguer les Satellites dans le voisinage de la planète, quoiqu'ils ne pussent se trouver eclipsés par l'ombre de Jupiter. Pendant les observations consignées dans le *Nuncius*, Galilée n'a jamais vu un Satellite à moins d'un diamètre de Jupiter du bord de la planète. Le 24 et le 31 janvier il a manqué de voir le Satellite I à 1,6, le 12 février le Satellite II à 1,5 diam. du bord. Le 12 janvier Galilée rapporte avoir vu le Satellite I presque en contact avec Jupiter, lorsqu'en réalité il en était éloigné de 1,8 diamètre.

C'est donc une fable que M. Klug ajoute à tant d'autres concernant Galilée, lorsqu' il prétend que Galilée avait par sa lunette le moyen de déterminer la position des Satellites dans le voisinage immédiat de Jupiter [1]), c'est-à-dire lorsqu'ils présentent la plus grande vitesse apparente et par cela même les meilleures conditions pour trouver leurs temps périodiques. Galilée n'avait à ce sujet aucun avantage sur Marius. De fait il a, pour arriver à dresser des Tables servant d'Ephémérides, ce qui ne lui a jamais reussi, recouru à l'emploi de lunettes de moindre grossissement, analogues à celles dont se servait Marius. La différence entre les deux observateurs consiste en ceci, que Galilée se vante d'avoir pu obtenir une précision de très peu de secondes, tandis que Marius, plus expérimenté et plus modeste, lorsqu'il fut le premier à publier des Tables, reconnaissait franchement qu'il n'avait pu

[1]) Dans la note de la page 472, il dit même que Galilée a observé les conjonctions des Satellites avec Jupiter. Que M. Klug, parmi les centaines d'observations de Galilée qu'il dit avoir examinées, veuille nous citer un seul cas où Galilée a vu une entrée ou une sortie d'un Satellite sur le disque de la planète.

fournir qu'une première approximation, que d'autres après lui pourront perfectionner.

En disant que les constellations du *Nuncius* lui ont été utiles quant à l'orientalité et l'occidentalité des Satellites, il ne peut avoir eu d'autre intention que de reconnaître que les observations de GALILÉE lui ont facilité un premier débrouillement, mais il ajoute de plein droit: „licet mihi non undique exactae videantur." [1]) Les observations du *Nuncius*, en effet, ne pouvaient conduire à aucune valeur quelque peu approchée, ni des rayons des orbites, ni des temps de révolution. [2])

III. LES CONSTELLATIONS DES SATELLITES DE JUPITER PRÉDITES PAR GALILÉE DANS SES LETTRES SOLAIRES. [3])

Les cinq planches, que GALILÉE a ajoutées à la troisième de ses lettres sur les taches du soleil, contiennent 115 constellations des Satellites de Jupiter, calculées pour chacune des dates du 1er mars au 8 mai 1613. Pour quelques-uns de ces jours, dans des cas qui ont paru à GALILÉE particulièrement instructifs, il a figuré les constellations pour plus d'une heure de la même nuit. Les temps y sont indiqués ordinairement en heures entières, exceptionnellement en demi-heures à partir du coucher du soleil. Dans l'Avis qui accompagne les planches, GALILÉE fait remarquer que l'on ne verra pas toujours les Satellites de la manière figurée dans la planche, parce que ceux qui se trouvent dans le voisinage immédiat de Jupiter ne pourront être distingués facilement

[1]) Dans une des constellations, celle du 12 février hora 0,40, GALILÉE marqua, tant dans son Journal que dans le *Nuncius*, deux Satellites à l'orient et deux à l'occident de Jupiter, tandis que, en réalité, il s'en trouvait un à l'orient et trois à l'occident, dont un, à un demi-diamètre du bord de Jupiter, a dû lui échapper.

Dans le journal on trouve dessiné en marge une constellation avec un Satellite à gauche et deux à gauche de Jupiter; mais il est visible, par la forme des petites croix qui indiquent les Satellites, que la figure n'a pas été dessinée par GALILÉE. Je suppose qu'elle a été ajoutée par ALBERI.

[2]) Au chapitre IV, après avoir examiné les observations de MARIUS, nous dirons quelques mots sur les remarquables considérations que M. KLUG présente à ce sujet.

[3]) Istoria e Demostrationi intorno alle Macchie solari etc. in Roma, Appresso Giacomo Mascardi. MDCXIII.

Edizione Nazionale T.V. p. 241.

qu'avec une vue très perçante et au moyen d'un instrument très excellent, à cause des fortes radiations de la planète. Il cite quelques cas dans lesquels les Satellites n'apparaîtront que quelque temps plus tard, lorsque le Satellite se sera éloigné un peu plus de la planète.

Il donne encore quelques détails sur les éclipses des Satellites dans l'ombre de Jupiter, où il semblerait qu'il se rend compte de l'influence sur l'apparence de ces phénomènes, exercée par l'effet des déviations en latitude que présentent les Satellites. Il dit que dans l'année courante et les deux suivantes on n'aura pas de grandes éclipses ce qu'il aurait pu attribuer à la valeur élevée qu'atteindrait la latitude de Jupiter. Mais alors il faudrait admettre aussi qu'il n'a pas pris la peine de vérifier par le calcul si sa prédiction pouvait être exacte, ce qui dans la supposition indiquée ne saurait être le cas. Une latitude au maximum de 1°,3 ne suffirait pas pour délivrer le Satellite IV de l'ombre de Jupiter, lorsqu'il passerait son aphélie dans un orbite parallèle à l'écliptique.

La question qui nous occupera plus spécialement est celle de savoir si, avant mars 1612, Galilée a supposé un rapport défini entre les déviations en latitude des Satellites de Jupiter et la latitude de la planète même, conformément au parallélisme supposé des orbites avec l'écliptique qu'il admit encore en 1622 dans sa diatribe contre Marius, hypothèse proposée sept ans auparavant dans les *Disquisitiones Mathematicae*, publiées sous le nom de Locher, par Scheiner, que Galilée néglige de citer.

Si Galilée a réellement voulu exprimer cette hypothèse, il faut que les déviations en hauteur des Satellites, très visiblement marquées sur les planches, satisfassent aux trois conditions suivantes:

1. Comme Jupiter avait une latitude boréale, les déviations des Satellites doivent être *boréales* lorsque ceux-ci se trouvent dans la partie inférieure, *australes* lorsqu'il se trouvent dans la partie supérieure de leurs orbites;

2. Elles doivent être proportionnelles aux cosinus des angles Φ parcourus par le Satellite depuis son apogée;

3. A angles Φ égaux, les déviations des Satellites doivent être proportionnelles aux rayons de leurs orbites, c'est-à-dire approximativement dans les rapports 12,25, 19,00, 29,75 et 50,75 pour les Satellites I, II, III, IV, lesquels, comme nous le verrons tantôt, sont ceux des planches.

Pour constater si Galilée a eu quelque idée d'une loi, qui ferait dépendre les déviations des Satellites de la latitude de Jupiter lui-même,

la vérification de ces trois conditions offre une valeur beaucoup plus décisive pour les deux dernières que pour la première.

D'abord, parce que dans les dernières il s'agit du témoignage précis et irrécusable de chiffres. Puis aussi parce que, à l'époque où Galilée calculait ses pronostics, l'apparence des variations en latitude était tellement prononcée que, pour un observateur un peu attentif, elle devait être manifeste non seulement quant à l'existence du phénomène, mais aussi quant à la liaison évidente entre le sens de la déviation et celui du mouvement du Satellite. Que la première des trois conditions se trouvait visiblement remplie, se lisait pour ainsi dire directement chaque soir dans leur disposition.

Le journal des observations des Satellites, retrouvé en 1843 par Alberi, fait voir que Galilée, pendant l'hiver de 1612 à 1613, s'est occupé très activement des observations des Satellites. Pendant les nuits du 6, 7 et 8 décembre il mesurait et reportait dans son journal 6, 2 et 5 constellations, les 13, 14 et 15 décembre : 4, 3 et 3.

Les observations de ces dates devaient nécessairement remplir un rôle prépondérant dans les pronostics qu'il se proposait de publier. Or, les déviations commençaient, justement à cette époque, à croître rapidement. Dans les soirées citées il les notait six fois. Le 27 décembre il vit passer, l'un au-dessus de l'autre, deux Satellites se mouvant en sens contraire. Le 21 janvier 1613, les Satellites IV et I, passant en sens contraire l'un au-dessus de l'autre, montrèrent une telle différence en latitude que Galilée put évaluer leur distance aux trois quarts d'une minute, à peu près autant que le diamètre de Jupiter. Il eût été bien étonnant que Galilée, en dessinant les constellations pour les mois prochains, n'eût pas tenu compte du fait qu'il avait observé dans les mois précédents.

Mais si Galilée avait réellement conscience d'une liaison de cause à effet de ces apparences avec la latitude boréale de Jupiter, il serait tout aussi étonnant que, dans son Avis, il n'en eût fait aucune mention et ne se fût pas assuré la priorité de cette découverte.

En dehors d'une décision peremptoire de cette question, les configurations du système des Satellites peuvent fournir des renseignements sur les données dont Galilée disposait relativement aux valeurs apparentes des rayons des quatre orbites, et aux temps de révolution.

Il est vrai que ces données nous sont déjà connues par la publication des documents retrouvés par Alberi. Pour construire les prédictions

des constellations futures, GALILÉE, peu enclin aux calculs, se servait d'un instrument qu'il appelait Jovilabium, décrit et figuré par ALBERI. C'était une espèce de cadran, sur lequel étaient tracés quatre cercles concentriques, représentant les quatre orbites en juste proportion, avec un cinquième plus petit, occupant le milieu, et figurant la planète Jupiter. De ces cercles l'extérieur, celui de l'orbite du Satellite IV, était divisé en degrés. Un diamètre horizontal coupant tous les cercles était divisé en parties égales au demi-diamètre de Jupiter. Après avoir déterminé d'après l'époque, le temps de révolution et la valeur de la parallaxe, la position jovicentrique d'un Satellite à partir de l'apogée, on n'avait qu'à abaisser du point d'intersection de l'orbite avec le rayon tiré vers la division indiquée sur le cercle gradué une perpendiculaire sur le diamètre divisé, pour lire immédiatement sur ce dernier l'élongation apparente du Satellite en demi-diamètres de Jupiter à la date et l'heure voulues. Cette dernière opération se trouvait encore facilitée par un système de perpendiculaires tracées sur le cadran et correspondant aux 48 divisions du diamètre du cercle gradué.

On pourrait donc aussi lire immédiatement sur le dessin du Jovilabium reproduit par ALBERI, les rayons des orbites dont s'est servi GALILÉE. Dans l'article „*Galilée et Marius*" de OUDEMANS et moi nous avons déjà remarqué qu'en analysant les planches des Lettres solaires on doit retrouver les valeurs du Jovilabium; mais j'ai estimé utile de le vérifier. En premier lieu la reproduction des dessins de GALILÉE a pu être défectueuse. Il est clair que, si la réduction à la moitié des dimensions du Jovilabium, laquelle a été pratiquée dans les planches, a laissé à désirer, il faut tenir compte des erreurs pour retrouver les angles de position des Satellites correspondant à leur position dans les constellations reproduites.

Mais de plus, il est évident que nous avons dû procéder de cette manière, parce qu'il ne s'agit pas de connaître les éléments de calcul dont s'est servi GALILÉE, mais bien plutôt ceux qu'un plagiaire aurait pu déduire des planches, comme, d'après M. KLUG, l'aurait fait SIMON MARIUS, malgré sa protestation sous serment qu'il ne possédait rien et n'avait même rien lu de GALILÉE en dehors du *Sidereus Nuncius*.

GALILÉE prétend, sans donner aucune preuve, que MARIUS lui a pris ses périodes de révolution; M. KLUG ajoute que MARIUS a emprunté aux planches des Lettres solaires la théorie de GALILÉE sur les mouvements en latitude.

Nous avons déja démontré dans l'Introduction que M. Klug, en niant que Marius, pour expliquer les déviations en latitude, a proposé une théorie tout à fait différente de celle de Galilée, nie l'évidence. Pour le moment, nous nous plaçons au point de vue de M. Klug et nous allons rechercher ce que Marius, se servant de méthodes à lui manifestement connues, puisqu'il les avait appliquées dans son travail, aurait trouvé s'il se fût appliqué à tirer des planches de Galilée tout ce qui pouvait lui servir pour s'approprier frauduleusement le travail de ce dernier.

Pour tirer quelque conclusion des constellations figurées dans les planches de Galilée, il faut d'abord rechercher leur échelle de grandeur, sur laquelle Galilée ne donne aucune indication dans son Avis.

A cet effet, il faut tâcher de trouver les constellations dans lesquelles chacun des Satellites présente sa plus grande élongation.

J'ai rencontré pour les différents Satellites les constellations suivantes, qui m'ont paru indiquer des maxima suffisamment sûrs.

I.			II.		
4 mars	h. 4	12,25	1er mars	h. 5	19,00
12 avril	h. 1	12,25	3 „	h. 3	19,00
		12,25			19,00

III.			IV.		
6 mars	h. 3	29,50	1er mars	h. 3	50,50
13 „	h. 3,20	30,25	9 „	h. 3	50,50
17 „	h. 2	30,00	17 „	h. 2	51,00
20 „	h. 4,30	29,50	3 avril	h. 1	51,00
31 „	h. 1	29,50	11 „	h. 1	50,75
		29,75			50,75

Ces mesures ont été faites au moyen d'une règle divisée en demi-millimètres. J'ai cru pouvoir encore estimer les demi-divisions, c'est-à-dire les quarts de millimètres. Il eût été oiseux de vouloir pousser plus loin l'exactitude, vu la forme irrégulière des points qui figurent les Satellites et celle du cercle qui représente la planète Jupiter. Pour celle-ci le diamètre est presque exactement de 4 millimètres.

J'ai contrôlé ces mesures en les répétant sur les planches reproduites

par M. Favaro dans l'Edizione Nationale. Ces dernières donnent en général des dimensions un peu plus faibles, savoir:

$$\text{I} = 12{,}00,\ \text{II} = 18{,}62,\ \text{III} = 29{,}00,\ \text{IV} = 49{,}50.$$

Les rapports des valeurs individuelles dans les deux évaluations peuvent être considérées comme identiques, savoir:

I. 1,021, II. 1,021, III. 1,026, IV. 1,025.

Pour le diamètre de Jupiter je n'ai pas pu constater une différence mesurable. La différence entre les deux systèmes de valeurs est tellement faible que l'on pourrait même l'attribuer à une légère extension du papier de l'exemplaire un peu fatigué de l'édition originale que j'ai eu à ma disposition.

Les planches des *Lettere solari* donnent ainsi pour les rayons des orbites des Satellites en demi-diamètres de la planète les valeurs approchées.

$$r_1 = 6{,}1,\quad r_2 = 9{,}5,\quad r_3 = 14{,}9\quad r_4 = 25{,}4.$$

Le Jovilabium dont Galilée s'est servi pour construire les constellations, tel qu'il a été reproduit par Alberi, fournit les valeurs:

$$r_1 = 5{,}5\quad r_2 = 9\quad r_3 = 14\quad r_4 = 24$$

C'est au moyen des valeurs mesurées sur la planche de l'édition originale que nous avons calculé les positions jovicentriques des Satellites, c'est-à-dire les angles parcourus depuis l'apogée temporaire, *ab auge vera*, comme dit Galilée, lequel pour le calcul des temps de révolution doit être réduit à l'angle parcouru depuis l'aphélie temporaire (*ab auge media*) au moyen de la valeur de la parallaxe ou de la prostaphérèse, signalée pour la première fois par Marius dans son Prognosticon pour l'année 1613, mais reconnue aussi en 1612 par Galilée, comme il paraît par ses écrits posthumes.

Je me suis borné au calcul de la première des cinq planches de Galilée, pleinement suffisante pour notre but. Les résultats des mesures se trouvent réunis dans le tableau suivant, dont la première colonne indique les numéros des constellations et les dates, les suivantes deux valeurs de l'élongation des Satellites figurées sur la planche savoir: I*a* II*a* etc. celles de l'édition originale et I*b*, II*b* etc. celles de l'Edizione Nazionale. Les élongations sont prises positivement lorsqu'elles sont occidentales.

Dans la dernière ligne du tableau nous avons pris la somme des élongations, sans avoir égard aux signes, d'après les deux systèmes de mesure.

Tableau I.

Mesures des Constellations de la Planche 1 de Galilée.

Date.					I *a*	I *b*	II *a*	II *b*	III *a*	III *b*	IV *a*	IV *b*
1	1er	mars	hora	3	+ 3,00	+ 3,00	+ 17,75	+ 17,25	— 6,50	— 6,50	50,50	+ 49,50
2	„	„	„	4	+ 3,25	+ 3,25	+ 18,50	+ 18,25	— 7,25	— 7,00	+ 50,50	— 19,25
3	„	„	„	5	+ 4,75	+ 4,75	+ 19,00	+ 18,25	— 9,00	— 8,75	+ 50,25	+ 49,00
4	2	„	„	3	— 6,50	6,25	couvert	couvert	— 26,25	— 25,50	+ 15,25	+ 14,25
5	3	„	„	3	+ 9,25	+ 9,00	— 19,00	— 18,50	— 26,75	— 26,00	+ 33,00	+ 32,25
6	4	„	„	3	— 12,25	— 11,75	+ 5,50	+ 5,50	— 8,00	— 8,00	+ 18,00	+ 17,50
7	5	„	„	2	+ 11,75	+ 11,50	+ 17,00	+ 16,75	+ 16,50	+ 16,00	couvert	couvert
8	„	„	„	3	+ 11,50	+ 11,00	+ 16,50	+ 16,00	+ 17,25	+ 17,00	„	„
9	6	„	„	1½	— 10,00	— 9,75	— 10,00	— 9,75	— 28,50	+ 27,75	— 19,50	— 19,00
10	„	„	„	3	— 9,00	8,75	— 12,00	— 11,50	+ 29,50	— 28,75	— 20,00	— 19,50
11	7	„	„	2	+ 7,00	+ 6,50	— 13,25	— 13,00	+ 21,25	— 20,50	— 31,00	— 33,25
12	8	„	„	2	couvert	couvert	+ 15,25	+ 15,00	couvert	couvert	— 15,00	— 14,00
13	9	„	„	3	— 5,75	— 5,50	+ 3,50	+ 3,50	— 25,00	— 24,50	— 50,50	— 19,50
14	10	„	„	3	+ 8,50	+ 8,25	— 18,75	— 18,50	— 27,75	— 27,25	— 16,50	— 45,50
15	11	„	„	2	— 10,25	— 10,25	couvert	couvert	— 11,75	— 11,25	— 37,75	— 37,00
16	12	„	„	2	+ 11,25	+ 10,75	+ 18,50	+ 17,75	+ 13,00	+ 12,75	— 23,25	— 22,75
17	„	„	„	3	+ 11,00	+ 10,50	+ 17,50	+ 17,00	+ 14,00	+ 14,00	— 22,00	— 21,75
18	„	„	„	4	+ 10,50	+ 10,00	+ 17,00	+ 16,75	+ 14,50	+ 14,25	— 22,00	— 21,75
19	„	„	„	5	+ 9,75	+ 9,50	+ 15,50	+ 15,50	+ 15,50	+ 15,50	— 20,25	— 20,50
			Somme.....		155,25	150,25	254,50	248,75	318,25	311,25	588,25	576,25

Il résulte de ce tableau que les dimensions de la planche de l'Edizione Nationale sont constamment un peu plus faibles que celles de l'édition originale. On trouve pour les rapports d'après les chiffres de la dernière ligne:

I. 1,033, II. 1,023, III. 1,023, IV. 1,021.

La moyenne 1,023 coïncide avec celle que nous avons trouvée pour les rayons des orbites.

Au moyen des données du Tableau I nous avons composé le suivant, qui donne pour chaque Satellite les angles de position φ calculés d'après la formule:

$$\varphi = arc\left(sin = \frac{e}{r}\right)$$

où e désigne l'élongation d'après le Tableau I, r les rayons des orbites en millimètres de notre règle, savoir:

$$r_1 = 12{,}25 \quad r_2 = 19{,}00 \quad r_3 = 29{,}75 \quad r_4 = 50{,}75,$$

puis, la latitude λ correspondante calculée d'après la formule

$$\lambda = r\ sin\ 1^\circ\ 18'\ cos\ \varphi,$$

1° 18′ étant la latitude boréale de Jupiter à l'époque considérée.

A côté de la latitude calculée d'après la théorie, que M. Klug attribue à Galilée, nous avons inscrit celle que nous avons mesurée sur la planche de l'édition orginale.

Dans ces dernières mesures nous avons procédé de la manière la plus rigoureuse en prenant la distance du centre des petits ronds noirs, qui représentent les Satellites, à la ligne horizontale qui, dans chaque constellation figurée, passe par le centre de Jupiter et laquelle sans aucun doute, dans l'intention de Galilée, a dû indiquer l'écliptique. Il y a plusieurs cas où les petits ronds noirs touchent cette ligne soit en dessus, soit en dessous, et pourraient par conséquent être considérés comme indiquant une coïncidence parfaite. Mais, pour ne laisser aucune place à l'arbitraire, nous avons inscrit la distance jusqu'au quart de millimètre, chaque fois qu'elle nous a semblé dépasser 1/8 de mm.

Si l'on compare les valeurs de l'angle φ du Tableau II aux valeurs que l'on obtiendrait en partant de la première constellation comme époque et en additionnant successivement les mouvements diurnes et horaires, admis par Galilée, on rencontre des divergences assez fortes,

Tableau II.

Mouvement en latitude des Satellites selon la Planche I de Galilée.

N°.	I			II			III			IV		
	Φ	λ calc.	λ pl.	Φ	λ calc.	λ pl.	Φ	λ calc.	λ pl.	Φ	λ calc.	λ pl.
1	191	+ 0,27	0,25	249°	+ 0,14	— 0,25	13°	— 0,65	— 0,50	276°	— 0,12	0,00
2	195	+ 0,27	0,00	257	+ 0,10	0,00	14	— 0,65	— 0,50	276	— 0,12	0,00
3	203	+ 0,26	0,00	270	0,00	0,00	18	— 0,65	— 0,50	280	— 0,16	0,00
4	32	— 0,24	0,00	couv.	—	—	62	— 0,32	— 0,50	297	— 0,52	0,00
5	229	+ 0,18	+ 0,25	90	0,00	+ 0,25	116	+ 0,30	+ 0,50	319	— 0,87	0,00
6	90	0,00	+ 0,25	197	+ 0,41	+ 1,00	164	+ 0,65	+ 0,75	339	— 1,07	0,00
7	286	— 0,08	0,00	298	— 0,20	— 0,25	214	+ 0,56	+ 0,75	couv.	—	—
8	290	— 0,10	+ 0,25	300	— 0,22	— 0,25	215	+ 0,55	+ 0,75	couv.	—	—
9	125	+ 0,15	0,00	32	— 0,36	— 0,25	253	+ 0,20	0,00	23	— 1,06	— 0,50
10	133	+ 0,17	0,00	39	— 0,33	— 0,75	263	+ 0,08	+ 0,50	23	— 1,06	— 1,00
11	325	— 0,23	0,00	136	+ 0,31	0,00	316	— 0,18	0,50	12	— 0,85	0,00
12	couv.	—	—	233	+ 0,26	0,00	couv.	—	—	63	— 0,52	0,00
13	28	— 0,24	0,00	349	— 0,41	— 0,75	57	— 0,37	0,00	84	— 0,12	+ 0,25
14	228	+ 0,20	+ 0,50	81	— 0,06	+ 0,50	111	+ 0,21	0,00	114	+ 0,16	0,00
15	57	— 0,15	0,00	couv.	—	—	157	+ 0,62	+ 0,75	132	+ 0,77	+ 0,25
16	293	— 0,11	0,00	283	— 0,10	+ 0,25	206	+ 0,61	+ 1,50	153	+ 1,02	— 1,00
17	296	— 0,12	0,00	293	— 0,17	0,00	208	+ 0,50	+ 1,25	155	+ 1,03	+ 1,25
18	301	— 0,14	0,00	297	— 0,20	0,00	209	+ 0,59	+ 1,50	155	+ 1,04	+ 1,25
19	307	— 0,16	+ 0,50	306	— 0,25	— 0,75	211	+ 0,58	+ 1,00	157	+ 1,06	0,00

dépassant considérablement les erreurs possibles de nos mesures. On en pourra remarquer une dans les trois premières valeurs du Satellite I, qui fournissent un mouvement de 1° pour la première et de 8° pour la seconde heure de la soirée.

De ce même Satellite les positions dans les constellations n°s 5, 14 et 15 sont en erreur de 1,7, 1,8 et 1,6 mm.; du Satellite II les n°s 12 et 16 de 1,5 et 1 mm, du Satellite III les n°s 9 et 14 de 0,8 mm. et du Satellite IV le n° 12 de 2,5 mm.

L'exécution des dessins a donc laissé beaucoup à désirer, mais ces erreurs n'ont qu'une influence insensible sur les latitudes calculées d'après l'hypothèse que M. Klug attribue à Galilée, et ne changent rien à la conclusion que fournit immédiatement l'inspection de notre Tableau, savoir: *qu'il n'est pas possible de déduire une telle théorie des planches de* Galilée.

En effet, dans les 19 constellations:

Le Satellite I, une fois couvert, en donne 12 sans déviation, tandis que au moins 9 devaient être sensibles; 2 déviations sont indiquées dans le sens contraire de celle que demande la théorie (n°s 8 et 19); une (n° 6) est sensible qui devait être nulle et 2 (n°s 14 et 19) sont presque doubles du maximum $0^{mm},28$ que pouvait présenter ce Satellite.

Le Satellite II, deux fois couvert, manque 4 fois de déviation lorsque celle-ci devait être marquée (n°s 11, 12, 17, 18) et présente 3 fois une déviation contraire (n°s 1, 14 et 16), une fois (n° 5) une déviation dans le maximum d'élongation, lorsqu'elle devait être nulle, et 3 fois une déviation dépassant considérablement le maximum possible de 0,43 (n°s 6, 10 et 19).

Le Satellite III manque trois fois de latitude lorsqu'il en devait présenter; dont une devrait atteindre presque ou dépasser le maximum du Satellite I (n°s 9, 13 et 14); il dépasse son maximum possible de 0,67 huit fois (n°s 6, 7, 8, 15, 16, 17, 18, 19), dont trois déviations sont trop fortes de plus du double.

Le Satellite IV, deux fois couvert, lequel, en raison de son grand orbite, devait présenter les plus grandes latitudes en manque dans la majorité des cas, 10 sur 17; une fois même (n° 19) lorsque son écart devait être $1\frac{1}{2}$ fois plus grand que le maximum du Satellite III.

C'est surtout la disproportion entre les déviations des Satellites III et IV qui rend impossible d'admettre que Galilée ait voulu exprimer

dans ses planches une loi qui rend proportionelles aux rayons des orbites des déviations correspondant aux mêmes valeurs de ϕ.

Un coup d'œil jeté sur les planches suivantes suffit pour reconnaître qu'elles doivent conduire à la même conclusion et qu'elles ne permettent d'en tirer une autre loi que celle qui fait dépendre le sens des déviations du sens du mouvement.

Particulièrement probantes sous ce rapport sont les 4 constellations du 2 avril aux heures 1, 2, 3 et 4, parce qu'elles sont expressément citées par Galilée dans son Avis, comme représentant une éclipse du Satellite I. Ce Satellite, figurant dans la première constellation, ainsi que l'indique le texte de l'Avis, comme le plus proche de Jupiter, y obtient une latitude australe de 1,5 mm., plus de cinq fois plus grande que le maximum qu'il peut obtenir, tandis que le Satellite IV est figuré avec une déviation trois fois plus faible.

Le Satellite I apparaît encore ainsi dans la seconde constellation. Un lecteur qui n'analyse pas très attentivement les deux constellations suivantes, n'aura pas l'idée que le Satellite qui y présente une latitude du même ordre de grandeur est subitement devenu le Satellite IV, tandis que le Satellite I a perdu dans une heure toute sa latitude. C'est pourtant le cas, comme l'indiquent les chiffres de Galilée communiqués par Alberi (Tome V p. 226). [1])

Les constellations du 24 avril sont donc particulièrement propres à ôter toute suspicion d'une loi que Galilée aurait voulu exprimer en dessinant les écarts en latitude.

Remarquons de plus que dans les notes posthumes de Galilée on rencontre de nombreuses vérifications relatives aux élongations prédites par ses planches, mais pas une seule qui se rapporte aux écarts en latitude.

Nous concluons que l'assertion de M. Klug, d'après laquelle Marius aurait pu déduire des planches des *Lettere Solari* une loi qui expliquerait d'après Galilée les écarts en latitude, se trouve complètement démentie par les planches mêmes.

Nous avons déjà montré dans l'Introduction que la théorie que Marius s'est formée sur ce phénomène est essentiellement différente de celle

[1]) Il y a chez Alberi, dans la première des constellations, celle de hora 1, une erreur probablement typographique dans l'élongation orientale du Satellite I. Le chiffre 2,6 doit être 2,0.

que M. Klug attribue sans aucune raison à Galilée, lorsque celui-ci écrivit ses Lettres solaires.

Il nous reste à examiner jusqu'à quel point un observateur et calculateur exercé comme Marius aurait pu tirer des planches de Galilée des données sur les périodes de révolution des Satellites et sur leurs époques.

Marius qui, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, pour déduire des constellations observées par lui dans la lunette les constantes des orbites, se servait de la même méthode que nous avons suivie pour déchiffrer les planches de Galilée, aurait dû facilement trouver pour la constellation du 1er mars, hora 3, les valeurs de

I	II	III	IV
194°	249°	13°	276°.

Sachant combien il importe pour l'exactitude du calcul de prendre pour base une période aussi longue que possible, il aurait dû comparer ces valeurs à celles déduites de la dernière constellation de Galilée, celle du 8 mai, hora 4, qui lui aurait donné dans le même ordre:

22°	304°	212°	311°

La première de ces époques étant onze jours avant, la dernière 58 jours après la conjonction du 12 mars 1613, il aurait appliqué, d'après la *Tabula æquationum* qu'il imprime dans son *Mundus Jovialis*, aux angles parcourus une correction déductive de 1° 49′ + 8°, 13′ soit 10 degrés.

Les angles parcourus par les Satellites du 1er mars au 8 mai étant ainsi pour les Satellites:

I	38 révolutions	+ 178°	=	13858°
II	19 „	+ 45°	=	6885°
III	9 „	+ 189°	=	3429°
IV	4 „	+ 25°	=	1465°,

et le temps écoulé, si l'on a égard au retardement du coucher du soleil à partir duquel Galilée compte les heures, étant de 1634 heures, Marius aurait dû trouver les temps de révolution:

T_1 =	42,461 heures	=	1^j	18^h	27^m	40^s
T_2 =	85,466 „	=	3	13	27	50
T_3 =	171,60 „	=	7	3	36	6
T_4 =	401,65 „	=	16	17	39	7

S'il s'agissait ici de données obtenues directement par l'observation, on ne pourrait pousser l'exactitude du calcul jusqu'aux secondes, parce que l'intervalle du temps n'est donné qu'en heures entières et qu'une variation d'une demi-heure change les temps de révolution de 50, 100, 216 et 160 secondes. Mais notre calcul a eu pour but de retrouver les valeurs employées par Galilée dans la confection de ses dessins représentant les constellations aux heures *exactement déterminées*. La précision de nos mesures, ne dépasse certainement pas le quart de millimètre, mais, comme nous l'avons montré, elle est plus que suffisante pour répondre à celle des planches. Cette dernière laisse beaucoup à désirer et c'est pour cette raison que l'on ne peut guère compter sur les secondes des valeurs obtenues.

Admettons que Marius ne se fût pas rendu compte de cette considération, il faut alors que Marius, voulant emprunter frauduleusement à Galilée, comme l'affirme M. Klug, les temps de révolution, ait adopté les chiffres de notre tableau, les secondes comprises. Or, on trouve dans le *Mundus Jovialis* (première édition) les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} T_1 &= 1^j\ 18^h\ 28^m\ 30^s \\ T_2 &= 3\ \ 13\ \ 18\ \ 0 \\ T_3 &= 7\ \ 3\ \ 56\ \ 34 \\ T_4 &= 16\ \ 18\ \ 9\ \ 15 \text{ (environ)} \end{aligned}$$

tandis que les vraies valeurs moyennes calculées pour les années 1610-1614 par M. Berberich sont

$$\begin{aligned} T_1 &= 1^j\ 18^h\ 28^m\ 34^s \\ T_2 &= 3\ \ 13\ \ 17\ \ 42 \\ T_3 &= 7\ \ 3\ \ 58\ \ 48 \\ T_4 &= 16\ \ 18\ \ 0'\ \ 0'' \end{aligned}$$

Les erreurs sont les suivantes:

Lettere solari — Berberich :	-54^s	$+608^\circ$	-1362^s	-1253^s
Marius — Berberich :	-4	$+18^\circ$	-134	$+555$

Marius en s'appliquant, d'après l'hypothèse de M. Klug, à tirer des ouvrages de Galilée, même de ceux qu'il affirme sous serment n'avoir jamais vus, tout ce qui lui a semblé pouvoir servir à son plagiat, aurait donc eu le talent extraordinaire d'amender dans une mesure considérable ce que ces ouvrages auraient pu lui fournir, en élevant l'ap-

proximation à plus du décuple pour les trois premiers Satellites, à plus du double pour le quatrième.

Certainement les erreurs des temps de révolution tirés des *Lettere solari* sont beaucoup plus grandes que celles des valeurs que GALILÉE possédait réellement, mais GALILÉE n'a jamais publié ces dernières ; il les a tenu cachées, peut être pour s'assurer le monopole d'une méthode qu'il méditait pour la détermination de la longitude sur mer, à laquelle elles devaient servir. Elles ne nous sont devenu connues qu'en 1843 par la publication D'ALBERI. Pour soutenir l'accusation de M. KLUG il faut donc prouver que MARIUS a eu à Anspach quelque moyen secret d'étudier les papiers de GALILÉE à Florence, ou de prévoir ce que l'on publierait 230 ans plus tard.

Nous verrons dans le chapitre suivant que MARIUS, pour trouver les temps de révolution des Satellites de Jupiter, possédait des moyens plus efficaces dans ses propres observations, lesquelles M. KLUG a cru permis de négliger, ou de soustraire à l'attention de ses lecteurs.

Quant aux époques, les valeurs admises par MARIUS diffèrent tellement de celles de GALILÉE calculées d'après les planches der *Lettere solari* lesquelles sont plus exactes, qu'il n'est pas possible d'admettre que MARIUS les ait empruntées à ces planches. MARIUS eût du trouver, comme nous, pour les époques au 1er mars 1613, hora 3 ab occasu (20h temps civil à Paris) d'après la première constellation des *Lettere Solari* les valeurs suivantes, arrondies en degrés entiers :

I	II	III	IV
194°	249°	13°	276°,

tandisque les Tables de la première edition du *Mundus Joviales* donnent :

214°	267°	17°	273°

et les Tables de M. Berberich :

192°	254°	15°	275°.

A Suivre.

OCCULTATIONS ET ÉCLIPSES MUTUELLES DES SATELLITES DE JUPITER EN 1908,

PAR

J. A. C. OUDEMANS. [1])

Première partie. — Occultations.

Dans les numéros 3846 et 3857 des *Astronomische Nachrichten* on trouve deux communications, l'une de M. Ph. Fauth, à Landstuhl, du 8 décembre 1902, avec des postcriptums du 29 décembre 1902 et du 14 janvier 1903, l'autre de M. A. A. Nijland, à Utrecht, du 27 février 1903, relatives à des observations qu'ils ont faites d'occultations d'un Satellite de Jupiter par un autre. (1) et (2).

M. Fauth rappelle en outre que Houzeau, dans son *Vademecum*, p. 666, rapporte deux observations pareilles, (3), et que M. Stanley Williams vit, le 27 mars 1885 à $12^h\ 20^m$, le 3e Satellite passer à côté du 1er, de telle manière que les deux Satellites formaient ensemble une figure en forme de poire. (4).

Les Satellites de Jupiter décrivent des orbites dont les inclinaisons sur le plan de l'équateur de Jupiter sont très faibles. Laplace admettait

---

[1]) Dans le travail suivant les quatre Satellites de Jupiter, connus depuis 1608, sont représentés respectivement par I, II, III et IV, suivant leurs distances moyennes à la planète. Les indices *r* et *e* servent à indiquer que le Satellite est *rapproché* ou *éloigné*, c. à d. est situé dans la moitié de l'orbite qui est rapprochée ou éloignée de nous. Les longitudes jovicentriques, tout comme les amplitudes géocentriques, sont comptées en „signes" et en „degrés", les dernières à partir de la conjonction géocentrique supérieure; l'élongation orientale, indiquée par *ee*, se produit pour une amplitude de 3^s, l'élongation occidentale *ew* pour une amplitude de 9^s.

Pour ne pas troubler le texte par des détails spéciaux, ceux-ci seront donnés en notes à la fin.

pour chaque Satellite un plan fixe, avec lequel le plan de l'orbite de ce Satellite fait un angle de position fixe, tandis que l'intersection des deux plans, la ligne des nœuds, présente un mouvement lent et rétrograde. Les plans fixes font des angles de quelques minutes seulement avec le plan de l'équateur de Jupiter, et ils coupent le plan de l'orbite de Jupiter suivant la même ligne des nœuds que le plan de l'équateur. Comme inclinaison de ce plan sur le plan de l'orbite de Jupiter on trouve 3°4', et la longitude du nœud ascendant, donc aussi celle des plans fixes, est actuellement de $315°\,^1/_2$ environ.

Pour trouver approximativement les époques où, pour un observateur placé sur la terre, des occultations d'un Satellite par un autre sont possibles, on doit connaître la longitude du nœud ascendant et l'inclinaison du plan fixe moyen par rapport au plan de l'orbite terrestre. Si le prolongement du plan fixe moyen passe par la terre, on pourra observer des occultations d'un Satellite par un autre, et, comme la durée de révolution de Jupiter autour du soleil est presque de 12 années, ces époques seront distantes d'environ six ans; et tantôt Jupiter passera par le nœud ascendant, tantôt par le nœud descendant d'un plan parallèle au plan fixe moyen et passant par le centre du soleil.

Puisqu'on a observé en 1902 des occultations d'un Satellite par un autre, on peut s'attendre à ce que ces phénomènes se reproduisent en 1908. (5).

Il m'a paru intéressant de calculer d'avance ces conjonctions de deux Satellites, dans la partie la plus favorable de 1908, afin de faciliter leur observation. L'ancienne méthode, qui consistait à déterminer l'orbite des Satellites par une mesure répétée de leurs distances à la planète et de leurs situations par rapport à celle-ci, a notamment été remplacée par la mesure (de préférence à l'aide d'un héliomètre) des distances entre les Satellites eux-mêmes, et de leur situation relative. (6). Pour des observations qui ne s'étendent pas sur une période trop longue, on peut admettre que les durées de révolution des Satellites sont connues avec précision; de sorte que, pour une période déterminée, chaque orbite comporte six inconnues, du moins si l'on fait abstraction de la troisième loi de Kepler, et que l'on considère donc comme inconnu le grand axe de l'orbite de chaque Satellite. Si l'on mesure la distance entre la planète et le Satellite, en grandeur et en direction, ainsi que Bessel l'a fait à Koningsbergen de 1834 à 1839 et Schur à Göttingue de 1874 à 1880, on obtient deux équations entre six inconnues; mais,

si l'on mesure la distance entre deux Satellites et leur situation relative, le nombre des inconnues contenues dans ces équations est doublé, donc = 12. Et si toutes les combinaisons sont prises deux à deux, comme l'ont fait MM. Gill et Finlay à l'observatoire du Cap, on obtient en tout un grand nombre d'équations à 24 inconnues, qu'il faudra résoudre par la méthode des moindres carrés. Si l'on y ajoute encore les masses des Satellites, que l'on ne peut déduire que des perturbations que chaque Satellite produit dans le mouvement des autres, ainsi que l'aplatissement de Jupiter, qui est déterminé par la rétrogradation des lignes des nœuds sur les plans fixes, le nombre des inconnues est porté à 29. (7).

La considération, qu'une observation d'occultation, ou même d'une conjonction sans occultation, peut être faite par quiconque dispose d'une lunette de grandeur suffisante, et qu'une pareille observation fournit tout aussi bien deux équations entre les inconnues, (du moins si l'on a soin de mesurer au micromètre à réticule la différence de latitude dans le cas où l'occultation n'est pas centrale, ou s'il y a simplement passage), m'a engagé à prédire, pour la portion la plus favorable de 1908, les instants de ces conjonctions. Si l'expérience apprend que ce travail préparatoire donne de bons résultats, on pourra songer à le poursuivre pour une nouvelle époque propice, p. ex. 1914.

Comme instant où le plan fixe moyen passe par le centre de la terre je trouve (voir note 5) le 8 juillet 1908 à $19^h,6$, temps moyen de Greenwich.

Il est fort regrettable que cet instant soit peu favorable à l'observation, car ce jour-là Jupiter traverse le méridien de Greenwich à $2^h\,10^m$ t. m., avec une déclinaison nord de 16°48′,5, alors que le soleil a 22°30′ de déclinaison nord. Pour Utrecht je trouve p. ex., pour le 8 juillet, en tenant compte de la réfraction atmosphérique:

Coucher du bord supérieur du soleil à $8^h\,20^m$ t. m.
„ de Jupiter „ 9 44 , 5 „

La probabilité que l'on pourra observer une des occulations calculées est donc faible pour Utrecht. Pour des observatoires situés plus au sud cette probabilité est plus grande; ainsi par le Cap on a:

Coucher du soleil à $5^h\ 5^m$ t. m.
„ de Jupiter à 7 25 „

Ainsi, le 8 juillet 1908 Jupiter se couche à Utrecht $1^h 24^m,5$ après le soleil, et au Cap $2^h 20^m$.

Nous avons calculé toutes les conjonctions qui, dans la période du 31 mai au 20 juillet 1908, auront lieu entre les Satellites de Jupiter, et nous allons décrire brièvement la voie que nous avons suivie pour les trouver.

On trouve dans le *Nautical Almanac* les *conjonctions supérieures géocentriques*, aux pages 504 et 505 de celui pour l'année 1908.

Nous avons commencé par faire, pour chaque période de deux révolutions géocentriques synodiques de I (environ 85 heures), un tracé à une certaine échelle des quatre orbites des Satellites, considérées comme circulaires, et sur ces orbites nous avons indiqué (à l'aide de secteurs en carton divisés), de deux en deux heures, les situations des Satellites: nous y avons en outre marqué le nombre d'heures écoulées depuis le point pris comme origine. Nous avons négligé l'équation du centre etc.

L'échelle à laquelle nous avons fait ce dessin était de 1 mm. pour 4″. Les rayons des orbites étaient donc: pour I 27,9 mm., pour II 44,15 mm.; pour III 70,9 mm. et pour IV 124,7 mm.

La direction de l'origine de I vers le centre de tous les cercles donnait la direction de la terre, et il était donc facile de chercher, pour chacune des six combinaisons possibles des Satellites deux à deux, les nombres horaires égaux pour lesquels la droite de jonction est parallèle à cette direction; ces droites de jonction doivent donner à peu près les instants où, pour un observateur placé sur terre, l'un des Satellites est en conjonction avec l'autre. Le défaut de parallélisme, dans la nature, des droites qui relient la terre aux Satellites de Jupiter, en divers points de leurs orbites, peut parfaitement être négligé. La planche VII annexée à ce travail est la reproduction de notre dessin, à la moitié de sa grandeur primitive; elle peut servir pour la période du 12 juillet 1908 à $11^h 2^m,3$ t. m. de Greenwich jusque 85 heures plus tard. Les lignes pointillées représentent les droites de jonction des points homologues, et indiquent donc chacune une conjonction de deux Satellites Les temps correspondants, dans notre figure:

$6^h,2$:	IV_e	recouvert par	III_r
21 ,8 :	IV_e	„	„	I_r
25 ,0 :	IV_e	„	„	II_r
35 ,0 :	I_e	„	„	II_r

$66^h,25$: II_e recouvert par I_r
71 ,0 : III_e „ „ I_r,

ont été ajoutés à l'heure que l'on doit considérer comme origine dans la figure; le *N. Almanac* fait connaître cette heure en temps moyen de Greenwich; les instants des conjonctions ont été transformés ensuite, par addition de $12^h 9^m 21^s$, en temps civil de Paris, et puis nous avons calculé, à l'aide des *Tables éclipliques* de Damoiseau, 2e partie, (8), pour les deux Satellites l'élongation et la latitude, exprimés en rayons de Jupiter. Quand les élongations ne s'accordaient pas parfaitement, un petit calcul faisait connaître le moment de la conjonction avec une précision plus grande. (9).

Le plus souvent la correction de l'heure admise était très faible lorsque les deux Satellites semblaient aller à la rencontre l'un de l'autre (ce qui est le cas lorsque l'un des Satellites est éloigné et l'autre rapproché); mais, quand ils se dirigeaient dans le même sens (ce qui a lieu quand ils sont tous deux éloignés, ou tous deux rapprochés, de sorte que l'un doit rejoindre l'autre), la correction atteignait parfois une heure ou plus. Chaque fois que, dans n'importe quel cas, la correction dépassait 20 minutes, le calcul fut refait avec l'instant corrigé.

On trouvera plus loin le tableau des résultats obtenus. Du 31 mai au 19 juillet, donc en 50 jours, il y a 72 conjonctions; il est regrettable que pour un même endroit il n'y en ait qu'un petit nombre qui soient visibles. On ne pourra notamment observer que ces conjonctions-là qui tombent entre le coucher du soleil et celui de Jupiter. Pour Utrecht on a, en temps moyen:

	Coucher du bord supérieur du soleil	Coucher de Jupiter	Différence
1er juin 1908	$8^h 10^m$	$11^h 54^m$	$3^h 44^m$
11 „	8 20,5	11 19	2 58,5
21 „	8 24	10 44	2 20
1 juillet	8 24	10 9	1 45
11 „	8 18	9 34	1 16
21 „	8 7,5	8 59	0 51,5

Pour le Cap de Bonne Espérance:

1 juin 1908	$4^h 59^m$	$9^h 18^m$	$4^h 19^m$
11 „	4 57,5	8 46,5	3 49
21 „	4 58	8 16	3 18
1 juillet	5 2	7 46	2 44
11 „	5 6,5	7 16	2 9,5
21 „	5 13	6 47	1 34.

On voit donc que pour un observatoire de l'hémisphère sud les circonstances sont notablement plus avantageuses que dans l'hémisphère nord.

Mainte occultation ne sera pas visible parce que l'élongation commune des Satellites sera plus petite que l'unité, c. à d. plus petite que le rayon de Jupiter. Tel est le cas pour les numéros 8, 9, 12, 13, 15, 16, 20, 23, 39 et 64. Dans les huit premiers cas et dans le dernier la planète est située entre les deux Satellites, ce que fait que la conjonction ne sera pas à observer. Pour le n°. 39 les deux Satellites, I et IV, sont cachés derrière la planète [1]).

Dans d'autres conjonctions il peut arriver qu'un des deux Satellites soit situé dans l'ombre de la planète, et ainsi invisible pour nous. Ainsi:

n°. 21, le 13 juin	à	$9^h 28^m$	t. m. Grw.,	II	est	éclipsé
n°. 31, „ 20 „	„	12 51	„ „	II	„	„
n°. 51, „ 4 juillet	„	18 15,7	„ „	II	„	„
n°. 65, „ 13 „	„	12 3	„ „	IV	„	„

Si le Satellite éclipsé au moment d'une conjonction est celui qui est le plus rapproché de la terre, il pourrait se projeter, de notre point de vue, complètement ou partiellement, comme une tache noire sur l'autre Satellite; mais ce cas ne s'est pas présenté dans nos calculs.

Il est possible que la dernière des conjonctions que nous venons de mentionner soit encore visible, car d'après le *N. Almanac* la sortie de

---

[1]) Le *Nautical Almanac* donne pour cette nuit (temps moyen de Greenwich)

IV.	Occultation.	Disparition	à $10^h 19^m$
I.	Occultation.	Disparition	à 11 20
I.	Eclipse.	Réapparition	à 14 26 27^s
IV.	Occultation.	Réapparition	à 15 13
IV.	Eclipse.	Disparition	à 18 5 6
IV.	Eclipse.	Réapparition	à 22 52 2.

IV du cône d'ombre de la planète a lieu à $12^h 7^m 15^s$ t. m. de Greenwich, et les prédictions des éclipses de ce Satellite sont parfois inexactes de quelques minutes. Quelques minutes après, savoir à $12^h 16^m$ suivant le N. *Almanac*, le Satellite II passe devant le disque de Jupiter.

Notes.

(1) Voici un abrégé de l'article de M. Fauth:

— — — Ausser den in Houzeau, Vademecum p. 666 aufgeführten Beobachtungen, (voir la note 3 ci-après), kenne ich aus neuerer Zeit nur einen Fall: Stanley Williams sah am 27 März 1885 an einem 7 cm. Rohre mit 102-facher Vergrösserung um $12^h 20^m$ den III Trabanten vor dem I, wobei beide ein birnformiges Objekt bildeten.

— — — In fünf Wochen konnte ich drei Bedeckungen verfolgen, wobei anzunehmen ist, dass mir durch schlechte Witterung etwa 10 andere Gelegenheiten entgangen sein mögen, unter denen sicher einige Bedeckungen vorkommen. Nach meiner Erfahrung können Konjunktionen der Jupitermonde unter sich weit genauer beobachtet werden als Bedeckungen durch Jupiter oder Vorübergänge vor ihm. Somit möchten die hier angegebenen Beispiele Anlass bieten, in den späteren Oppositionen Jupiters den durchaus nicht seltenen Bedeckungen oder wenigstens Berührungen und sehr nahen Konjunktionen der Trabanten unter sich mehr Aufmerksamkeit zu schenken, zumal schon kleine Instrumente zur Wahrnehmung der Phasen einer event. Bedeckung genügen. Die Beobachtungen der letzten Zeit sind:

1. Oct. 7; II bedeckt I; die S. Ränder berühren sich und I ragt im N. etwas hervor. Konj. um $9^h 16^m$ M. E. Z. [1])

2. Oct. 23; II bedeckt III so, dass die Mitte von II nördlich am N. Rand von III vorbeigeht; Konjunktion um $8^h 7^m 3^s,5$.

3. Nov. 10; III bedeckt I so, dass der S. Rand von III die Mitte von I streift (gute Luft); Konjunktion um $7^h 33^m 20^s$.

Instrument: 178 mm., Vergrösserung 178 fach.

Landstuhl, 1902 Dez. 8.

---

[1]) C. à d. Heure de l'Europe centrale, en avance de 1^h sur l'heure de Greenwich.

P.S. vom 29 Dezember. Am Abend des 24 Dezember gelang nochmals die Beobachtung einer Bedeckung, bei welcher I über IV hinwegzog. Aus je fünf vor- und nachher notierten Zeitmomenten folgen als Mittelwerte $6^h 24^m,25$, $24^m.625$, $24^m,50$, $24^m.625$ und $24^m.50$. Die Konjunktion fand also statt $6^h 24^m 30^s$.

Der Uhrstand war um 3^h mit dem Zeitsignal verglichen worden. IV Stand ein wenig südlicher als I, vielleicht um ein Viertel seines Durchmessers. Die weitaus interessantere Konjunktion zwischen II und IV am 25 Dezember blieb gegenstandslos, weil IV um etwa zwei Durchmesser vorüberging.

P.S. vom 14 Januar (1903). Heute Abend, am 14 Januar, bewegte sich der Trabant III über II hinweg. Die sehr schlechte Luft liess nur den ersten Kontakt auf etwa $6^h 2^m$ feststellen. Um $6^h 18^m$ mochten sich beide Komponenten so weit getrennt haben, dass dies in einem weniger schlechten Augenblick bemerkt wurde; um $6^h 32^m$, dem nächsten blickweisen Auftauchen der beiden Lichtpunkte, waren diese um etwa einen Durchmesser von einander entfernt. Die Bedeckung war fast genau central. PH. F.

(2) M. NIJLAND écrivit dans le n°. 3857 des *Astronomische Nachrichten*:

— — — Am 15 Juli 1902 fand eine Konjunktion der Trabanten II und III statt, welche ich bei guter Luft am Refraktor (Brennweite 319 cm. Oeffnung 26 cm.) mit Vergr. 248 beobachten konnte. Es wurde III nahezu central von II bedeckt. Einige Minuten lang blieb eine feine schwarze Linie zwischen den beiden Scheibchen sichtbar, welche um $14^h 10^m 11^s$ M.Z. Utrecht verschwand und um $14^h 20^m 31^s$ wieder erschien; die Konjunktion musz also um $14^h 15^m 21^s$ stattgefunden haben. Dass diese Trennungslinie vor und nach der Konjunktion immer dieselbe Richtung hatte, und zwar scheinbar senkrecht auf der Bahnebene der Trabanten stand, mag als Beweis dafür gelten, dass der Vorübergang wirklich nahezu central gewesen ist. Dann lässt sich aber aus dieser centralen Passage die Summe der Durchmesser der Monde II und III mit erheblicher Genauigkeit bestimmen.

Nehme ich für die mittlere Entfernung $\varDelta = \infty$ die Halbmesser der Bahnen gleich $177'',8$ und $283'',6$, so finde ich für die relative Bewegung von II und III zur Beobachtungszeit $13'',86$ pro Stunde. Aus der beobachteten Zeitdauer von $10^m 20^s = 0^h 172$ folgt dann für die

Summe der beiden Durchmesser, 2″,38. Wird (siehe die Angaben von Douglass, *Astr. Nachr.* 3500) für das Verhältniss der Durchmesser von II und III $^4/_{11}$ angenommen, so finde ich in vorzüglichen Uebereinstimmung mit den a. a. O. genannten Werten für den Durchmesser von II 0″,87 und vom III 1″,51 (in mittl. Entf.).

Utrecht, 1903 Febr. 27. A. A. Nijland.

Remarque. Comme les instants observés nous ont conduits à un résultat quelque peu différent de celui de M. Nijland, cet auteur nous a communiqué, sur notre demande, la reduction de cette observation; nous avons reconnu ainsi que, pour trouver les amplitudes, il avait combiné la „Geocentric superior conjunction" antérieure avec le „transit', subséquent, dont l'„Ingress" et l'„Egress" fournissent la conjonction inférieure. Mais il s'était glissé une petite erreur dans la réduction; après correction, nous avons obtenu pour le mouvement relatif des deux Satellites 13″,786, et pour la somme des diamètres 2″,374. Puis nous avons à remarquer que le rapport 4 à 11 doit être évidemment 4 à 7; telle était en effet l'intention de l'auteur; nous obtenons ainsi pour les diamètres 0″,863 et 1″,511, ce qui est presque parfaitement d'accord avec le résultat de M. Nijland. Comme on a pris pour les rayons des orbites les valeurs qui conviennent pour une distance moyenne de Jupiter au soleil, ces valeurs n'ont pas besoin de réduction.

(3) On lit dans Houzeau, *Vademecum* (Bruxelles. 1882), p. 666:

On rapporte une occultation du Satellite II par le Satellite III, observée à Sommerfeld, près de Leipzig, par C. Arnoldt, le 1er novembre 1693, (Whiston, *The longitude discovered by the eclipses*, 8°, London, 1738), et une autre du Satellite IV, également par le IIIe, vue par Luthmer à Hanovre, le 30 octobre 1822 (*Nature*, 4°, London; vol. XVII, 1877, p. 148).

1e Remarque. L'opuscule de Whiston existe à la bibliothèque de l'Université d'Utrecht, sous la rubrique *P*, 8vo, et le numéro 602. Nous l'avons feuilleté à diverses reprises, sans y trouver mentionnée l'observation de C. Arnoldt. Il est vrai qu'au § XVIII l'auteur recommande l'observation des occultations mutuelles des Satellites; il remarque que quand, dans une pareille occultation, les deux Satellites marchent à l'encontre l'un de l'autre, le mouvement relatif est „doublé"; il mentionne cette plainte de Derham [1]), que l'observation de ces occul-

[1]) Dans Poggendorff's *Biographisches Wörterbuch*, I, 353, on ne trouve pas, sous le nom de W. Derham, où cette plainte a été exprimée; on ne trouve pas même où il a écrit sur l'observation des Satellites de Jupiter.

tations est rendue fort difficile par la forte lumière de Jupiter; il fait observer que, dans un même espace de temps, le nombre des occultations doit être une et demie fois le nombre des éclipses; il dit en outre que LYNN est le premier qui ait proposé, dans les *Philosophical Transactions* n°. 393, de faire servir ces conjonctions, qui bien souvent se laissent observer avec une précision de moins d'une demi-minute [1]), à la détermination des longitudes, mais je n'ai pas pu y découvrir une observation, ni une prédiction, d'une occultation.

Il est à peine besoin de démontrer que les conjonctions, visibles aux endroits dont on veut déterminer la longitude, sont trop peu nombreuses pour qu'elles puissent servir utilement à ce but. Et au point de vue de la précision des observations elles sont dépassées dans tous les cas par les occultations d'étoiles; mais on peut néanmoins les mettre sur la même ligne que les éclipses des Satellites de Jupiter, et, comparées aux observations d'eclipses de ces Satellites, elles auraient dans tous les cas cet avantage, qu'elles donnent en quelques minutes un résultat indépendant de la puissance des lunettes, ce qui, pour les éclipses, n'est le cas que s'il est possible de combiner une disparition avec une réapparition.

2e Remarque. Le rapport original relatif à l'observation de LUTHMER a été communiqué par ce dernier à BODE, qui l'inséra dans le (Berliner) *Astronomisches Jahrbuch* für 1826, p. 224:

„Am 30 Oct. Ab. 6^u 55′ Bedeckung des vierten ♃ Trabanten vom dritten."

Admettant que Hanovre est situé à 9° 42′ à l'est de Greenwich $= 38^m$ 48^s, cela serait 6^h 16^m 12^s t. m. de Greenwich; du moins dans l'hypothèse qu'à cette époque déjà c'était l'habitude de noter les observations en temps moyen.

Dans *Nature*, XVII (Nov. 1877—April 1878) p. 149 (et non 148) on trouve sous la rubrique „*Our Astronomical Column*":

„Jupiter's Satellites. — Amongst the recorded phenomena connected with the motions of the Satellites of Jupiter are several notices of observed occultations of one Satellite by another, and of small stars by one or other of the Satellites. [2]) The following cases may be mentioned: On the night of November 1, 1693, CHRISTOPH ARNOLDT, of Sommerfeld, near Leipzig, observed an occultation of the second Satellite by the third at 10^h 47^m apparent time. On October 30, 1822, LUTHMER, of Hannover, witnessed an occultation of the fourth Satellite by the third at 6^h 55^m mean time".

On voit que le rédacteur de *Nature* a également pris la donnée pour un temps moyen.

---

[1]) S'il n'y avait pas du moins d'ondulation des images lumineuses. Voir la fin de la note (4).

[2]) Il est bien dommage que ces „several notices of observed occultations of one Satellite by another" ne soient pas mieux indiquées.

(4) N'étant pas parvenu à découvrir le rapport de cette observation de M. STANLEY WILLIAMS dans les périodiques que j'avais à ma disposition, j'ai prié ce Monsieur, qui habite à Hove près de Brighton, de me renseigner en quel endroit il en était fait mention. Il eut l'obligeance de me répondre que les détails de son observation du 27 mars 1885 avaient été publiés dans le tome 11e de „*English Mechanic*", ainsi que que dans l'année 1885 de l'ouvrage périodique allemand „*Sirius*".

Mais il eut aussi la bonté de me communiquer les notes originales relatives à cette observation; j'y emprunte les lignes suivantes:

„*Occultation of Satellite I by Satellite III.*

1885 March 27, ... $2^3/_4$ inch refractor. Power 102.

$11^h 55^m$ (Greenwich mean time). They are now only *just* free from contact. III ○ I, like an elongated star with little more than a black line between the components.

$12^h 00^m$ to $12^h 04^m$. After steady gazing I cannot see any certain separation between the Satellites, and therefore with this instrument and power first contact must have occurred about $12^h 02^m$. Definition is very bad, however, and in a larger telescope there probably might still be a small separation between the limbs.

$12^h 10^m$. They now appear as one elongated Satellite. At times a trace of the notches is apparent.

$12^h 20^m$. The elongation is now very nearly at right angles to the direction of the motion of the Satellites, and is so slight as to be scarcely noticeable in this bad and unsteady definition. I think from the smallness of the elongation that nearly half Satellite I must be concealed behind III. In this bad definition it is not possible to say which Satellite is in front of the other from the appearance alone".

La lettre de M. STANLEY WILLIAMS contenait encore la communication remarquable, qu'il avait observé lui aussi, le 15 juillet 1902, la conjonction décrite par M. NIJLAND. Son instrument était alors un réflecteur de $6^1/_2$ pouces anglais, d'un grossissement de 225. Voici les détails qu'il m'a communiqués:

1902 July 15, $13^h 45^m,2$. Satellites II and III are in contact. The one will occult the other. See diagram III ○ II.

$13^h 52^m$. The Satellites form one disc, which has the slightest possible elongation in a north and south direction. Owing to confused

seeing this disc always appeared more or less fuzzy, and it is impossible from the appearance alone to say, which Satellite is occulting the other.

$13^h\ 56^m$. The combined disc is considerably elongated now.

$14^h\ 02^m,2$. Satellites II and III in contact as in diagram adjoining

II ○ III .

$14^h\ 04^m$. Satellites clearly separated. The occultation must have been nearly central. II is a little more south now relative to III, than it was before occultation. Possibly the slight elongation noted at $13^h 52^m$ was not real.

The above times are Greenwich mean times. Satellite III was on the farther side of its orbit moving east, II on the near side moving west. As the disc of III is larger than that of II, the phenomenon should be described as a transit of II over or across III, rather than an occultation of one Satellite by the other.

N.B. La moyenne ar. de $13^h 45^m,2$ et $14^h 2^m,2$ est $13^h 53^m,7$ donc plus petite de $1^m,1$ que le nombre fourni par l'observation de M. Nijland.

(5). A propos des nombres qui vont suivre ici, nous renvoyons au „*Sterrenhemel*", 4e édition, 2e partie, pp. 707 et suivantes.

L'inclinaison que l'on y trouve donnée pour l'orbite de III est plus petite de 4″ que celle que Tisserand donne, d'après Souillart, dans la 4e tome de sa *Mécanique Céleste*, p. 62, et l'inclinaison de l'orbite de IV est plus grande de 8″.

Pour 1908,0 on a pour l'orbite de Jupiter, d'après Leverrier:

Nœud ascendant = 99°31′56″,
Inclinaison = 1 18 29 .

Pour le premier Satellite le plan fixe coïncide avec le plan de l'équateur de Jupiter; au commencement de 1908 la longitude du nœud ascendant avec l'orbite de Jupiter est donc 315°33′35″ et l'inclinaison est 3°4′9″.

En outre, nous avons pour les quatre plans fixes, par rapport au plan de l'orbite de Jupiter,

	Longit. nœud asc.	Inclinaison.	
I	315°33′35″	3° 4′ 3″	pour 1908.0.
II	315 33 35	3 3 4	
III	315 33 35	2 59 11	
IV	315 33 35	2 39 57	

Pour les trois premiers Satellites, la longitude du nœud ascendant du plan fixe moyen sur le plan orbital de Jupiter, au commencement de 1908, est donc: 315°33′35″, et l'inclinaison 3°2′6″.

Par rapport aux plans fixes respectifs on a pour 1908, d'après TISSERAND,

	Longit. noeud asc.	Changement en 1000 jours	Inclinaison
Pour II	122°,293	—33°,031	0°28′ 9″
III	26 ,173	— 6 ,955	0 10 44
IV	238 ,982	— 1 ,856	0 13 51

Mais ces inclinaisons n'ont qu'une faible influence; à 90° de distance du nœud ascendant elles n'ont donné que des écarts de

1″46 pour II
0 89 „ III
et 2 01 „ IV.

Ce sont les positions de ces plans fixes, aussi bien que celles des plans orbitaux des Satellites par rapport à ces plans fixes, qui seront déterminées plus exactement par les mesures que M. DE SITTER, de Groningue, exécute sur des plaques photographiques; d'ailleurs, les observations éventuelles de conjonctions des Satellites, de préférence même d'occultations, contribueront pour leur part à l'exactitude de cette détermination, et pourront servir à contrôler les valeurs admises.

Lorsque parut la communication préliminaire de M. DE SITTER sur les plans orbitaux des Satellites de Jupiter [1]), nos calculs étaient déjà trop avancés pour ne pas les achever; nous espérons qu'ils auront encore quelque utilité, parce que des conjonctions et des occultations de Satellites pourront être observées avec succès à bon nombre d'observatoires, qui ne disposent pas des installations nécessaires pour faire des photographies.

Les nombres précédents nous font connaître comme situation du plan fixe par rapport à l'écliptique (pour 1908,0)

Noeud ascendant 336° 48′ 23″ $= \Omega$
Inclinaison 2 7 17 $= I$

Si $R_{♃}$, $L_{♃}$ et β sont le rayon vecteur, la longitude et la latitude

[1]) *Versl. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam*, mars 1906. Le travail complet a été publié depuis dans les *Annals of the Royal Observatory of the Cape of Good Hope*, Vol. XII, Part. III.

de Jupiter. $R_{♁}$, $L_{♁}$ le rayon vecteur et la longitude de la Terre (les données du *N. Almanac*, corrigées pour l'aberration), il faut, si le plan fixe passe par la terre, qu'il soit satisfait à l'équation:

$$R_{♃} \cos\beta \sin(L_{♃} - \Omega) - R_{♃} \sin\beta \cot I = R_{♁} \sin(L_{♁} - \Omega),$$

ce qui aura lieu le 8 juillet 1908, à $19^h\,38^m,3$. On a alors, en effet,

$$\log R_{♃} = 0{,}728527 \qquad \log R_{♁} = 0{,}007179$$
$$L_{♃} = 141^\circ\,23'\,9'',0 \qquad L_{♁} = 286^\circ\,40'\,3'',5$$
$$\beta = +\ 0\ 52\ 26{,}73 \qquad \Omega = 336\ 48\ 52{,}0$$

et notre équation devient:

$$1{,}423706 - 2{,}204190 = -0{,}780484.$$

Puis nous trouvons pour l'instant où ce plan passe par le centre du soleil

25 avril 1908, à $18^h,5$ t. m. Grw.

Avant et après ce dernier instant il est possible que les conjonctions héliocentriques donnent lieu à des éclipses d'un Satellite par un autre; nous traiterons cette question dans la deuxième partie de ce travail.

(6). De 1833 à 1839 Bessel a mesuré au moyen de l'héliomètre les distances de tous les Satellites aux deux bords de la planète, ainsi que les angles de position du centre de la planète à III et IV.

Son héliomètre était le premier grand instrument de cette espèce de l'institut de Fraunhofer; l'objectif avait une ouverture de 70,2 lignes par. et une distance focale de 1131,4 lignes par. = 7 pieds 10 pouces 3,4 lignes de Paris (15,84 et 255,22 cm.) L'erreur moyenne d'une seule mesure de distance (qui était à vrai dire la moyenne de huit pointés) était:

pour I	± 0″,26,	soit,	pour	le	résultat	final,	la dist. moy. même,	± 0″,055
„ II	± 0 ,24	„	„	„	„	„	„ „	± 0 ,067
„ III	± 0 ,31	„	„	„	„	„	„ „	± 0 ,042
„ IV	± 0 ,43	„	„	„	„	„	„ „	± 0 ,045
en moy.	± 0″,31	„	„	„	„	„	„ „	± 0 ,052

Schur, de Göttingue, s'est servi des héliomètres qui avaient été

construits par MERZ à Munich, pour l'observation des passages de Vénus sur le soleil, en 1874 et 1852. L'ouverture des objectifs de ces instruments était de 34 lignes par., donc un peu moins que la moitié de celle de l'héliomètre de Koningsbergen; leur distance focale de $3^1/_2$ pieds (113,7 cm.).

Dans ces héliomètres la lecture s'effectuait, non sur deux tambours micrométriques, mais par un microscope dirigé perpendiculairement à deux échelles, reliées aux deux moitiés de l'objectif; mais ces lectures demandaient plus de temps que la lecture d'un tambour de micromètre, comme dans les observations de BESSEL; voilà pourquoi SCHUR prenait, non la moyenne de huit pointés, mais de quatre seulement, ce qui donnait cependant une mesure complète.

Les erreurs moyennes, trouvées par SCHUR, de chaque équation fournie par un système de quatre mesures étaient:

pour	I	± 0″,34
„	II	± 0 ,44
„	III	± 0 ,37
„	IV	± 0 ,42
donc en moyenne		± 0″,39,

ce qui, vu la distance focale plus petite, peut être considéré comme assez satisfaisant.

Le but de BESSEL, comme celui de SCHUR, n'était pas tant la détermination des situations des orbites des Satellites, que celle de la masse de Jupiter.

SCHUR perfectionna encore à divers points de vue les réductions que BESSEL effectua de ses mesures; par là les erreurs moyennes des déterminations individuelles de BESSEL subirent des diminutions notables, et les nombres donnés tantôt pour ces erreurs devinrent:

pour	I	± 0″,21
„	II	± 0 ,10
„	III	± 0 ,26
„	IV	± 0 ,30
donc en moyenne		± 0″,24.

MM. GILL et FINLAY ont mesuré, comme il a été dit, non les distances et directions des Satellites par rapport au centre de la planète,

mais, conformément à l'idée de Otto Struve [1]), des Satellites entre eux. L'instrument dont ils disposaient, un héliomètre de Repsold de $7\frac{1}{2}$ pouces (19,05 cm.) d'ouverture et de plus de 2 mètres de distance focale, dépassait de beaucoup, par sa perfection, les instruments employés jusque là. Ces observations peuvent être faites avec une précision beaucoup plus grande, mais elles présentent cet inconvénient que l'établissement et la résolution des équations deviennent bien plus compliqués et plus laborieux. Mais, pas plus que M. de Sitter, ils ne se sont laissés décourager par cette circonstance. L'erreur probable d'une seule distance mesurée était de 0″,087 environ, donc bien plus petite que celle des mesures de Bessel. L'erreur probable des distances moyennes (c. à d. des inconnues), calculée par M. de Sitter, ne dépassait même pas ± 0″,020 ou ± 0″,021.

(7). Nous ferons encore remarquer ici que M. de Sitter avait jugé bon de faire un autre choix des inconnues. Pour chaque Satellite il conserva il est vrai la longitude dans l'orbite, l'inclinaison et le nœud ascendant par rapport à un plan fixe adopté, mais non l'excentricité, la situation du périjovium et la masse, de sorte qu'il ne restait plus, pour chaque Satellite, que trois éléments comme inconnues; par contre, il introduisit des corrections des coefficients des termes de perturbation, ou plutôt périodiques, qui devaient conduire dans la suite à la connaissance des masses des Satellites, des excentricités et de la position des axes, ainsi qu'une couple d'inconnues, notamment des erreurs constantes, qui pouvaient avoir été commises par chacun des observateurs Gill et Finlay dans leurs mesures; en tout il obtint ainsi 29 inconnues. On comprend que la résolution d'environ 400 équations avec un nombre aussi considérable d'inconnues était un labeur prodigieux, qui fut cependant mené à bonne fin par les efforts combinés de plusieurs calculateurs.

Il nous mènerait trop loin de communiquer ici d'autres détails de cet important travail, mais nous croyions bien faire d'en faire mention. Je dois pourtant faire remarquer encore qu'il ne suffit pas de déterminer la situation des plans des orbites des Satellites pour un instant déterminé; car, ainsi que je l'ai dit plus haut, ces plans changent continuellement de position. Il semble que ces changements puissent être représentés

[1]) Voir le premier rapport de Hermann Struve, dans le 1er tome supplémentaire des observations de Pulkowa, au bas de la 1e page.

avec une exactitude suffisante pour une rétrogradation régulière de la ligne d'intersection (ligne nodale) avec un plan fixe, l'inclinaison restant la même.

C'est surtout l'aplatissement de Jupiter qui produit ce recul. Mais il est à désirer que l'on détermine cette rétrogradation par des observations, pour en déduire ensuite la valeur de l'aplatissement. Il faut donc que l'on détermine la position des plans orbitaux à diverses époques, et à ce point de vue aussi M. DE SITTER s'est rendu utile, ainsi qu'on peut en juger par son travail.

(8). Le volume contenant les tables écliptiques de DAMOISEAU contient encore, dans une seconde partie, des tables „*pour trouver les configurations des Satellites de Jupiter*", bien que le titre de l'ouvrage mentionne seulement les premières.

Nous comprenions bien qu'il aurait été recommandable de ne pas nous servir de ces tables sans modification, et voilà pourquoi nous avons pris connaissance des recherches de MM. SOUILLART, ADAMS, MARTH, GILL, FINLAY et DE SITTER; mais nous reconnûmes que notre labeur aurait été par là considérablement augmenté. Il nous aurait fallu établir d'abord de nouveaux éléments pour tous les Satellites et calculer de nouvelles tables, ce qui aurait causé un retard considérable, sans nécessité pour notre but, qui est de préparer les astronomes à l'observation des conjonctions possibles, à observer en 1908.

Nous avons donc fait usage des tables de DAMOISEAU pour nos calculs, après avoir examiné d'abord jusqu'à quel point elles rendent les conjonctions réellement observées; nous allons communiquer aussi bien la différence que fournissaient les tables dans les élongations x et x' des deux Satellites, exprimées au moyen du rayon de Jupiter, que l'avance ou le retard de la conjonction, calculée d'après les tables, sur l'instant de l'observation:

Observateur	Date	Occultation de	par	Erreur	Mouvement relatif par heure	Correction de la Table	$y'-y$
FAUTH	1902 oct. 7	II_e	I_r	$0^r,025$	$1^r,278$	$+ 1^m,2$	$+ 0^r,04$
"	" " 23	III_e	II_r	0 ,02	1 ,130	+ 1 ,1	+ 0 ,08
"	" nov. 10	I_e	III_r	0 ,00	0 ,883	0 ,0	+ 0 ,13
"	" déc. 24	IV_e	I_r	0 ,10	1 ,089	— 5 ,5	+ 0 ,00
"	1903 janv. 14	II_e	III_r	0 ,11	0 ,344	— 19 ,2	— 0 ,05
NIJLAND	1902 juill. 15	III_e	II_r	0 ,08	0 ,751	+ 6 ,4	— 0 ,01
STANLEY WILLIAMS	" " "	"	"	0 ,07	0 ,751	+ 5 ,3	— 0 ,01
" "	1885 mars 27	I_r	III_r	0 .00	0 ,292	0 ,0	+ 0 ,01

Je n'ai pas mis dans ce tableau l'observation faite, le 30 octobre 1822, par LUTHMER, à Hanovre; le calcul donne

	Longit. jovic.	Amplitude	x	y et y'
III	$10^s 26°,77$	$8^s 22°,25$	$-15^r,21$	$+ 0^r,18$
IV	9 6 ,74	7 2 ,22	— 14 ,40	— 0 ,74
		Différence	$+ 0^r,81$	$+ 0^r,92$

Il y a donc dans les amplitudes une différence de $0^r,81 = 0,81 \times \times 18'',37 = 14'',9$, et dans les latitudes de $0^r,92 = 16'',9$. Il est probable que l'observation a été faite avec de moyens insuffisants, car il est impossible que l'erreur des tables de DAMOISEAU ait été aussi grande en 1822. L'inégalité des latitudes y et y' s'explique par le fait, que le nœud ascendant du plan fixe était à $10^s 14°,37$, ce qui est compris entre les deux longitudes jovicentriques.

Comme les deux Satellites se dirigeaient du même côté, la variation de leur distance par heure était faible, savoir $0^r,280$; il aurait donc fallu encore près de 3 heures pour annuler la différence de $0^r,81$.

Mais les autres conjonctions observées donnent une précision satisfaisante, de sorte qu'on peut s'attendre à ce que le table à communiquer répondra à son but.

Comme autre épreuve de contrôle j'ai calculé, par la deuxième partie de DAMOISEAU, les deux conjonctions supérieures et la conjonction inférieure de II intermédiaire, données par le *N. Almanac* de 1902. J'ai trouvé un petite avance de

$0^m,7$	pour	la	conjonction	supérieure	du	10	juillet	à	$10^h 46^m,9$	t. m.	Grw.
0 ,3	„	„	„	inférieure[1])	„	16	„	„	5 40 ,0	„	„
0 ,7	„	„	„	supérieure	„	17	„	„	23 54 ,4	„	„

les écarts ne sont donc pas même d'une minute.

Comme les conjonctions du *Nautical Almanac* ont été calculées à l'aide des *tables écliptiques* de DAMOISEAU, — (en tenant compte de quelques petites corrections indiquées par ADAMS) —, ces différences ne doivent être attribuées qu'à cette circonstance que, dans la deuxième partie de DAMOISEAU, les termes principaux des équations et des perturbations ont seuls été envisagés.

Les tables ont rendu avec la même précision, pour I, la conjonction géocentrique supérieure du 1er janvier 1908, à $11^h 4^m,2$ t. m. Grw. = 2 janv. $2^h 13^m,55$ temps civil de Paris; ici l'erreur n'atteignait que $0^s,07$, ou linéairement $0^r,01$, un espace que le Satellite parcourt en $0^m,5$.

(Pour d'autres détails relatifs aux termes considérés dans la deuxième partie des tables de DAMOISEAU, voir le 3me appendice ci-après).

M. STANLEY WILLIAMS fait encore mention, dans sa lettre, d'un singulier phénomène, observé par lui, en même temps que par l'observateur espagnol M. J. COMAS à Valls (près de Tarragone), le 14 août 1891, savoir la coïncidence et la séparation subséquente des ombres projetées par deux Satellites sur la planète; d'où il conclut qu'il doit y avoir eu éclipse. Nous parlerons de ces phénomènes dans la seconde partie.

(9). Voici le tableau qui a servi à ce calcul L'unité est le rayon de de Jupiter, 18″,37. M. SOUILLART dit avoir trouvé dans les papiers de DAMOISEAU la mention que ce nombre a été emprunté à ARAGO. ARAGO l'aurait déterminé, suivant HOUZEAU, à l'aide d'un micromètre

[1]) La moyenne de l'entrée et de la sortie d'un passage.

à double image, (une invention d'Arago même, dont l'observatoire d'Utrecht possède un exemplaire), mais on ne connaît pas les détails des mesures. Le nombre est plus petit que celui qui a été fourni par d'autres mesures, voir p. ex. Houzeau pp. 647—650; See, *Astron. Nachr.* n°. 3670 (15 août 1900).

Enfin nous communiquerons tantôt (voir pp. 342 à 345) deux exemples du calcul; dans l'un les Satellites semblent aller à la rencontre l'un de l'autre, dans l'autre dans le même sens.

Variation par heure de l'élongation x en fonction de l'amplitude.

+				I		II		III		IV		—			
0s	0°	0s(12)	0°	0r,895		0r,708		0r,560		0r,120		6s	0°	6s	0m
					4		3		2		2				
	5	11	25	0 ,891		0 ,705		0 ,558		0 ,418			5	5	25
					10		8		7		4				
	10	11	20	0 ,881		0 ,697		0 ,551		0 ,414			10	5	20
					17		14		10		8				
	15	11	15	0 ,864		0 ,683		0 ,541		0 ,406			15	5	15
					23		18		15		11				
	20	11	10	0 ,841		0 ,665		0 ,526		0 ,395			20	5	10
					30		23		18		14				
	25	11	5	0 ,811		0 ,642		0 ,508		0 ,381			25	5	5
					36		29		23		17				
1	0	11	0	0 ,775		0 ,613		0 ,485		0 ,364		7	0	5	0
					42		33		26		20				
	5	10	25	0 ,733		0 ,580		0 ,459		0 ,344			5	4	25
					48		37		30		22				
	10	10	20	0 ,685		0 ,543		0 ,429		0 ,322			10	4	20
					53		42		33		25				
	15	10	15	0 ,632		0 ,501		0 ,396		0 ,297			15	4	15
					57		46		36		27				
	20	10	10	0 ,575		0 ,455		0 ,360		0 ,270			20	4	10
					62		49		39		29				
	25	10	5	0 ,513		0 ,406		0 .321		0 ,241			25	4	5
					66		52		41		31				
2	0	10	0	0 ,447		0 ,354		0 ,280		0 ,210		8	0	4	0
					69		54		43		32				
	5	9	25	0 ,378		0 ,299		0 ,237		0 .178			5	3	25
					72		57		45		34				
	10	9	20	0 ,306		0 ,242		0 ,192		0 ,144			10	3	20
					75		59		47		35				
	15	9	15	0 ,231		0 ,183		0 ,145		0 ,109			15	3	15
					76		60		48		36				
	20	9	10	0 ,155		0 ,123		0 ,097		0 ,073			20	3	10
					77		61		48		36				
	25	9	5	0 ,078		0 ,062		0 .049		0 ,037			25	3	5
					78		62		49		37				
3	0	9	0	0 ,000		0 ,000		0 ,000		0 ,000		9	0	3	0

1er Appendice. *Quelle est la plus longue durée des diverses occultations d'un Satellite par un autre?*

Nous avons vu tantôt que la petite différence des élongations de $0^{r},11$ ($2'',0$) n'était réduite à 0 qu'au bout de $19^{m},2$; cela tenait à la faiblesse du mouvement horaire relatif des Satellites. Mais, si les mouvements horaires des deux Satellites, dont nous représenterons les vitesses par u et u', sont *absolument* égaux, le dénominateur de la fraction $\frac{x'-x}{u'-u}$ est nul.

Ce cas correspond à celui de l'„arrêt de Vénus"; la question du calcul des époques de ces arrêts est déjà très ancienne.

Soient r et r' les rayons vecteurs des deux Satellites, θ et θ' leurs amplitudes; on a, au moment d'une occultation,

$$r \sin \theta = r' \sin \theta'.$$

La condition d'un égal changement apparent de l'élongation donne:

$$r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = r' \cos \theta' \frac{d\theta'}{dt}.$$

Mais, si T et T' représentent les durées de révolution sidérales, on a

$$\frac{d\theta}{dt} : \frac{d\theta'}{dt} = \frac{1}{T} : \frac{1}{T'} = \frac{1}{r^{3/2}} : \frac{1}{r'^{3/2}},$$

donc:

$$r^{-1/2} \cos \theta = r'^{-1/2} \cos \theta',$$

de sorte que

$$\cos^2 \theta = \frac{r}{r'} \cos^2 \theta' = \frac{r}{r'} - \frac{r}{r'} \sin^2 \theta'.$$

En y ajoutant:

$$\sin^2 \theta = \frac{r'^2}{r^2} \sin^2 \theta'$$

on obtient

$$1 = \frac{r}{r'} + \left\{\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{r}{r'}\right\} \sin^2 \theta',$$

d'où, posant $\frac{r'}{r} = \mu$:

$$\sin^2 \theta' = \frac{1 - \frac{1}{\mu}}{\mu^2 - \frac{1}{\mu}} = \frac{\mu - 1}{\mu^3 - 1} = \frac{1}{\mu^2 + \mu + 1}$$

et

$$\sin^2 \theta = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \mu + 1}.$$

Il est évident que l'égalité des variations par heure des deux élongations n'existe qu'un instant; bientôt les élongations redeviennent inégales et les deux Satellites se séparent; mais il peut s'écouler un temps assez long avant que cette séparation ne devienne visible dans une lunette, et, ce qui est remarquable, c'est que dans ce cas les Satellites ne se croisent pas, mais qu'après la conjonction ils ont repris, l'un par rapport à l'autre, la même situation qu'ils occupaient avant la conjonction.

Prenons comme exemple une conjonction, dans les circonstances considérées, de I et II, les amplitudes étant comprises entre 0 et 3 signes, et les Satellites, vus de la terre (l'observateur étant tourné vers le pôle nord du ciel), étant donc placés tous deux à la gauche de la planète, et s'en éloignant tous deux. Avant la conjonction I est à la droite de II, mais le mouvement de I est plus rapide que celui de II; lorsque son amplitude est de 44° 39′, celle de II étant 26°14′, I rejoint II, et en même temps les vitesses apparentes sont égales. Mais la vitesse de I diminue notablement à mesure que ce Satellite s'approche de sa plus grande élongation, plus même que celle de II, dont l'amplitude est beaucoup plus petite; il s'ensuit que I reste en arrière après la conjonction, c. à d. revient à la droite de II, comme avant.

Ce cas est transitoire entre deux autres. 1°. Si, dans les mêmes conditions, I est arrivé plus loin dans son orbite (a une plus grande amplitude), il dépasse II, mais est rejoint plus tard par II qui, vu de la terre, le croise en passant derrière lui. 2°. Si I est arrivé moins loin, il reste constamment à la droite de II, et la distance I—II atteint bien un minimum, mais ne s'annulle pas.

Pour pouvoir répondre à la question de savoir quelle sera la durée de l'occultation, notamment à partir du premier contact extérieur, nous devons connaître les rayons apparents des Satellites eux-mêmes. L'irradiation les rend plus grands la nuit que le jour [1]), ainsi que l'ont constaté divers observateurs; comme les observations des Satellites de Jupiter se font presque exclusivement pendant la nuit, nous admettrons les valeurs des rayons apparents qui conviennent pour la nuit, et nous prendrons la moyenne entre ce que M. See a trouvé comme moyenne d'autres observateurs et ce qu'il a trouvé lui-même par des mesures nombreuses à l'aide de la lunette géante de Washington. En réduisant à l'unité que l'on emploie dans de pareils calculs, savoir le rayon de l'équateur de Jupiter, nous avons donné à ce rayon la valeur de Damoiseau: 18″,37.

	Diamètre		Rayon
I.	1″,07 =	0ʳ,058	0ʳ,029
II.	0 ,95	0 ,052	0 ,026
III.	1 ,56	0 ,085	0 ,0425
IV.	1 ,41	0 ,076	0 ,038

d'où

	Somme des diamètres	Somme des rayons
I + II	0ʳ,110	0ʳ,055
I + III	0 ,143	0 ,0715
I + IV	0 ,134	0 ,067
II + III	0 ,137	0 ,0685
II + IV	0 ,128	0 ,064
III + IV	0 ,161	0 ,0805

Dans ce calcul nous prendrons pour les rayons vecteurs moyens deux décimales de plus que Damoiseau ne donne dans ses tables; nous prendrons notamment les valeurs que M. Souillart a trouvées

[1]) Voir e. a. T. J. J. See, Observations of the Diameters of the Satellites of Jupiter, and of Titan, the principal Satellite of Saturn, made with the 26 inch Refractor of the U. S. Naval Observatory, Washington, 19 Oct. 1901. *Astr. Nachr.*, n°. 3764 (21 Jan. 1902).

dans les papiers de DAMOISEAU (SOUILLART, 2e mémoire, p. 10) [1]):

I	$6^r,0491$
II	9 ,6245
III	15 ,3524
IV	27 ,0027

Le résultat du calcul est que, entre le premier contact et l'occultation centrale il s'écoule:

I et II	I et III	I et IV	II et III	II et IV	III et IV
$1^h,324$,	$1^h,245$,	$1^h,103$,	$2^h,263$,	$1^h,774$,	$3^h,725$;

entre l'occultation centrale et le deuxième contact:

$1^h,204$,	$1^h,161$,	$1^h,059$,	$2^h,190$,	$1^h,767$,	$3^h,725$;

ensemble

$2^h,528$,	$2^h,406$,	$2^h,162$,	$4^h,453$,	$3^h,541$,	$7^h,450$,

c. à d.

2^h32^m,[2])	2^h24^m,	2^h10^m,	4^h27^m,	3^h32^m,	7^h27^m.

Ce ne sont pourtant pas encore là les durées maxima que les deux Satellites se présentent comme un seul corps céleste. Car on peut se

[1]) Suivant M. SOUILLART, DAMOISEAU est arrivé à ces nombres de la manière suivante: Il prit comme distance moyenne de IV, d'après la détermination de POUND, 496",0, et comme rayon de Jupiter 18",37; par division il obtint ainsi $r_{IV} = 27,00102834$; les moyennes distances des autres Satellites, il les obtint au moyen des durées de révolution sidérales, en appliquant la 3e loi de KEPLER. Mais à ces distances moyennes il ajouta les termes constants que la force perturbatrice ajoute aux rayons vecteurs (pour IV 0,00169832) et il obtint ainsi 27,00272666.

Je me permets de faire remarquer que 496",0 : 18",37 n'est pas 27,00102834 mais 27,000544366. Il est fort heureux que les 4e, 5e, 6e et 7e décimales sont sans influence sensible sur nos calculs, et probablement aussi sur ceux de SOUILLART; voyez d'ailleurs, à propos de pareils nombres avec beaucoup de décimales, le 2e appendice ci-après.

[2]) D'après nos calculs il faut (voir le tableau ci-après) qu' une pareille conjonction se produise entre I et II le 4 juin 1908.

figurer le cas où la plus petite distance devient égale à $-(r+r')$, c. à d. qu'un contact extérieur ait lieu de l'autre côté, entre deux conjonctions centrales. Dans ces conditions, la durée est à fort peu près multipliée par $\sqrt{2}$, et devient donc pour

I et II	I et III	I et IV	II et III	II et IV	III et IV
$3^h,574$,	$3^h,402$,	$3^h,057$,	$6^h,296$,	$5^h,006$,	$10^h,43$,
c. à d.					
3^h34^m,	3^h24^m,	3^h3^m,	6^h18^m,	5^h0^m,	10^h26^m,

Ces nombres ne conviennent que pour ces cas exceptionnels où 1°. l'occultation est centrale et 2°. la vitesse de variation de l'élongation la même, ou à peu près la même, pour les deux Satellites. Dès qu'il existe quelque différence en latitude, les durées pendant lesquelles les deux Satellites se présentent comme un seul corps céleste sont évidemment plus courtes.

2e Appendice. *Examen de l'incertitude qui affecte la détermination des durées de révolution synodiques des Satellites.*

Dans l'introduction à ses *Tables écliptiques*, publiées en 1818, Delambre dit à la page XIX: „Nous n'avons aucune observation d'éclipse antérieure à 1660". Or, admettant que la différence des temps entre la première éclipse observée en 1660 et la dernière en 1816, deux ans avant la publication des tables (tenant compte aussi de la suivante en 1660 et de la précédente en 1816), laisse une incertitude pour les quatre Satellites de 20, 30, 40 et 60 secondes, ce qui est plutôt flatté, et divisant par le nombre des révolutions synodiques en ces 156 années, savoir 32193, 16032, 7951 et 3401, on obtient comme incertitude d'une seule révolution:

pour I	pour II	pour III	pour IV
$0^s,00062$	$0^s,00188$	$0^s,0050$	$0^s,0176$.

Si donc Delambre fait connaître les temps de révolution en 9 décimales de seconde, on ne doit pas attacher beaucoup d'importance à une telle précision.

Lorsque Damoiseau, 20 ans après Delambre, publia de nouvelles

tables écliptiques [1]) pour les Satellites de Jupiter, il prit sans aucune modification la durée de révolution synodique de I, mais il fit subir aux autres les corrections suivantes:

II	$+0^s,005\ 127\ 374$
III	$+0\ ,029\ 084\ 25$
IV	$-0\ ,092\ 654\ 834,$

respectivement presque 3, presque 6 et plus de 5 fois plus grandes que les incertitudes que nous venons de trouver. Même si l'on élève le nombre d'années écoulées de 156 à 176, les incertitudes que nous venons d'évaluer ne sont diminuées que d'environ $^1/_9$ de leur valeur, de sorte que nous pouvons conclure que pour ces durées de révolution on ne peut considérer comme déterminées avec certitude que

3 décimales de seconde pour I
et 2 „ „ „ II, III et IV.

Le *Nautical Almanac* qui, en communiquant les conjonctions supérieures des Satellites, donne aussi les durées de révolution synodiques, se borne sagement à trois décimales. On peut dire que pour le moment l'emploi de ces neuf décimales est tout simplement de la blague astronomique, dont nous pouvons citer quelques autres exemples encore, p. ex. les valeurs bien connues, d'une autre époque, de $20'',1451$ pour la constante de l'aberration et $8'',57116$ pour la parallaxe du soleil.

[1]) Les tables de Delambre et de Damoiseau étaient surtout destinées à prédire, dans les annuaires astronomiques, les éclipses des Satellites, notamment par l'ombre de Jupiter. Voilà pourquoi Damoiseau, tout comme Delambre, a réuni tous les termes des perturbations en longitude, qui ont le même argument au moment des oppositions des Satellites, même quand ces arguments diffèrent partout ailleurs dans l'orbite.

Pour calculer donc des tables, d'où il soit possible de déduire la longitude et les rayons vecteurs des quatre Satellites en tous les points de leurs orbites, ainsi que Bessel les a données dans ses *Astronomische Untersuchungen* et Marth dans les *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. LI (1891), il était nécessaire de séparer de nouveau ces termes.

3e Appendice. *Signification des équations introduites dans la 2e partie des tables de* Damoiseau.

Nous avons promis tantôt (p. 326) d'indiquer, dans un 3e appendice, les équations dont il est tenu compte, pour chaque Satellite, dans la deuxième partie des tables de Damoiseau. Nous allons maintenant satisfaire à cette promesse; nous appellerons U, u_0, u_I, u_{II}, u_{III} et u_{IV} les longitudes moyennes du soleil, de Jupiter et des quatre Satellites; π_0 la longitude du périhélie de Jupiter, π' de la terre, π_{III} et π_{IV} les périjovia de III et IV; Π la longitude du nœud ascendant de l'équateur de Jupiter sur son orbite, enfin Λ_{II}, Λ_{III} et Λ_{IV} les longitudes des nœuds ascendants de II, III et IV, chacun sur son plan fixe propre.

Pour pouvoir fournir les données suivantes, nous avons, pour chaque équation, emprunté le mouvement diurne de l'argument aux tables de la deuxième partie de Damoiseau, et nous avons multiplié la valeur trouvée par la durée de révolution synodique, exprimée en jours; enfin, nous avons comparé le produit ainsi trouvé avec le facteur par lequel la lettre i (le nombre de révolutions synodiques) est multiplié dans la première partie, pp. (III), (V), (VII) et (VIII).

Pour différentes équations de II, III et IV, ces mouvements diurnes sont égaux à si peu près que, pour les trouver, on doit emprunter aux tables ceux qui se produisent pendant une longue période, par exemple 10 années, (en ayant bien égard au nombre de révolutions), et diviser par le nombre de jours (10 années = 3652 ou 3653 jours). On obtient alors, après multiplication de ce quotient par la durée de révolution synodique en jours, 360° + une fraction; ces 360° ne comptent pas; la fraction est le facteur de i, et on reconnaît par là à quelle équation on a affaire. Dans l'introduction de la deuxième partie de Damoiseau on cherche en vain quelque renseignement à ce sujet.

I. Pour ce Satellite il y a cinq ces termes. N°. 1, avec une amplitude de 1°,16, est l'équation pour la vitesse de la lumière; l'argument est $U - u_0$;

N°. 2 (amplitude 0°,29) est l'équation causée par l'ellipticité de l'orbite de Jupiter; l'argument est la moyenne anomalie de Jupiter $u_0 - \pi_0$.

N°. 3 est 180° + la moyenne anomalie de la terre, $U - \pi'$; elle donne, en combinaison avec n°. 1, c. à d. la différence de longitude entre le soleil et Jupiter, dans la table à double entrée IX un terme de la latitude géocentrique du Satellite.

N°. 4, avec une amplitude 0°,15, donne la perturbation que I subit de la part de II. L'argument est $u_I - u_{II}$.

N°. 5 (amplitude 3°,07) donne la latitude jovicentrique de I, qui permet de trouver le 2e terme de la latitude géocentrique.

II. Sept termes. Nos. 1, 2 et 3 ont les mêmes arguments que I; des nos. 1 et 2 les amplitudes ont la moitié de la valeur de I. Le terme de latitude, que l'on trouve par 1 et 3 dans le tableau IX, est nécessairement le même pour tous les Satellites.

N°. 4 (amplitude 1°,06) fait connaître la perturbation que II subit de la part de III. L'argument est $u_{II} - u_{III}$.

Nos. 5, 6 et 7 servent à trouver la latitude.

N°. 5 (amplitude 3°,05) a pour argument $u_{II} - \pi_{IV}$;
N°. 6 („ 0°,47) „ „ $u_{II} - \Lambda_{II}$;
N°. 7 („ 0°,03) „ „ $u_{II} - \Lambda_{III}$.

III Neuf termes. Nos. 1, 2 et 3 sont les mêmes que pour I et II; les amplitudes des nos. 1 et 2 sont respectivement 0°,29 et 0°,07.

N°. 4 (amplitude 0°,07) a le même argument que le n°. 4 de II, mais il donne la perturbation produite par II.

N°. 5 (amplitude 0°,15) est l'équation du centre; l'argument est $u_{III} - \pi_{III}$.

N°. 6 (amplitude 0°,04) a pour argument $u_{III} - \pi_{IV}$, et fait donc connaître une perturbation de III, dépendant de la longitude du périhélie de IV.

Nos. 7, 8 et 9, avec des amplitudes de 2°,98, 0°,18 et 0°,03, servent à la latitude. Les arguments sont respectivement $u_{III} - \pi$, $u_{III} - \Lambda_{III}$ et $u_{III} - \Lambda_{IV}$.

IV. Sept termes.

Nos. 1, 2 et 3 sont les mêmes que précédemment.

N°. 4 (amplitude 0°,83) est l'équation du centre, l'argument est $u_{IV} - \pi_{IV}$.

Nos. 5, 6 et 7 servent à trouver la latitude. N°. 5 (amplitude

2°,64) dépend de l'anomalie moyenne de Jupiter; l'argument est donc $\pi_0 - \pi_0$.

N°. 6 (amplitude 0°.24) dépend de l'argument de latitude du Satellite même; l'argument est $u_{IV} - \Lambda_{IV}$.

N°. 7 (amplitude 0°,04) est une faible perturbation, produite par III; elle a pour argument $u_{IV} - \Lambda_{III}$.

Nous donnerons maintenant le tableau des conjonctions que nous avons calculées.

La première colonne contient le numéro d'ordre.

La deuxième donne l'instant de la conjonction, arrondi jusqu'à la minute la plus rapprochée, et exprimé en temps civil de Paris. Ce temps est compté à partir de minuit, et est employé par Damoiseau dans ses tables, de sorte que la colonne rend le résultat immédiat du calcul. Dans les cas où il venait exactement une demi-minute, cela a été indiqué. En retranchant $12^h 9^m$, ou mieux $12^h 9^m,35$, nous avons trouvé le temps moyen de Greenwich, indiqué aussi dans la 2ᵉ colonne.

Les 4ᵉ et 5ᵉ colonnes font connaître les Satellites occulté et occultant; les indices *e* et *r* servent à indiquer si le Satellite est *éloigné* ou *rapproché* (voir la note à la p. 308). Le Satellite est éloigné lorsque l'amplitude est comprise entre 9^s et 3^s, rapproché si elle est comprise entre 3^s et 9^s. Puis *ee* représente une élongation orientale, lorsque l'amplitude est voisine de 3^s, et *ew* représente une élongation occidentale, lorsque l'amplitude est voisine de 9^s.

Au moment de la conjonction les élongations, calculées le long de l'orbite de Jupiter, sont les mêmes pour les deux Satellites; on les trouve dans la colonne suivante. Si l'élongation est +, pour un observateur placé dans l'hémisphère nord le Satellite, vu dans une lunette à vision droite, est à la gauche de la planète, donc à sa droite quand on l'observe dans une lunette à images renversées, c. à d. celles que l'on emploie pour l'observation des corps célestes.

Les trois colonnes suivantes fournissent les ordonnées des deux Satellites et leur différence; nord est positif.

La 10ᵉ colonne fait connaître la durée qu'aurait l'occultation, si la conjonction était centrale. Dans quelques cas (nᵒˢ. 20, 23, 30, 48, 53 et 64) nous avons trouvé $y' = y$, donc $y' - y = 0$, et, si les tables sont exactes, ces conjonctions sont centrales. Mais, en contrôlant les conjonctions observées par MM. Fauth, Nijland et Stanley Williams,

la différence des y n'était pas exactement celle donnée par les observateurs, et il suffit d'une petite différence pour diminuer considérablement la durée d'une occultation éventuelle. Aussi, pour ne pas remplir une colonne de chiffres qui courraient le risque d'être démentis par l'observation, j'ai omis la durée réelle telle qu'elle est fournie par le calcul.

J'ai fait remarquer (p. 312) que si une conjonction est visible en un endroit déterminé de la terre, elle ne le sera que pendant un temps assez court, entre le coucher du soleil et celui de Jupiter. Il s'ensuit que, pour que la liste ait quelque utilité, il faut que les observatoires dispersés sur notre globe combinent leurs observations. C'est pour favoriser une pareille collaboration que j'ai indiqué, dans la dernière colonne, quels sont les observatoires où l'on peut observer la conjonction marquée sur la même ligne. Mais les astronomes des observatoires voisins feront bien d'examiner la possibilité de la visibilité, et, si cet examen donne un résultat favorable, de se préparer à l'observation.

Résultats.

Conjonctions géocentriques des Satellites entr'eux en juin et juillet 1908.

N°.	Temps civil de Paris	Temps moyen de Greenwich	r = rapproché, e = éloigné: Satellite occulté	Satellite occultant	$x = x'$	Satellite occulté y	Satellite occultant y'	$y' - y$	Durée pour occultation centrale	Visible à
1	1 juin 5h 55m	31 mai 17h 46m	I_e	II_r	+ 2r,18	− 0r,16	− 0r,12^5	+ 0r,03^5	45m	Mt. Hamilton
2	1 „ 18 25	1 juin 6 16	I_{ew}	II_r	6 ,03	+ 0 ,31	+ 0 ,29	− 0 ,02	11	Le Cap
3	2 „ 1 55	1 „ 13 46	I_e	IV_r	− 3 ,15	+ 0 ,18	− 0 ,12	− 0 ,30	7	Washington
4	2 „ 13 16	2 „ 1 7	III_e	II_e	− 8 ,51	+ 0 ,51	+ 0 ,38	− 0 ,13	60	Madras, H. Kong
5	2 „ 14 0	2 „ 1 51	III_e	IV_r	− 8 ,16	+ 0 ,51	+ 0 ,13	− 0 ,38	11	Madras, H. Kong
6	2 „ 14 4,5	2 „ 1 55	II_e	IV_r	− 8 ,20	+ 0 ,37	+ 0 ,13	− 0 ,24	10	Madras, H. Kong
7	2 „ 21 10	2 „ 9 1	III_e	II_e	− 4 ,54	+ 0 ,31	+ 0 ,20	− 0 ,11	41	Utrecht
8	3 „ 3 15	2 „ 15 6	II_e	I_r	− 0 ,33^5	0 ,00	− 0 ,03	− 0 ,03	4	En même temps ☌ ♃
9	3 „ 3 50	2 „ 15 41	III_e	I_r	− 0 ,87	+ 0 ,15	0 ,00	− 0 ,15	6	„ „ „ „ „
10	4 „ 14 46	4 „ 2 37	I_r	II_r	$x = +5{,}01^5$ $x' = +5{,}07$	− 0 ,29	− 0 ,25^5	+ 0 ,03^5	Deux contacts du même côté. II arrive précisément à la conjonction centrale et rebrousse ensuite chemin.	Madras
„	4 „ 16 0	4 „ 3 51	„	„	4 ,34					
„	4 „ 17 15	4 „ 5 6	„	„	$x = +3{,}54$ $x' = +3{,}48^5$	− 0 ,23	− 0 ,19^5	+ 0 ,03^5		

Ici les Satellites sont conjugués pendant $2\frac{1}{2}$ heures environ

11	5	7 51	4	19 42	I	II	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

13	6	„	18 11,5	6	„	6 2	II_e	III_r	+ 0 ,82	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
14	9	„	5 6	8	„	16 57	IV_e	II_e	— 9 ,19	+ 0 ,59	+ 0 ,43	— 0 ,16	13	Mt. Hamilton
15	10	„	4 26	9	„	16 17	IV_e	I_r	+ 0 ,29	+ 0 ,14	— 0 ,05^5	— 0 ,19^5	6	En même temps ♂ ♃
16	10	„	5 23	9	„	17 14	II_e	I_r	— 0 ,58	+ 0 ,02	— 0 ,01	— 0 ,03	5	„ „ „ „
17	10	„	6 28	9	„	18 18,5	III_e	I_r	— 1 ,54	+ 0 ,15	+ 0 ,05	— 0 ,10	6	Mt. Hamilton
18	11	„	3 0	10	„	14 41	IV_e	III_e	+ 9 ,01	— 0 ,32	— 0 ,52	0 ,20	183	Washington
19	12	„	10 34	11	„	22 25	I_{ew}	II_r	— 6 ,03	+ 0 ,32	+ 0 ,28	0 ,04	11	Wellington
20	13	„	18 46,5	13	„	6 37	II_e	I_r	— 0 ,82	+ 0 ,01^5	+ 0 ,01^5	0 ,00	4	♂ ♃
21	13	„	21 37	13	„	9 28	II_e	III_r	+ 1 ,31	— 0 ,07	— 0 ,16	— 0 ,09	6,5	II éclipsé (Utrecht)
22	15	„	23 55	15	„	11 46	I_{ew}	II_r	— 5 ,99	+ 0 ,32	+ 0 ,29	— 0 ,03	10	(Océan Atl.)
23	17	„	7 53	16	„	19 44	II_e	I_r	— 0 ,92	+ 0 ,02	+ 0 ,02	0 ,00	4	♂ ♃
24	17	„	9 39	16	„	21 30	III_e	I_r	— 2 ,44	+ 0 ,18	+ 0 ,10	— 0 ,08	6	Wellington
25	17	„	20 47	17	„	8 38	II_e	IV_r	+ 7 ,33	— 0 ,37	— 0 ,52	— 0 ,15	9	Utrecht
26	18	„	0 33	17	„	12 24	III_e	IV_r	+ 5 ,75	— 0 ,28	— 0 ,44	— 0 ,16	10	(Océan Atl.)
27	18	„	7 30	17	„	19 21	I_e	IV_r	+ 2 ,86	0 ,16	— 0 ,30	— 0 ,14	6,5	Sydney
28	18	„	8 28	17	„	20 18	III_e	II_{ee}	+ 9 ,52	— 0 ,51	— 0 ,45	+ 0 ,06	15	Sydney
29	19	„	13 13	19	„	1 4	I_{ew}	II_r	— 5 ,94	+ 0 ,32	+ 0 ,29	— 0 ,03	9,5	Hong Kong
30	20	„	21 3	20	„	8 54	II_e	I_r	— 1 ,07	+ 0 ,02	+ 0 ,04	+ 0 ,02	4	Utrecht
31	21	„	1 3	20	„	12 54	II_e	III_r	+ 1 ,79	— 0 ,11	— 0 ,15	— 0 ,04	6,5	II éclipsé
32	21	„	11 54	20	„	23 45	I_e	III_r	— 4 ,21	+ 0 ,24	+ 0 ,18	— 0 ,06	7	Hong Kong
33	23	„	2 32	22	„	14 23	I_{ew}	II_r	— 5 ,90	+ 0 ,32	+ 0 ,29	— 0 ,03	9	Washington
34	24	„	10 13	23	„	22 4	II_e	I_r	— 1 ,22^5	+ 0 ,03	+ 0 ,01	0 ,02	4	Sydney
35	24	„	12 37	24	„	0 27	III_e	I_r	— 3 ,21	+ 0 ,20	+ 0 ,16	— 0 ,04	6,5	Hong Kong
36	26	„	11 17	25	„	23 8	IV_e	I_r	— 5 ,60	+ 0 ,35	+ 0 ,30^5	— 0 ,04^5	11	Hong Kong
37	26	„	13 43,5	26	„	1 34	IV_e	II_r	— 4 ,61	+ 0 ,31	+ 0 ,25	0 ,06	7	Madras, Hong Kong
38	26	„	15 49	26	„	3 40	I_{ew}	II_r	— 5 ,84	+ 0 ,32	+ 0 ,30	— 0 ,02	9	Madras

N°.	Temps civil de Paris	Temps moyen de Greenwich	r=rapproché e=éloigné: Satellite occulté	Satellite occultant	$x=x'$	Satellite occulté y	Satellite occultant y'	$y'-y$	Durée pour occultation centrale	Visible à
39	27 juin 0h27m	26 juin 12h18m	IVe	Ie	— 0r,18	— 0r,01	+ 0r,03	+ 0r,04	20m	[illegible]
40	27 „ 13 44	27 „ 1 35	IVe	Ie	+ 5 ,66	— 0 ,17	— 0 ,31	— 0 ,14	11	Madras, Hong Kong
41	27 „ 18 56	27 „ 6 47	IVe	IIIr	+ 7 ,38	— 0 ,20	— 0 ,45	— 0 ,25	10	Le Cap
42	27 „ 23 24	27 „ 11 14	IIe	Ie	— 1 ,38	+ 0 ,03	+ 0 ,07	+ 0 ,04	4	(Océan Atl.)
43	28 „ 11 57	28 „ 2 48	Ie	IIIr	— 3 ,49	+ 0 ,20	+ 0 ,17	— 0 ,03	7	Madras
44	30 „ 5 5,5	29 „ 16 56	Iee	IIr	— 5 ,75	+ 0 ,31	+ 0 ,31	0 ,00	4	Mt. Hamilton
45	1 juillet 12 34	1 juillet 0 25	IIe	Ie	— 1 ,53	+ 0 ,09	+ 0 ,04	— 0 ,05	4	Hong Kong
46	1 „ 15 40	1 „ 3 31	IIIe	Ie	— 3 ,93	+ 0 ,23	+ 0 ,21	0 ,02	5	Asie centrale
47	2 „ 16 21,5	2 „ 4 12	IIIe	IIr	+ 9 ,14	— 0 ,48	— 0 ,42	+ 0 ,06	12	„ „
48	3 „ 18 21	3 „ 6 12	Ie	IIr	— 5 ,68	+ 0 ,31	+ 0 ,31	0 ,00	7	Le Cap
49	3 „ 20 8	3 „ 7 58,5	IIIee	IVr	+15 ,30	— 0 ,85	— 0 ,79	+ 0 ,06	32	Berlin etc.
50	5 „ 1 44	4 „ 13 35,0	IIe	Ie	— 1 ,67	+ 0 ,03	+ 0 ,10	+ 0 ,07	4	Washington
51	5 „ 6 25	4 „ 18 16	IIe	IVr	+ 1 ,66	— 0 ,12	— 0 ,15	— 0 ,03	7	II éclipsé
52	5 „ 8 2,5	4 „ 19 53,2	IIe	IIIr	+ 2 ,80	— 0 ,17	— 0 ,29	— 0 ,12	7	Sydney
53	5 „ 17 58	5 „ 5 49	Ie	IIIr	— 2 ,75	+ 0 ,15	+ 0 ,15	0 ,00	6	Le Cap
54	5 „ 17 34	5 „ 5 25	Ie	IVr	— 3 ,04	+ 0 ,14	+ 0 ,09	— 0 ,05	7	Le Cap, Moscou
55	5 „ 21 54	5 „ 9 45	IIIr	IVr	— 4 ,85	+ 0 ,28	+ 0 ,16s	— 0 ,11s	79	Washington
56	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

58	8	„	18 11,8	8	„	6 55,5	IIIe	Ir	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
59	9	„	20 13	9	„	8 4	IIIe	IIr	+ 8 ,89	— 0 ,50	— 0 ,40	+ 0 ,10	11,5	Berlin, etc.
60	10	„	20 52	10	„	8 47	Ie	IIr	— 5 ,53	+ 0 ,31	+ 0 ,30	— 0 ,01	7	Utrecht
61	12	„	4 6,5	11	„	15 57	IIe	Ir	— 1 ,97^{5}	+ 0 ,04	+ 0 ,13	+ 0 ,09	4	Mt. Hamilton
62	12	„	20 57	12	„	8 47	Ie	IIIr	— 1 ,95	+ 0 ,11	+ 0 ,13^{5}	+ 0 ,02^{5}	6	Utrecht
63	13	„	5 25	12	„	17 15	IVe	IIIr	— 6 ,50	+ 0 ,35	+ 0 ,40	+ 0 ,05	10,5	Pacifique
64	13	„	20 39	13	„	8 30	IVe	Ir	— 0 ,27	+ 0 ,05	+ 0 ,05	0 ,00	6	☌ ♃
65	14	„	0 12,5	13	„	12 3	IVe	IIr	+ 1 ,20^{5}	— 0 ,01^{5}	+ 0 ,01^{5}	+ 0 ,03	4	IV éclipsé
66	14	„	10 8,5	13	„	21 59	Ie	IIr	— 5 ,42	+ 0 ,29	+ 0 ,32	+ 0 ,03	7	Perth
67	15	„	17 17	15	„	5 7	IIe	Ir	— 2 ,12	+ 0 ,04	+ 0 ,14	+ 0 ,10	4	Le Cap
68	15	„	22 1	15	„	9 51	IIIe	Ir	— 5 ,27	+ 0 ,28	+ 0 ,30	+ 0 ,02	9	Berlin, etc.
69	17	„	23 11	17	„	11 2	Ie	IIr	— 5 ,34	+ 0 ,29	+ 0 ,31^{5}	+ 0 ,02^{5}	6,5	Charkow
70	19	„	6 30	18	„	18 21	IIe	Ir	— 2 ,22	+ 0 ,06	+ 0 ,14	+ 0 ,08	4	Pacifique
71	19	„	15 5	19	„	2 56	IIe	IIIr	+ 3 ,77	— 0 ,22	— 0 ,15	+ 0 ,07	7	Asie centrale
72	19	„	23 56	19	„	11 47	Ie	IIIr	— 1 ,13^{5}	+ 0 ,05	+ 0 ,12	+ 0 ,07	6	Astrakan

Occultation de H_2 par L_2, le 15 juillet 1908, à $17^h 27^m$ temps civil de Paris.

	I						II				
	Longit. moy.	1	2	3	4	5	Longit. moy.	4	5	6	7
1858	9s 5°,74	7s 27°,5	1s 0°,8	0s 1°,4	0s 18°,1	10s 20°,9	8s 17°,66	3s 9°,0	10s 2°,8	0s 18°,6	11s 28°,5
1880	6 9 ,80	9 19 ,2	11 8 ,4	0 0 ,8	2 5 ,9	7 24 ,6	4 3 ,87	10 2 ,9	5 18 ,7	5 0 ,2	9 10 ,6
1830	0 6 ,20	11 22 ,6	3 8 ,9	11 28 ,6	10 4 ,2	10 20 ,7	2 2 ,03	2 2 ,1	0 16 ,5	9 8 ,9	1 2 ,3
Juillet	3 21 ,51	5 13 ,4	0 15 ,0	5 28 ,1	4 2 ,7	3 21 ,5	11 18 ,83	8 1 ,3	11 18 ,8	11 24 ,8	11 20 ,1
Juillet 1908	7 13 ,25	10 22 ,7	4 3 ,1	5 29 ,2	5 0 ,9	8 27 ,7	2 12 ,39	11 15 ,3	3 26 ,8	2 22 ,5	10 1 ,5
15j	10 28 ,85	0 12 ,6	0 1 ,2	0 13 ,8	11 19 ,6	10 28 ,8	11 9 ,25	11 24 ,8	11 9 ,2	11 9 ,7	11 0 ,3
17^h	4 24 ,14	0 ,6		0 ,7	2 12 ,3	4 24 ,1	1 11 ,81	1 6 ,2	2 11 ,8	2 11 ,8	2 11 ,8
27^m	3 ,82				1 ,9	3 ,8	1 ,90	0 ,9	1 ,9	1 ,9	1 ,9
	11 10 ,06	11 5 ,9	4 4 ,3	6 13 ,7	7 4 ,7	0 24 ,4	4 5 ,35	0 17 ,2	5 19 ,7	4 15 ,9	11 24 ,5
1	— 1 ,06					1	— 0 ,52				
2	— 0 ,16					2	— 0 ,08				
4	+ 0 ,43					4	+ 0 ,60				
	11 9 ,27						4 5 ,35				
S — G	4 17 ,37					S — G	4 17 ,37				
Amplitude	6 21 ,90					Amplitude	11 17 ,98				

$5 + 0°,53$
$6 - 0 ,32$
$7 \quad 0 ,00$
$- IX + 0 ,05$
$+ 0 ,26$

$5 + 1°,27$
$- IX + 0 ,05$
$+ 1 ,32$

$x = - 2^r,26 \quad y = + 0^r,14$

$x' = - 2^r,00 \quad y' = + 0^r,04$

$$-2^r,26 - 0,830\,\Delta t = -2^r,00 + 0,691\,\Delta t$$
$$-1,521\,\Delta t = +0^r,26$$
$$\Delta t = -0^h,172 = -10^m,3$$
$$x = -2^r,12.$$

Résultat: 15 juillet à $17^h16^m,7$ temps civil de Paris
= 5 16 ,7 „ moyen „ „
= 5 7 ,35 „ „ „ Greenwich.

On a tenu compte ici de ce que le nombre de jours bissextiles n'est pas le même de 1858 à 1908 d'une part et de 1830 à 1880 d'autre part; entre (1er janvier) 1830 et (1er janvier) 1880 il y a notamment 12 jours bissextiles, entre (1er janvier) 1858 et (1er janvier) 1908 il n'y en a que 11; la différence est prise en considération en prenant la ligne *Juillet*, qui contient le mouvement pour le mois de janvier jusqu'à juin incl., comme si 1908 était une année commune. Les pages 201, 209, 257 et 225, qui contiennent les mouvements par mois des quatre Satellites, portent notamment deux tables, dont l'une a en tête „Années communes", l'autre „Années bissextiles."

La cinquième ligne de ce calcul (Juillet 1908) peut servir pour toutes les conjonctions qui tombent dans ce mois.

Comme deuxième exemple nous prendrons l'occultation de III_c par II_c, pour laquelle le tracé a donné comme première approximation: 2 juin 1908 à $12^h9^m,3$ temps civil de Paris.

Occultation de III$_e$ par II$_e$, le 2 juin 1908, à 12^{h}9^m,3 temps civil de Paris.

	II								III					
	Long. moy.	1	2	3	4	5	6	7	Long. moy.	5	6	7	8	9
1908 juin	9s 1°,15	9s25°,6	4s0°,6	4s29°,6	8s13°,6	10s15°,6	9s10°,3	4s26°,0	0s17°,15	0s 7°,7	2 24°,3	2s 2°,0	8s 6°,3	6s26°,4
2j	3 11,37	0 0,9	0 0,1	0 1,0	1 21,1	3 11,4	3 11,4	3 11,4	1 20,32	1 20,3	1 20,3	1 20,3	1 20,3	1 20,3
12^h	1 20,69	0,5		0,5	0 25,5	1 20,7	1 20,7	1 20,7	0 25,16	25,2	25,2	25,2	25,2	25,2
9^m,3	0,63				0,3	0,6	0,6	0,6	0,32	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
	2 3,84	9 27,0	4 0,7	5 1,1	11 0,5	3 18,3	2 13,0	9 22,7	3 3,25	2 23,5	5 10,1	4 17,8	10 22,1	9 12,2
1	— 0,28							1	— 0,13					
2	— 0,07							2	— 0,04					
4	— 0,91			5 + 2°,89				4	+ 0,04					
				6 — 0,45				5	+ 0,15					
	2 2,58			7 + 0,03				6	+ 0,01		7 + 2°,01			
S — G	4 9,25			— IX — 0,11							8 + 0,11			
									3 3,28		9 + 0,03			
Amplitude	9 23,33			+ 2,36				S — G	4 9,25		— IX — 0,11			
			$x = -8^r,84$		$y = +0^r,40$									
								Amplitude	10 24,03		+ 2,04			
										$x' = -9^r,01$		$y' = +0^r,055$		

$$-8{,}84 + 0{,}280\,\Delta t = -9{,}01 + 0{,}453\,\Delta t$$
$$+0{,}17 \qquad = +0{,}173\,\Delta t$$
$$\Delta t = +0^h{,}983 = +59^m$$

Première approximation: 12 9 ,3

Deuxième approximation: 13 8 ,3

Si l'on reprend les calculs avec ce nombre on n'obtient pas encore l'égalité des élongations. Les amplitudes deviennent alors, pour II $9^s 27°{,}56$, et pour III $10^s 26°{,}08$, puis on trouve

$$-8^r{,}535 + 0^r{,}327\,\Delta t = -8^r{,}56 + 0^r{,}4645\,\Delta t$$
$$+0{,}015 \qquad = +0{,}1365\,\Delta t$$
$$\Delta t = +0^h{,}182 = +10^m{,}9$$

13^h 8 ,3

Troisième approximation: 13 19 ,2 temps civil de Paris
= 1 19 ,2 „ moyen „ „
= 1 9 ,85 „ „ „ Greenwich.

Deuxième partie. — Eclipses.

Il n'y a qu'un pas à faire pour passer des occultations aux éclipses.

Entre les deux phénomènes il y a cette différence, que les occultations, ainsi que je l'ai mentionné tantôt (p. 308), ont été observées plus d'une fois, tandis que nous n'avons qu'un seul rapport, et encore incomplet, d'une éclipse d'un Satellite par un autre, par une lettre particulière de M. Stanley Williams du 7 décembre 1906. Il nous écrivit notamment: „With regard to the heliocentric conjunctions there does „seem to be one observation of the rare phenomenon of the eclipse of „a satellite in the shadow of another one on record. It occurred on the „14th August 1901 and was observed bij Mr. J. Comas at Valls in „Spain and by the writer at Hove. Mr. Comas' observation was published „in the French periodical L'Astronomie, 1891, p. 397 (read 398) (1). „The following is an account of my observation. No particulars of this „have hitherto been published.

„„1891 Aug. 14. $6\frac{1}{2}$ inch reflector, power 225. Definition good,

„„but interruptions from cloud. Satellite I transitted on the S. Equa-
„„torial belt, (N. component). *Immediately* on its entering the disc it
„„became lost to view. At 11^h19^m a minute dark spot was seen about
„„in the position which the Satellite should have then occupied. The
„„shadows of Satellites I and II were confounded together at this time,
„„there seeming to be one very large, slightly oval, black spot. At
„„11^h59^m the two shadows were seen nearly separated, thus, ●● .
„„The preceeding shadow must be that of II, the following and *much*
„„*smaller* one that of I. At 12^h10^m satellite I was certainly visible as
„„a dark spot, much smaller than the shadow of either Satellite. It had
„„moved with respect to the shoulder of the Red Spot Hollow, so that
„„there could be no doubt of its identity. It is on the north band of
„„the north (south) equatorial belt. (2). Satellite I [This should evi-
„„dently be II] shines brightly on the disc near the limb. Definition
„„good, but much thin cloud about.""

„The foregoing is an almost literal transcript from my observation
„Book. I take it that when Satellite I entered on the disc of Jupiter,
„it was already partly eclipsed by the shadow of II, so that it became
„lost to view immediately, instead of shining, as usual, for some time
„as a brillant disc. Also that the minute dark spot seen at 11^h49^m was
„produced by the portion of the shadow of II, then projected on I.
„Also that the small size of the following shadow spot at 11^h59^m was
„due to a part only of the shadow of II being projected on the disc
„of Jupiter, other part of this shadow having been intercepted by Satel-
„lite I. (3).

— — — „But combining Mr. Comas' observation with my own,
„there can be no doubt but that Satellite I was actually partially eclip-
„sed by the shadow of II on the night of August 14, 1891. So far as
„I am aware, this is the only indubitable instance of one Satellite being
„eclipsed by the shadow of another" . . . . .

„P.S. The above times are Greenwich mean times. The Nautical
„Almanac time for the transit ingress of Satellite I is 11^h33^m". (4).

Avant de passer au calcul des instants de pareilles conjonctions héliocentriques, nous avons examiné jusqu'à quel point en général des éclipses d'un Satellite par l'ombre d'un autre sont possibles. Que de pareilles éclipses sont réellement possibles, cela nous est prouvé par les ombres des Satellites sur Jupiter même. Mais la question était de

savoir 1°. si dans *toutes* les conjonctions héliocentriques des Satellites l'ombre du Satellite antérieur atteint le Satellite postérieur, et 2°. s'il peut se présenter des éclipses totales.

Pour examiner ces deux questions, nous nous sommes figuré que les orbites fussent toutes dans un plan qui, prolongé, passerait par le centre du soleil, et qu'une droite partant du soleil, dans le plan de ces orbites, passât à côté de Jupiter, à une distance égale à son rayon, donc à une distance de son centre égale à son diamètre (voir pl. VIII). Cette droite coupe les quatre orbites des Satellites, chacune en deux points que nous appellerons, à partir du soleil, *g*, *e*, *c*, *a*, *b*, *d*, *f* et *h*. Pour plus de clarté nous avons ajouté la planche IX.

Supposons que I se trouve, soit en *a*, soit en *b*; dans les deux cas les autres Satellites se trouveront dans son cône d'ombre en venant: II_e en *d*, III_e en *f* et IV_e en *h*.

Les points d'intersection avec l'orbite de II sont *c* et *d*. Si II_r se trouve en *c*, I_r peut aussi être éclipsé en *a*, mais de même I_e en *b*, III_e en *f* et IV_e en *h*.

Mais si II_r se trouve en *d*, il ne peut éclipser que III_r et IV_e, savoir III_e en *f* et IV_e en *g*.

Les points d'intersection avec l'orbite de III sont *e* et *f*. Si ce Satellite est en *e*, il peut éclipser II_r en *c*, I_r en *a*, I_e en *b*; II_e en *d* et IV_e en *h*. Mais s'il est en *f*, il n'en peut être ainsi que pour IV_e en *h*.

Quant au Satellite IV, ce n'est évidemment qu'en *g* qu'il peut éclipser un autre Satellite, notamment chacun des trois autres aux deux points d'intersection déjà considérés de son orbite.

Chaque Satellite pourrait donc donner lieu à six éclipses différentes, mais, si l'on calcule les rayons des cônes d'ombre absolue aux endroits des autres Satellites, on obtient dans certains cas un résultat négatif, ce qui prouve que le sommet du cône d'ombre n'atteint pas l'autre Satellite.

Si nous prenons pour les rayons des Satellites les valeurs données dans la première partie, mais diminuées de l'influence de l'irradiation, (5), nous constatons que ce n'est que dans deux cas que l'éclipse peut être totale. III_r peut notamment éclipser totalement II_r et I_r; I_r peut éclipser à très peu près totalement II_e.

Dans le cas où l'ombre n'atteint pas l'autre Satellite, un habitant de ce dernier verrait une éclipse annulaire de soleil; cela a lieu notamment:

pour I_r par rapport à IV_e
„ II_r „ „ „ III_e et IV_e
„ III_r „ „ „ IV_e
„ IV_r „ „ „ II_e et III_e.

Dans les 15 autres cas on peut observer une éclipse partielle.

Mais il est évident que cela ne se présentera que si, au moment de la conjonction héliocentrique, la différence des latitudes héliocentriques $(y' - y)$ est moindre que la somme des rayons. Toutefois, comme en contrôlant les occultations observées par MM. Fauth et Nijland j'ai constaté que, dans ces cas, les tables de Damoiseau fournissaient parfois une différence de latitude un peu plus grande que cette somme, de sorte que les latitudes calculées d'après ces tables ne sont pas tout à fait dignes de confiance, j'ai consigné dans le tableau ci-annexé *toutes* les conjonctions héliocentriques entre le 1er avril et le 20 mai 1908 (ces deux dates y comprises).

Je remarquerai encore que la planche a été dessinée dans l'intention de représenter un cas défavorable, du moins pour le cas où le Satellite éclipsant est „rapproché" et le Satellite éclipsé est „éloigné". A mesure que la distance apparente (élongation) par rapport à Jupiter devient plus grande, la probabilité d'une éclipse devient de plus en plus grande pour ce cas.

Les préliminaires du calcul, savoir le tracé des orbites des Satellites, sont les mêmes que pour le calcul de la conjonction géocentrique (voir pl. VII), mais on doit d'abord déduire des instants des conjonctions *géocentriques* supérieures, empruntées au *Nautical Almanac*, les instants des conjonctions supérieures *héliocentriques* des Satellites, à l'aide de leurs mouvements horaires et de l'angle G, c. à d. de l'angle Terre-Jupiter-Soleil. Puis, dès que les longitudes jovicentriques moyennes ont été corrigées au point de vue des équations et des perturbations, on doit retrancher S, la longitude héliocentrique de Jupiter, au lieu de $S - G$, c. à d. la longitude géocentrique.

Des arguments le numéro 3 ne doit pas être calculé, puisque cet argument ne sert qu'à calculer, en combinaison avec 1, la latitude jovicentrique de la terre, dont la connaissance est inutile ici. Les schémas contiennent donc un colonne de moins pour chaque Satellite.

Nos résultats sont contenus dans le tableau ci-annexé. Du 1er avril au 20 mai nous avons trouvé 81 conjonctions héliocentriques, et, comme

le montre l'avant-dernière colonne $y - y'$, pour plusieurs d'entr'elles une éclipse paraît possible.

(1) Voici le rapport de M. José Comas.

Ombres de deux Satellites de Jupiter et éclipse. — Dans la nuit du 14 août, j'ai observé un phénomène bien rare: la coïncidence partielle, sur Jupiter, des ombres de ses deux premiers Satellites, et par suite l'éclipse de Soleil pour le Satellite I produite par le Satellite II.

A 11^h (temps de Barcelone) [1]) l'ombre du Satellite II est entrée sur la planète. Près du bord, elle n'était pas noire, mais d'un gris rougeâtre. Comme l'image était fort agitée, j'ai cessé d'observer, mais je suis retourné à l'observation vers 11^h37^m pour observer l'immersion du premier Satellite, qui a eu lieu à 11^h42^m (grossissement 100 fois; lunette de 4 pouces). J'ai été surpris de voir disparaître Io [2]) à son entrée sur le disque, ne se détachant pas en blanc, quoiqu'il se projetât sur la bande foncée équatoriale australe.

A 11^h52^m, avec des images plus tranquilles et un grossissement de 160, je remarquai que l'ombre complètement noire que l'on voyait était allongée dans une direction un peu inclinée vers la droite, relativement à l'axe de Jupiter. La phase maxima de l'éclipse du Satellite I était déjà passée de quelques minutes. A 11^h56^m je pris le petit dessin que j'ai l'honneur de vous adresser; les deux ombres se touchaient encore [3]). Aussitôt elles se séparèrent et, quoique je n'aie pas pu noter l'instant du dernier contact, je crois être assez près de la vérité, en disant qu'il s'est effectué vers 11^h58^m.

L'empiètement d'une ombre sur l'autre pourrait être de la troisième partie du diamètre. Dans cette supposition la distance minima des centres des deux ombres a dû avoir lieu vers 11^h47^m et le premier contact

---

[1]) Barcelone est à 2°10′ à l'est de Greenwich; le temps m. de Barcelone est donc en avance de 8^m40^s sur celui de Greenwich.

[2]) Le Nautical Almanac mentionne depuis quelques années les noms que Simon Marius a proposés pour les Satellites de Jupiter: Io, Europe, Ganymède et Callisto.

[3]) Ce dessin montre la portion de droite (suivante), dans une lunette renversante, de la tache rouge bien connue dans l'hémisphère austral de Jupiter. Là-dessous, à quelque distance, une bande sombre, sur laquelle deux ombres noires, de 4 mm. de diamètre chacune, formant un tout; la corde commune a 2,5 mm. de longueur, et la longueur totale des deux ombres réunies est 7,2 mm ; la direction de la ligne des centres fait un angle de 40° avec la verticale. Le *mouvement* des deux ombres doit pourtant avoir été à peu près horizontal.

vers 11^h37^m. Le premier Satellite pénétra dans le disque de la planète à 11^h12^m, comme j'ai dit plus haut, donc l'éclipse a commencé quand le Satellite se projetait encore dans l'espace, cinq minutes avant l'immersion.

L'invisibilité de l'ombre d'Europe sur Io peut s'expliquer par la mauvaise qualité des images. Toutefois, la pénombre et l'ombre du Satellite II ont été suffisantes pour diminuer notablement l'éclat du premier.

(2) L'auteur veut dire évidemment que dans une lunette *à image renversée* la tache obscure semblait se trouver sur la bande nord de la zone boréale, mais que c'était en réalité la bande sud de la zone australe. On sait aussi que c'est là que se trouve ce qu'on appelle la *tache rouge*.

(3) L'auteur ne dit pas qu'il a vu une ombre de II sur I, ce qui peut s'expliquer, à ce qu'il me semble, par l'existence d'une irradiation et d'une diffraction.

(4) Les tables de Damoiseau, 2e section, donnent, pour la conjonction héliocentrique des deux Satellites: 23^h45^m temps civil de Paris = 11^h36^m Grw. Le *Nautical Almanac* de 1891 donne, pour le 14 août, les instants suivants:

II	Shadow.	Ingress	10^h51^m	M. T.	Grw.
I	„	„	10 59	„ „	„
I	Transit	„	11 33	„ „	„
II	„	„	11 58	„ „	„
I	Shadow.	Egress	13 18	„ „	„
II	„	„	13 45	„ „	„
I	Transit	„	13 51	„ „	„
II	„	„	14 49	„ „	„

Si l'on calcule d'après la 1ère, la 2e, la 5e et la 6e ligne l'instant où les deux ombres devaient coïncider, on obtient 11^h31^m, soit une différence de 5^m avec le nombre donné tantôt; mais on doit tenir compte de ce que les deux Satellites marchaient dans le même sens, de sorte que en cinq minutes leur déplacement relatif, donc aussi celui de leurs ombres, était très petit.

M. Stanley Williams ne paraît pas avoir vu une ombre avant 11^h49^m t. m. de Greenwich, tandis que M. Comas vit déjà à $11^h13^m20^s$ t. m. de Greenwich une ombre allongée; puis M. Stanley

WILLIAMS trouva que l'ombre de II était plus grande que celle de I, tandis que M. COMAS leur attribua le même diamètre. Ici c'est sans aucun doute l'observateur anglais qui a raison.

(5) En l'année 1901 M. SEE a mesuré à diverses reprises les diamètres des Satellites de Jupiter à l'aide de la lunette de 28 pouces de Washington. Il s'est servi à cet effet d'un micromètre à réticule, mais s'est appliqué à rendre inoffensives les erreurs systématiques de l'instrument. (Voir *Astr. Nachr.* n°. 3764, 21 janv. 1902. La communication de M. SEE est datée du 19 oct. 1901).

Dans les mois de mai à août (inclus) de l'année 1901, il avait toujours mesuré ces diamètres pendant la nuit, et était considérablement gêné par les ondulations du bord, provenant des mouvements de l'air. Plus tard, dans les mois de septembre et octobre de la même année, il fit ses mesures peu de temps avant et après le coucher du soleil, lorsqu' un éclairage artificiel est inutile et que les Satellites se présentent comme des disques bien tranquilles; il s'est servi du reste d'un petit écran contenant du chlorure de cuivre et de l'acide picrique, pour donner au champ et au Satellite une couleur jaune verdâtre. Dans ces conditions les valeurs trouvées pour les diamètres étaient toutes plus petites que dans les déterminations antérieures, ce que l'on attribue à l'irradiation. Voici ses résultats, réduits à la distance moyenne du soleil à Jupiter (5,2028).

Satellite	De nuit	De jour	Différence attribuée à l'irradiation
I	1″,077 ± 0″,018	0″,834 ± 0″,006	0″,243 ± 0″,019
II	0 ,976 ± 0 ,043	0 ,747 ± 0 ,007	0 ,229 ± 0 ,0435
III	1 ,604 ± 0 ,038	1 ,265 ± 0 ,009	0 ,339 ± 0 ,039
IV	1 ,441 ± 0 ,018	1 ,169 ± 0 ,006	0 ,272 ± 0 ,019

Il est bien remarquable que c'est précisément le Satellite le plus brillant, III, qui présente la plus forte irradiation. Toutefois, si l'on considère cette différence comme incertaine, et si l'on réunit les divers résultats obtenus pour l'irradiation, en tenant compte des poids déduits des erreurs probables, on obtient:

$$\text{Irradiation} = 0'',264 \pm 0'',012.$$

Ceci s'applique au diamètre tout entier, de sorte qu'on doit prendre pour irradiation de chaque côté 0″,132; mais ce nombre ne se rapporte qu'à la lunette de Washington, où, vu la grande ouverture de l'objectif, la diffraction aura été très faible.

Je ne puis m'abstenir de mentionner ici quelle est la grandeur de la différence entre les diamètres observés par le même observateur en 1900 et en 1901.

	1900	1901	1901—1900
I	0″,672 ± 0″,098	0″,834 ± 0″,006	+ 0″,162
II	0 ,624 ± 0 ,078	0 ,747 ± 0 ,007	+ 0 ,121
III	1 ,361 ± 0 ,103	1 ,265 ± 0 ,009	— 0 ,096
IV	1 ,277 ± 0 ,083	1 ,169 ± 0 ,006	— 0 ,108

M. Stone, d'Oxford, me raconta qu'un jour Airy, dans une conversation au sujet de la détermination de déclinaisons à l'aide d'un cercle méridien, lui dit: „I assure you, Stone, a second is a very small thing".

Considérant les différences mentionnées entre les résultats de deux séries d'observations, obtenues par un même observateur dans deux années consécutives, on arrive à cette conclusion que maintenant encore, dans des observations à l'aide d'un micromètre: „a tenth of a second is an exceedingly small thing."

Appendice. *Jusqu'à quel point les tables de* Damoiseau *sont elles encore dignes de foi?*

Nous avons déjà dit dans la 1re partie, aux pages 324 et 326, pourquoi nous nous jugions en droit de nous servir, pour ces prédictions, des tables de Damoiseau. Nous y ajouterons que nous avons encore examiné quelles différences ont fourni, dans quelques-unes des dernières années, les observations des éclipses des Satellites, effectuées à divers observatoires, avec ces tables ou plutôt avec les instants donnés par le *Nautical Almanac*. M. Kress, préparateur à l'observatoire d'Utrecht, nous a rendus de grands services à parcourir avec soin quelques tomes des *Astronomische Nachrichten* et des *Monthly Notices*, additionner les instants observés de la disparition et de la réapparition pour chaque Satellite séparément, réduire au méridien de Greenwich et comparer avec les données du *Nautical Almanac*. Pour simplifier l'examen, il n'a noté,

sur notre demande, que les observations du dernier rayon lumineux à la disparition et du premier à la réapparition [1]). Nous avions l'intention d'étendre cet examen aux années 1894 à 1905 ou 6, mais, lorsqu'il fut terminé pour quatre années et que nous eûmes pris connaissance des résultats, nous fumes d'avis que nous étions suffisamment renseignés, et le résultat général était, que les tables étaient encore suffisamment précises pour notre but, de préparer les astronomes à l'observation des occultations et éclipses mutuelles des Satellites.

Maintenant que le travail est achevé, sans que nous prétendions toutefois avoir obtenu un degré de perfection que nous n'avons pas, d'ailleurs, tâché d'atteindre (nous n'avons pas examiné les périodiques français, américains etc.), nous croyons bien faire en communiquant les résultats.

Voici les observatoires sur lesquels ont porté nos recherches:

	Ouverture des objectifs des lunettes, en mm.
Greenwich	102, 170, 254, 714
Utrecht	260
Uccle	150
Jéna (Winkler)	162
Halifax (Gledhill)	237
Pola	162
Christiania	74, 190
Kasan	66, 81, 84, 96, 244
Göttingue	161
Windsor (Tebbutt) près Adelaïde	203
Lyon (une seule observation) . .	2

A Greenwich, Christiania et Kasan les éclipses ont été souvent observées par plus d'un observateur, au moyen de lunettes d'ouvertures différentes. Pour ces observatoires, nous n'avons fait servir au calcul que l'instant où le phénomène était observé dans la lunette ayant la

[1]) Dans l'introduction à ses tables, Delambre ne dit pas clairement *quel* est l'instant que ses tables fournissent, mais certains passages permettent de comprendre qu'il a en vue les instants *nommés ici*. C'est ainsi qu'il dit, au bas de la page LIII: „*Les demi-durées ont été un peu diminuées, pour les rapprocher des observations qu'on a faites depuis la découverte des lunettes achromatiques*".

Telle est aussi la manière de voir de Laplace, ainsi qu'on le reconnaît au chap. VIII du 8e livre de la Mécanique Céleste.

plus grande ouverture. En général l'observateur qui se servait de cette lunette pouvait y observer le Satellite plus longtemps que les autres observateurs à la disparition, et le revoir plus tôt à la réapparation; cependant il y a quelques exceptions à cette règle.

Dans les corrections des données du *Nautical Almanac*, trouvées pour les éclipses dans la même période d'opposition de Jupiter, nous n'avons jamais pu constater la moindre allure; elles oscillaient toujours autour d'une valeur moyenne, de sorte qu'il n'y avait aucun danger à prendre la moyenne arithmétique; ce procédé aurait d'ailleurs été encore parfaitement exact, s'il y avait eu à constater une allure *régulièrement* croissante ou décroissante. Nous n'avons pas tenu compte dans la suite des diverses ouvertures des objectifs; quand ces ouvertures dépassent une certaine grandeur, p. ex. 150 mm^2., une augmentation d'ouverture n'a plus qu'une influence négligeable, tant théoriquement que pratiquement.

Voici maintenant les résultats auxquels nous sommes arrivés:

Correction des instants des éclipses des Satellites de Jupiter, donnés par le *Nautical Almanac*.

Opposition	Moyenne corr. N.A. Disapp.	Nombre	Erreur moyenne	Moyenne corr. N.A. Reapp.	Nombre	Erreur moyenne	$\frac{1}{2}(D+R)$	*e.m.*
				I.				
1894/95	+ 37^s	3	± 14	— 18^s	25	+ 4^s	+ 9^s,5	± 7^s
1895/96	+ 30	9	8	0	32	4	+ 15	4^s
1897	— 19^s	2	18	— 5	12	6	— 12	9^s
1898	+ 11	15	6	+ 7	13	6	+ 6	4
				II.				
1894	— 78	2	± 32	0	7	± 11^s	— 39^s	17^s
1894/95	+ 52	4	22^s	— 42	15	7^s	+ 5	12
1895/96	+ 73	6	18	— 4	19	6^s	+ 34	10
1897	— 72	3	26	+ 11	10	9	— 30	14
1898	— 36	5	20	— 15	9	9^s	— 26	11

Opposition	Moyenne corr. N.A. Disapp.	Nombre	Erreur moyenne	Moyenne corr. N.A. Reapp.	Nombre	Erreur moyenne	$\frac{1}{2}(D+R)$	e.m.
				III.				
1894	+ 151s	3	± 22s	— 242s	3	± 38s	— 45s	± 25s
1895	+ 101	4	19	— 127	4	33	— 13	11s
1895/96	+ 87	9	13	- 50	9	22	+ 19	11s
1897	+ 181	4	19	+ 37	9	22	+ 109	14s
1898	+ 266	4	19	+ 10	1	66	+ 138	34
1899	+ 361	3	22	— 126	4	33	+ 118	20
				IV.				
1895	+ 21m45s	3	—	— 17m 9s	2		+ 138s	
. . . .	. . . . .	. .	. . . .	. . . . .	. .	. . . . .	. . . . .	. . .
1895/96	+ 3 49	10	± 25	— 3 17	7	± 22s	+ 16	± 17s
1897	— 0 2	2	± 57	+ 1 16	1	60	+ 37	— 41

Erreurs moyennes, dans l'ensemble, pour une seule observation.

	Disappearance	Reappearance	Moyenne	DELAMBRE[1]) Introd. p. LIV
I	± 25s	± 20s	± 22s5	17s5
II	45	29	37	
III	37	66	51,5	88,5
IV	80	60	70	72,5 (en rejetant les observations qui s'écartaient de plus de 3 minutes).

On voit par les chiffres communiqués ici que les plaintes au sujet de l'imprécision croissante des tables de DAMOISEAU sont un peu exagérées, du moins pour les deux premiers Satellites.

Eu égard aux erreurs moyennes, mentionnées dans la dernière colonne, la correction la plus probable pour l'époque 1894—1898 serait:

pour I + 8s,0 avec une erreur moyenne de ± 2s,6
et „ II — 3 ,8 „ „ „ „ „ ± 5 ,4

mais ces deux corrections sont incertaines.

[1]) DELAMBRE mentionne les différences moyennes; nous les avons multipliée par $1^1/_4$ pour obtenir les erreurs moyennes.

Il paraît en être autrement pour III. Il est vrai que la correction négative aux réapparitions pourrait, comme les positives aux disparitions, être attribuées à l'emploi de lunettes plus fortes; mais il semble pourtant que dans les nombres de l'avant dernière colonne il y a une certaine allure, qui demande un examen plus approfondi.

Quant au Satellite IV, l'année 1895 donna de grandes corrections, mais, après une période de deux années, pendant lesquelles il n'y eut pas d'éclipses de cet astre, parce qu'au moment de l'opposition il passait au nord du cône d'ombre, cette année commençait une nouvelle ère d'éclipses. Or, dans ces circonstances le Satellite, qui linéairement s'élève alors assez haut au-dessus de l'orbite de Jupiter, ne traverse le cône d'ombre que suivant une courte corde; une petite erreur sur la latitude suffit alors pour en causer une grande dans la durée de l'éclipse. Très éloquentes à ce sujet sont les observations de M. Winkler à Iéna et celles de l'observateur de l'Observatoire d'Uccle, près Bruxelles, du 8 mars 1895. Ils ont notamment trouvé la correction:

	Iéna	Bruxelles	Moyenne
à la disparition	$+19^m48^s$	$+21^m58^s$	$+20^m53^s$
„ „ réapparition	$-19\ 36$	$-18\ 33$	$-19\ 4{,}5$,

d'où résulte clairement que ce n'était pas tant la longitude moyenne des Satellites qui avait besoin de correction. On peut chercher l'explication de ces grandes différences ou bien dans le fait qu'il faudrait apporter une correction à la longitude de IV, ou au nœud de son orbite, ou encore à la valeur admise pour l'aplatissement de Jupiter, ou bien dans cette circonstance que, dans de pareilles éclipses, la diminution d'éclat est *très lente*.

Au reste, pour ce qui regarde cette éclipse, d'après le *Nautical Almanac* de 1895, elle serait la quatrième après la longue période pendant laquelle il n'y eut pas d'éclipses de ce Satellite. Voici les données des pages 450, 452 et 454:

17 janv.	D.	1^h	36^m	16^s	t.	m.	Gr.,	R	2^h	8^m	17^s,	donc durée	32^m	1^s
2 févr.	„	19	26	12	„	„	„	„	20	36	58,	„ „	1^h	10 46
19 „	„	13	24	6	„	„	„	„	14	59	3,	„ „	1	34 57
8 mars	„	7	24	14	„	„	„	„	9	18	28,	„ „	1	54 14

mais, d'après l'observation de M. Scott-Hansen, qui fit les observations astronomiques dans le dernier voyage polaire sous la direction de

M. NANSEN, le Satellite IV n'a pas été éclipsé du tout le 17 janvier [1]).

Le 2 février 1895, IV n'aurait pas non plus été éclipsé; je ne me rappelle plus où j'ai trouvé mentionnée cette observation négative; mais le 19 février un observateur de Greenwich trouva, à l'aide de l'équatorial de Sheepshanks, dont l'objectif a 120 mm. d'ouverture, au moment de la disparition de IV, une correction de $+ 23^m 30^s$, ce qui s'accorde assez bien avec les résultats susmentionnés, obtenus le 8 mars à Uccle et à Iéna.

Si nous admettons la moyenne des observations à Bruxelles et à Iéna, la durée de l'éclipse était ce jour-là $1^h 44^m 14^s - 39^m 57^s.5 = 1^h 14^m 16^s.5$, un nombre qui peut être utile pour l'amélioration des éléments de IV.

La différence trouvée à cette occasion ne peut pas être attribuée à un aplatissement trop faible, car la valeur admise par DAMOISEAU pour cet aplatissement, $\frac{1}{13,19}$, est déjà plus forte que celles mesurées par la plupart des observateurs; mais, si l'on a égard aux résultats obtenus par M. DE SITTER (voir le travail mentionné) on remarque que le nœud ascendant du 4e Satellite a besoin d'une augmentation de longitude d'environ $+ 10°$, tandis que l'on trouve pour inclinaison sur le plan fixe $0°,2501 = 15'2''4$, ce qui ne dépasse pas même d'une minute le nombre donné par DAMOISEAU.

Les autres éclipses de IV en 1895 et celles des deux années suivantes n'ont pas donné d'écarts extraordinaires. Et, comme en 1908 les éclipses des Satellites seront à peu près centrales, ainsi que l'indiquent les dessins accompagnant le tableau de ces phénomènes dans le *Nautical Almanac*, il n'y a pas à craindre que d'aussi grandes différences se présentent pour IV cette année-là.

Nous arrivons donc à cette conclusion que provisoirement le *Nautical Almanac*, qui est calculé d'après les tables de DAMOISEAU, en tenant compte de quelques corrections reconnues nécessaires, suffit encore pour la préparation des observations, si l'on excepte du moins la première éclipse de IV, après une période où ce Satellite n'a pas été éclipsé.

Utrecht, le 23 novembre 1906.

---

[1]) The Norwegian North Polar Expedition 1894—1896. Scientific Results, edited by FRIDTJOF NANSEN. VI. Astronomical Observations, arranged and reduced under the supervision of H. GEELMUYDEN, p. XXIV.

Résultats.

Conjonctions héliocentriques des Satellites entr'eux en avril et mai 1908.

N.B. AA. = Ann Arbor; Fl. = Flagstaff; HK. = Hong Kong; La Pl. = La Plata: P. = Perth; Tac. = Tacubaja; To. = Tokio
We. = Wellington; Wi. = Windsor.

N°.	Temps moyen de Greenwich	r = rapproché, e = éloigné: Satellite éclipsé	Satellite éclipsant	$x = x'$	Satellite éclipsé y	Satellite éclipsant y'	$y - y'$	Visible à
1	1 avril 4h 8m	I_e	II_r	+ 5r,70	— 0r,30	— 0r,25	— 0r,04^5	Kas., Taschk, Madras, HK., Perth.
2	2 „ 18 3	I_e	III_r	+ 3 ,21	— 0 ,16	— 0 ,20	+ 0 ,04	Lick, Fl., Tac., AA., Harvard.
3	3 „ 4 15	II_e	III_r	— 2 ,49	+ 0 ,08	+ 0 ,10	— 0 ,02	Kas., Taschk., Madr., HK., Perth, To
4	3 „ 9 51	II_e	I_r	+ 1 ,50	— 0 ,10^5	— 0 ,09	— 0, 01^5	Grw., Pulk., Kas., Taschk., La Pl., Rio.
5	3 „ 11 10	IV_e	III_r	— 6 ,19^5	+ 0 ,40	+ 0 ,32	+ 0 ,08	Grw., Pulk., Kasan, La Pl., Rio.
6	3 „ 16 26	IV_e	I_r	— 4 ,03	+ 0 ,30	+ 0 ,19	+ 0 ,11	Lick, Fl., Tac., AA., Harv., La Pl.
7	4 „ 16 52	IV_e	II_r	+ 6 ,03	— 0 ,20	— 0 ,27	+ 0 ,07	Lick, Fl., Tac., AA., Harvard.
8	4 „ 17 21	I_e	II_r	+ 5 ,75	— 0 ,31	— 0 ,25	— 0 ,06	Lick, Fl., Tac., AA., Harvard.
9	5 „ 19 56	III_e	II_r	— 9 ,24	+ 0 ,54	+ 0 ,30	+ 0 ,24	Wi., We., Lick. Fl., Tac., AA.
10	6 „ 20 12	III_e	I_r	+ 3 ,61	— 0 ,18^5	— 0 ,21	+ 0 ,02^5	Wi., We., Lick, Fl., Tac., AA.
11	6 „ 22 58	II_e	I_r	+ 1 ,37	— 0 ,10	— 0 ,09	— 0 ,01	Perth, Tokio, Wi., We.
12	8 „ 6 31	I_{ee}	II_r	+ 5 ,82	— 0 ,31	— 0 ,25	— 0 ,06	Bresl., Pulk., Kas., Taschk., Madras.
13	9 „ 20 52	I_e	III_r	+ 3 ,85^5	— 0 ,18	— 0 ,24	+ 0 ,06	Wi., We., Lick, Fl.
14	10 „ 7 28	II_e	III_r	— 2 ,05^5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
15	10 „ 12 1	II_e	I_r	+ 1 ,21	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

16	19	„	7 28	II	III	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	11	„	15 42 distance minima	II	IV	IV + 7 ,96	— 0 ,36	— 0 ,48	+ 0 ,12	Lick, Fl., Tac., AA., Harv., La Pl., Rio.
17	11	„	19 43	I_{ee}	II_r	+ 5 ,88	— 0 ,31[5]	— 0 ,26	— 0 ,05[5]	Wi., We., Lick, Fl., Tac., AA.
18	11	„	20 24	I_{ee}	IV_r	+ 5 ,99	— 0 ,32	— 0 ,38	+ 0 ,06	Wi., We., Lick, Fl.
19	12	„	23 33	III_e	II_{ew}	— 9 ,41	+ 0 ,54	+ 0 ,45	+ 0 ,09	Perth, HK., Tokio, Wi., We.
20	13	„	3 57	III_e	IV_r	— 7 ,35	+ 0 ,42	+ 0 ,27	+ 0 ,15	Kasan, Taschk., Madr., HK.
21	13	„	23 22	III_e	I_r	+ 2 ,64	— 0 ,16	— 0 ,19	+ 0 ,03	HK., Perth, Tokio, Wi., We.
22	14	„	1 11	II_e	I_r	+ 1 ,11	— 0 ,09	— 0 ,06	— 0 ,03	HK., Perth, Tokio, Wi.
23	15	„	8 57	I_{ee}	II_r	+ 5 ,93	— 0 ,32	— 0 ,26	— 0 ,06	Grw., Pulk., Kas., Taschk., Rio.
24	16	„	23 44	I_e	III_r	+ 4 ,45[5]	— 0 ,23	— 0 ,26	+ 0 ,03	HK., P., To., Wi., We.
25	17	„	10 41	II_e	III_r	— 1 ,61	+ 0 ,03	+ 0 ,08	— 0 ,05	Grw., Pulk., Kasan., La Pl., Rio.
26	17	„	14 17	II_e	I_r	+ 0 ,98	— 0 ,09	— 0 ,06	— 0 ,03	Grw., Fl., Tac., AA., Haw., La Pl., Rio.
27	18	„	22 11	I_{ee}	II_r	+ 5 ,97	— 0 ,32	— 0 ,26	— 0 ,06	Perth, To., Wi., We.
28	19	„	5 15	IV_e	III_{ew}	—15 ,28	+ 0 ,80	+ 0 ,85	— 0 ,05	Kasan, Taschk., Madras.
29	19	„	22 57	IV_e	II_r	— 8 ,69	+ 0 ,18	+ 0 ,43	+ 0 ,05	HK., Perth, Tokio, Wi., We.
30	20	„	3 14	III_e	II_r	— 9 ,54	+ 0 ,55	+ 0 ,45	+ 0 ,10	Taschk., Madras, HK., Perth, To.
31	21	„	1 45	III_e	$I_r^{(ew)}$	+ 2 ,27	— 0 ,12	— 0 ,13	+ 0 ,01	Madras, HK., P., Tokio.
32	21	„	1 46	IV_e	I_r	+ 2 ,26	— 0 ,05	— 0 ,12	+ 0 ,07	Madras, HK., P., Tokio.
33	21	„	1 52	IV_e	III_e	+ 2 ,33	— 0 ,05	— 0 ,12	+ 0 ,07	Madras, HK., P., Tokio.
34	21	„	3 23	II_e	I_r	+ 0 ,845	— 0 ,088	— 0 ,044	— 0 ,044	Taschk., Madr., HK., P., Tokio.
			12 19	IV_e	II_e	+ 6 ,62	— 0 ,39	— 0 ,44	+ 0 ,05	Grw., Pulk., Harv., La Pl., Rio.
35	22	„	15 13	id. d.	max.	8,01 et 7 ,84	— 0 ,32	— 0 ,40	+ 0 ,08	Lick, Fl., Tac., AA., Harv., La Pl.
			17 56	„	„	+ 8 ,88	— 0 ,38	— 0 ,44	+ 0 ,06	We., Lick., Fl., Tac., AA., Harv.
36	22	„	9 41	IV_e	III_{ee}	+14 ,84	— 0 ,66	— 0 ,83	+ 0 ,17	Grw., Pulk., Kasan., La Pl., Rio.
37	22	„	11 27	I_{ee}	II_r	+ 6 ,01	— 0 ,32	— 0 ,26	— 0 ,06	Grw., Pulk., (Kasan), La Pl., Rio.
38	24	„	2 41	I_e	III_r	+ 5 ,02	0 ,255	0 ,28	+ 0 ,025	Taschk., Madr., HK., P., To.
39	26	„	0 41	I_{ee}	II_r	+ 6 ,03	— 0 ,33	— 0 ,25	— 0 ,08	HK., P., To., Wi.

N.	Temps moyen de Greenwich	r = rapproché, e = éloigné: Satellite éclipsé	Satellite éclipsant	$x-x'$	Satellite éclipsé y	Satellite éclipsant y'	$y-y'$	Visible à
40	27 avril 7h 5m	III$_r$	II$_r$	— 9r,62	+ 0r,54	+ 0r,45	+ 0r,09	Bresl., Pulk., Kasan, Taschk.
41	28 „ 4 28s	I$_e$	III$_r$	+ 1 ,57	— 0 ,08	— 0 ,09	+ 0 ,01	Kasan, Taschk., Madr., HK.
42	28 „ 5 36	II$_r$	I$_r$	+ 0 ,58	— 0 ,03	— 0 ,065	+ 0 ,035	Kasan, Taschk., Madras.
43	28 „ 13 29	IV$_e$	III$_r$	+ 6 ,41	— 0 ,36	0 ,36	0 ,00	Grw., Tac. AA., Harv., La Pl., Rio.
43*	28 „ 16 18	II	III	II + 7 ,31 III + 7 ,80	— 0 ,38	— 0 ,49	+ 0 ,06	
	$x-x'$ diminue peu à peu en valeur absolue, et atteint son minimum 0,49 à l'instant indiqué, puis augmente de nouveau. Il n'y a donc pas d'éclipse.							
44	29 „ 3 45	I$_e$	IV$_r$	+ 0 ,27	— 0 ,02	— 0 ,08	+ 0 ,08	Taschk., Madr., HK.
45	29 „ 13 57	I$_{ew}$	II$_r$	+ 6 ,05	— 0 ,33	— 0 ,26	— 0 ,07	Tac., AA., Harv., La Pl., Rio.
46	1 mai 17 5	II$_e$	III$_r$	0 ,74	— 0 ,01	— 0 ,62	+ 0 ,61	Lick, Fl., Tac., AA., Harv., La Pl.
47	1 „ 18 43	II$_e$	I$_r$	+ 0 ,44	— 0 ,07	— 0 ,02	— 0 ,05	Lick, Fl., Tac., AA.
48	3 „ 3 16	I$_{ew}$	II$_r$	+ 6 ,06	— 0 ,32s	0 ,24	— 0 ,08s	Taschk., Madr., HK., P., Tokio.
49	4 „ 11 7	III$_e$	II$_{ew}$	— 9 ,61	+ 0 ,54	+ 0 ,45	+ 0 ,09	Grw., Pulkowa.
50	5 „ 7 48	II$_e$	I$_r$	+ 0 ,31	— 0 ,07	— 0 ,02	— 0 ,05	Grw., Pulk., Kasan, Taschk.
51	5 „ 8 17	III$_e$	I$_r$	— 0 ,10	— 0 ,09	— 0 ,01	— 0 ,08	Grw., Pulk., Kasan, (Taschk.).
	5 „ 14 2	III$_e$	II$_e$	+ 4 ,63	— 0 ,26	— 0 ,26	0 ,00	Tac., AA., Harv., La Pl., Rio.
52	5 „ 17 57	dist.	max.	+ 6‴,64 + 6″,85	— 0 ,38	— 0 ,36	+ 0 ,02	We., Lick, Fl., Tac., AA.
	5 „ 21 39	III$_e$	II$_e$	+ 8 ,43	— 0 ,42	— 0 ,49	+ 0 ,07	To., Wi., We., Lick.
53	6 16 28	I	II	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
54	7 6 27	IV	I	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

55	7	„	6 37 5	IV_e	II_r	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
56	8	„	7 4	IV_e	III_r	+ 6 ,90	0 ,38	— 0 ,29	— 0 ,09	Bresl., Pulk., Kasan, Taschk., Madr.
57	8	„	20 54	II_e	I_r	+ 0 ,18	— 0 ,06	0 ,00	— 0 ,06	Wi., Wellington.
58	8	„	23 25	I_r	III_r	— 2 ,04	+ 0 ,12	+ 0 ,13	— 0 ,01	Perth, Tokio, Windsor.
59	9	„	5 29	I_{ew}	III_r	— 5 ,36	+ 0 ,32	+ 0 ,34	— 0 ,02	Kasan, Taschk., Madras.
60	10	„	6 0	$I_{(ce)}$	II_r	+ 5 ,99	— 0 ,32	— 0 ,38	+ 0 ,06	Kasan, Taschk., Madras.
61	10	„	16 41	I_r	II_r	— 0 ,97	+ 0 ,05	+ 0 ,10	— 0 ,05	Lick., Fl., Tac., AA., Harvard.
62	11	„	0 13	I_r	II_r	— 5 ,80	+ 0 ,32	+ 0 ,32	0 ,00	HK., P., Tokio.
63	11	„	15 26	III_e	II_{ew}	— 9 ,46	+ 0 ,25	+ 0 ,43	0 ,18	Lick., Fl., Tac., AA., Harvard.
64	12	„	9 54	III_e	I_r	+ 0 ,14	— 0 ,03	+ 0 ,01	— 0 ,04	Grw., Pulk., Kasan, La Pl., Rio.
65	12	„	10 0	II_e	I_r	+ 0 ,04	— 0 ,38	+ 0 ,12	— 0 ,50	Grw., Pulk., Kasan, La Pl., Rio.
66	12	„	10 41	III_e	II_e	+ 0 ,58	— 0 ,10	— 0 ,13	+ 0 ,03	Grw., Pulk., La Pl., Rio.
67	13	„	3 38	III_e	II_e	+ 9 ,32	— 0 ,55	— 0 ,45	— 0 ,10	Taschk., Madr., HK.
68	13	„	19 31	I_r	II_r	+ 5 ,89	— 0 ,33	— 0 ,25	— 0 ,08	We., Lick., Fl.
69	14	„	4 29	I_r	II_r	+ 0 ,10	— 0 ,05	+ 0 ,02	— 0 ,07	Taschk., Madras.
70	14	„	8 57	III_r	IV_r	+15 ,17	0 ,87	— 0 ,75	— 0 ,12	Grw., Pulk., Rio.
71	14	„	13 46	$I_{ew}^{(ce)}$	II_r	— 5 ,93	+ 0 ,32	+ 0 ,33	0 ,01	Tac., AA., Harv., La Pl., Rio.
72	15	„	9 48	I_e	IV_r	+ 5 ,59	— 0 ,32	— 0 ,29	— 0 ,03	Grw., Pulk., Kasan, La Pl., Rio.
73	15	„	22 59	II_e	IV_e	— 0 ,18	— 0 ,06	— 0 ,02	— 0 ,04	Perth, To., Wi.
74	15	„	23 7	II_e	I_r	— 0 ,09	— 0 ,06	+ 0 ,02	— 0 ,08	Perth, To., Wi.
75	16	„	11 59	I_e	IV_r	— 5 ,69	+ 0 ,30	+ 0 ,24	0 ,54	Grw., La Pl., Rio.
76	17	„	9 4	I_r	II_r	+ 5 ,75	— 0 ,31	0 ,23	— 0 ,08	Grw., Pulk., Kasan, La Pl., Rio.
77	17	„	11 22	III_r	IV_r	—14 ,82	+ 0 ,80	+ 0 ,70	+ 0 ,10	Grw., Pulk., La Pl., Rio.
78	17	„	16 9	$I_r^{(ew)}$	II_r	+ 1 ,22	— 0 ,08^5	— 0 ,02	0 ,06^5	Lick, Fl., Tac., AA., Harvard.
79	18	„	3 12	I_{ew}	II_r	— 6 ,00	+ 0 ,32	+ 0 ,32	0 ,00	Taschk., Madras, HK.
80	18	„	20 36	III_e	II_e	— 8 ,935	+ 0 ,51	+ 0 ,41	+ 0 ,10	Wi., Wellington.
81	20	„	8 8	III_e	II_e	+ 9 ,57	— 0 ,56	— 0 ,45	0 ,11	Grw., Pulk., Kasan.

SUR LES DIVERS ÉTATS D'ÉQUILIBRE DE CORPS FLOTTANTS AYANT LA FORME D'UN PARALLÉLIPIPÈDE RECTANGLE, DONT L'AXE LONGITUDINAL EST PARALLÈLE À LA SURFACE LIQUIDE.

PAR

D. J. KORTEWEG.

---

1. Ce sujet a déjà attiré plus d'une fois l'attention des mathématiciens hollandais.

A la suite de cette observation, que des poutres flottant sur l'eau tournent d'ordinaire une face vers le haut si elles sont en bois de chêne, et une arête si elles sont en sapin, BADON GHYBEN a fait proposer par la „Nederlandsch Wiskundig Genootschap" une question de concours sur l'influence du poids spécifique des poutres sur leur mode de flottation.

La réponse donnée à cette question, en 1847, par G. F. W. BAEHR [1]) ne satisfit BADON GHYBEN qu'en partie, parce qu'on y trouvait bien dans quelles circonstances les poutres peuvent tourner vers le haut une de leurs faces planes, mais non la position qu'elles prennent lorsqu'aucune face latérale ne vient se placer horizontalement. Voilà pourquoi il publia dans les annales de l'Institut Royal Néerlandais de 1850 [2]) un mémoire

[1]) *Nieuwe wis- en natuurkundige verhandeligen van het (wiskundig) Genootschap te Amsterdam*, etc. 2e deel, 2e stuk, 1854, pp. 74 à 90. La condition qui est déduite pour la stabilité de la position verticale était d'ailleurs déjà donnée, en 1746, par BOUGUER, à la page 265 de son „Traité du navire, de sa construction et de ses mouvements", ainsi que par EULER, dans sa „Scientia navalis" de 1749, voir 1e partie, p. 107, l'„Exemplum".

[2]) Tijdschrift voor de wis- en natuurkundige wetenschappen, uitgegeven door de eerste klasse van het Koninklijk Nederlandsch Instituut van wetenschappen, letterkunde en schoone kunsten, 3e deel, 1850, pp. 9 à 34. R. LORATTO donna aussi, dans le même tome, pp. 247 à 264, quelques considérations à propos de la solution de BADON GHYBEN, où il réussit à démontrer que, dans

qui ne manque pas de contenir bien des résultats à ce sujet; e. a. il donne la solution complète du cas où la section est carrée; bien entendu, si la poutre est suffisamment longue pour qu'elle flotte avec les arêtes longitudinales horizontales.

Mais déjà en 1650 CHRISTIAAN HUYGENS s'était occupé de la même question, dans le deuxième livre de son mémoire: „De iis quae liquido supernatant", qu'il écrivit à l'âge de vingt et un ans et qui ne fut pas encore publié jusqu'ici. On y trouve une solution, mise sous une autre forme évidemment, mais poussée à peu près aussi loin que celle de BADON GHYBEN.

C'est la préparation de l'édition de ce mémoire dans les „*Œuvres complètes de Christiaan Huygens*" qui m'engagea à étudier cette question.

Tout comme HUYGENS et les auteurs suivants, je me suis borné à considérer le cas où les arêtes longitudinales du parallélipipède flottant sont parallèles au niveau du liquide. Je constatai que, même moyennant cette restriction, ni la solution de HUYGENS ni celle de BADON GHYBEN ne peuvent être considérées comme complètes. C'est une pareille solution complète que je me propose de donner, à l'aide d'une certaine représentation graphique.

En effet, il est évident que les états d'équilibre d'un parallélipipède rectangle flottant sont, dans les circonstances mentionnées, parfaitement déterminées par le quotient ε du poids spécifique de la poutre et de celui du liquide, et par le rapport $b : a = \eta$ entre le plus petit côté b et le plus grand a de la section transversale du parallélipipède.

Si l'on indique donc par ①, ②, ③ ou ③', ④ et ⑤, comme dans les figures ci-après, la nature des diverses positions possibles, un plan où l'on porte ε et η suivant des axes coordonnés peut être divisé en régions, de telle manière que la nature des états d'équilibre possibles d'un parallélipipède, à valeurs données de ε et η, est entièrement déterminée par la région dans laquelle tombe le point représentatif (ε, η), et peut être indiquée par des chiffres placés dans cette région.

---

le cas où deux des quatre arêtes longitudinales surnagent, chaque état d'équilibre oblique est stable. Dans le cas où il n'y a qu'une seule arête qui surnage, il ne parvint pas plus que BADON GHYBEN à donner une solution complète de la question de stabilité, sauf dans le cas d'une section carrée.

Les états d'équilibre oblique avaient déjà été considérés par EULER, dans sa „Scientia navalis" (pp. 36 à 43); mais cet auteur ne s'est pas occupé de la question de la stabilité, sauf dans le cas où, pour une section carrée, la diagonale a pris la position verticale (pp 110 à 113).

Nous verrons plus loin que, dans les cas ② et ④, la détermination de la position exacte dépend ensuite du problème de mener les normales à un parabole d'un point situé sur son axe; algébriquement on l'obtient donc par l'extraction d'une racine carrée. Par contre, pour les cas ③ et ③′, il faudra abaisser les normales sur une hyperbole d'un point qui n'a pas une situation particulière; algébriquement cela revient donc à résoudre une équation du quatrième degré, que d'ailleurs on rencontre déjà dans Euler [1]).

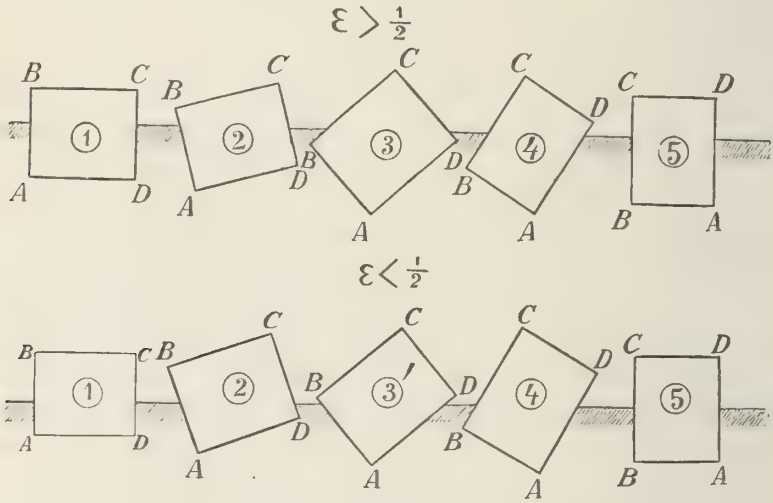


Fig. 1.

2. On trouve la représentation graphique en question sur la planche X. On remarquera que, comme ε et η sont compris tous deux entre les limites 0 et 1, le dessin est contenu dans un carré $OBCA$ dont le côté est égal à l'unité. Comme axe des ε j'ai pris OA, comme axe des η OB. Les points représentatifs qui se rapportent à une poutre carrée sont donc tous situés sur la côté BC; dans ce cas la différence entre les positions ① et ⑤, ainsi que entre ② et ④, disparaît.

Les lignes en trait plein constituent seules les limites entre les diverses régions; à ce point de vue les pointillés ne comptent pas. Si une région contient deux chiffres, c'est que dans tous les cas où le point représentatif (ε, η) est situé dans cette région le parallélipipède peut prendre

[1]) Voir p. 36 de „Scientia navalis".

deux positions différentes. Ces positions sont presque toujours de différente nature. C'est ainsi par exemple que dans les compartiments BEO et GCA les deux positions (1) et (5) sont réalisables; c'est-à-dire qu'une des faces planes surnage dans la situation horizontale; mais ce peut-être aussi bien la face étroite que la face large [1]). Ce n'est que dans les petits compartiments $H\Xi P$ et QZN que les deux positions d'équilibre possibles sont de même nature, tout en différant quantitativement. L'exiguité de ces compartiments et de quelques autres m'a obligé à placer les chiffres à côté, au lieu de les mettre à l'intérieur.

Le théorème de Huygens.

4. La méthode que j'ai suivie en déduisant la représentation graphique se rattache d'une façon simple à des considérations que l'on rencontre dans le premier livre du mémoire mentionné de Huygens.

Celui-ci part du principe que le centre de gravité commun du corps flottant et du liquide tâche de se placer aussi bas que possible [2]). Il en déduit l'horizontalité de la surface liquide ainsi que la loi d'Archimède bien connue. Il donne ensuite deux théorèmes [3]), que l'on peut résumer comme suit:

---

[1]) Un parallélipipède peut donc flotter avec l'étroite face en haut, si le poids spécifique relatif est suffisamment petit ou suffisamment grand. Ainsi un parallélipipède en liège peut être mis en équilibre sur du mercure aussi bien sur la face étroite que sur la face large, à moins que la différence de largeur ne soit trop considérable. De même la face étroite peut surnager si le poids spécifique est à peu près le même que celui du liquide.

[2]) Il est bien remarquable que ce même principe, à la suite d'une idée exprimée en 1837 par Bravais, dans sa thèse, a servi de base en 1879 à Guyou pour sa théorie des corps flottants (Théorie nouvelle de la stabilité des corps flottants, *Revue maritime*, mars 1879), qu'Appell, dans son „Traité de mécanique rationnelle," tome 3, p. 189, éd. 1903, considère comme la première théorie rigoureuse de ce sujet.

Tout comme Huygens, Guyou commence par déduire de ce principe l'horizontalité du niveau liquide et la loi d'Archimède. Voir Appell, *loc. cit.*, pp. 211 à 215. Guyou arrive aussi en passant au théorème de Huygens, dont nous allons parler (Appell, p. 216).

[3]) Les sixième et septième théorèmes du premier livre.

Si un corps flottant de densité uniforme change de lui-même de position, la différence de hauteur entre le centre de gravité du corps tout entier et celui de la portion immergée diminue, et de même la différence de hauteur entre le premier centre de gravité et celui de la portion qui émerge.

Il résulte de la façon dont HUYGENS applique ses théorèmes que son intention est celle-ci: qu'un pareil changement de position *doit* toujours se produire, dès que la différence en question *peut* devenir plus petite par un faible déplacement.

Nous pouvons donc résumer son intention sous cette forme: *Un corps flottant de densité uniforme* [1]) *ne peut être en équilibre stable que dans les cas où la différence de hauteur entre le centre de gravité F du corps entier et le centre de gravité S de la portion immergée (ou S_1 de la partie émergente) est un minimum, comparée aux valeurs de la même différence de hauteur pour tous les états voisins, conformes à la loi d'Archimède.*

Voici une démonstration bien simple de cet important et élégant théorème, qui mérite à notre avis de porter le nom de „théorème de HUYGENS".

Considérons un vase rempli de liquide où flotte un corps. Soit G_l le poids du liquide, non pas de celui qui est réellement contenu dans le vase, mais de celui qu'il contiendrait si la portion immergée du corps était également constituée par le liquide. Ni le poids de ce liquide, ni son centre de gravité ne changent donc par un déplacement qui est d'accord avec la loi d'ARCHIMÈDE.

Soient H_l la hauteur de ce centre de gravité au-dessus d'un plan horizontal arbitrairement choisi, H_f celle du centre de gravité du corps flottant, enfin H_s la même grandeur pour la portion immergée. Soient en outre G_f le poids du corps, G_s celui de la partie plongée dans le liquide. Soit enfin H la hauteur du centre de gravité du système formé

---

[1]) Le théorème subsiste dans toute sa généralité pour une distribution non homogène de la masse, pourvu que le centre de gravité soit le même que pour une distribution homogène dans le volume du corps, et que l'on considère S comme le centre de gravité de la *figure* immergée, et S_1 comme celui de la *figure* émergente.

Si pour un corps flottant les centres de gravité de la figure et de la matière ne coïncident pas, le théorème subsiste encore pour ce qui regarde le point S, le centre de gravité de figure de la portion immergée; mais il ne subsiste plus pour le centre de gravité S_1 de la figure émergente.

par le corps et le liquide. Pour calculer H, nous appliquons le théorème des moments par rapport au plan horizontal que nous venons de choisir, en faisant attention à cette circonstance que, d'après la loi d'ARCHIMÈDE, le poids du liquide déplacé est égal au poids du corps; nous obtenons ainsi

$$G_l H = (G_l H_l - G_f H_s) + G_f H_f. \tag{1}$$

Dans le premier membre, G_l représente, d'après cette loi, le poids total du liquide et du corps, tandis que les termes placés entre parenthèses dans le second membre représentent le moment du liquide réellement existant et le dernier terme le moment du corps flottant.

Cette équation peut s'écrire encore:

$$G_l H = G_l H_l + G_f (H_f - H_s). \tag{2}$$

Or G_l, H_l et G_f sont des constantes. Pour que H soit un minimum, ainsi que le principe des déplacements virtuels l'exige pour l'existence d'un état d'équilibre stable, il faut et il suffit donc qu'il en soit de même de $H_f - H_s$.

Par là la proposition est démontrée pour ce qui regarde le centre de gravité de la portion immergée [1]). Mais, comme il existe un rapport constant entre $H_f - H_s$ et $H_{s_1} - H_f$, aussi longtemps que la loi d'ARCHIMÈDE est satisfaite, elle est également applicable au cas où l'on remplace S par S_1. En effet:

$$G_s H_s + G_{s_1} H_{s_1} = (G_s + G_{s_1}) H_f; \tag{3}$$

de sorte que

$$\frac{H_f - H_s}{H_{s_1} - H_f} = \frac{G_{s_1}}{G_s}. \tag{4}$$

Il est presque inutile d'ajouter que, si $H_f - H_s$ ou $H_{s_1} - H_f$ sont stationnaires sans toutefois passer par un minimum, cela nous apprend qu'on a affaire à un état d'équilibre instable.

---

[1]) Même dans le cas d'une distribution non homogène de la masse, sauf la restriction faite dans la note précédente. Mais alors ce qui suit ne s'applique plus à S_1.

Construction déduite du théorème de Huygens.

4. Du théorème de Huygens on déduit immédiatement la construction suivante des états d'équilibre d'un corps donné, dont ε est le poids spécifique [1]) par rapport au liquide dans lequel il flotte; le poids spécifique de ce dernier est donc pris comme unité.

Supposons que V représente le volume, F le centre de gravité du corps. Menez des plans α découpant du corps des segments de volume εV et déterminez les centres de gravité S de ces segments [2]). Menez par chacun de ces centres de gravité un plan β parallèle au plan correspondant α et abaissez-y de F une perpendiculaire FP. Déterminez la surface π qui est le lieu géométrique de ces points P, et abaissez de F des normales sur cette surface. A chacune de ces normales correspond un état d'équilibre, dans lequel cette normale prendra la position verticale, et cet état d'équilibre sera stable, si cette normale est un véritable minimum parmi les droites voisines qui joignent le point F à des points de π. En effet, il est clair que pour chacun de ces états d'équilibre la droite $FP = H_f - H_s$ est stationnaire et de plus un vrai minimum dans le cas de stabilité, et inversement, si FP est stationnaire, cela ne peut provenir que de ce que cette droite est normale à la surface π.

Simplification de la construction, par laquelle elle s'accorde avec une construction découverte par Dupin en 1814.

5. Pour simplifier la construction, nous considérons la surface σ qui est le lieu géométrique des points S.

Nous commençons par démontrer qu'en chaque point S le plan

[1]) Dans le cas d'une distribution *non homogène* de la masse, on doit entendre par ε le poids spécifique *moyen*, toujours par rapport à celui du liquide, considéré comme unité, de sorte que εV représente encore le volume de l'eau déplacée.

[2]) Si la distribution de la matière est homogène, ou si le centre de gravité F se trouve au point qui correspond à une pareille distribution, on peut opérer avec le centre de gravité S_1 de la portion qui surnage comme avec le centre de gravité S. Toutes les considérations suivantes restent alors valables, pourvu qu'on remplace ε par $1-\varepsilon$, S par S_1, π par π_1 et σ par σ_1.

tangent à σ est parallèle au plan correspondant α et coïncide donc avec le plan β [1]).

La démonstration en est très simple. On n'a qu'à se figurer un deuxième plan α' dans le voisinage immédiat de α et on détermine par la méthode des moments le centre de gravité correspondant S'. A cet effet nous prenons α comme plan fondamental. La distance de S à ce plan fondamental est égale au moment du segment découpé par α divisé par son volume εV. Pour trouver le moment, par rapport à α, du segment appartenant à α', nous n'avons qu'à ajouter au moment du segment primitif celui d'un corps en forme de coin et retrancher celui d'un autre corps en forme de coin, tous deux enfermés entre les plans α et α' et de même volume.

Or, le volume de ces portions cunéiformes est une grandeur infiniment petite du premier ordre, et il en est de même de la distance de leurs centres de gravité au plan α. Leurs moments sont donc du second ordre, et ils ne modifient le moment primitif que d'une grandeur de ce dernier ordre. Mais, pour déduire la distance de S' à α, nous devons encore diviser le nouveau moment par εV. Nous voyons ainsi que la distance de S' à α ne diffère que d'une grandeur infiniment petite du deuxième ordre de celle de S à α [2]). Tel n'est pas le cas pour le déplacement de S à S' dans une direction parallèle à α, ainsi qu'on peut s'en convaincre aisément en prenant les moments par rapport à un plan perpendiculaire à α.

Il faut donc qu'en S le plan tangent σ coïncide avec le plan β. Mais alors, en vertu de sa construction, la surface π n'est autre chose que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point F sur les plans tangents à la surface σ; c'est-à-dire la podaire de σ par rapport au pôle F.

---

[1]) En 1746 déjà ce théorème a été donné par Bouguer. Voir aux pages 259 et 270 de son „Traité du navire", mentionné dans la note 1 de la page 362. Il mérite de porter son nom au lieu d'être attribué à Dupin, suivant Appell, *loc. cit.*, pp. 192 à 195.

[2]) On connaît immédiatement le signe de cette grandeur infiniment petite et ce signe reste toujours le même. En effet, si nous comptons les distances comme positives au-dessous du plan α, il faut ajouter un moment négatif pour l'un des coins et en retrancher un positif pour l'autre. La distance de S' à α est donc toujours plus petite que celle de S à α, et il résulte de là, en rapport avec cette circonstance, que le plan tangent en S à σ est parallèle à α, que la surface σ est partout convexe. C'est ce que Dupin a découvert le premier en 1814; voir pp. XXX et 26 de son mémoire: „Applications de géométrie et de mécanique", Paris, 1822, ou bien le livre d'Appell, à la page 195.

Or, il est facile de démontrer qu'il n'y a pas moyen d'abaisser du pôle d'autres normales sur une podaire que celles qui sont en même temps normales à la surface primitive, et inversement [1]).

On peut donc, dans la construction que nous venons de donner, si l'on fait abstraction pour le moment de la stabilité, remplacer la surface π par la surface σ, et l'on arrive ainsi au résultat suivant:

Pour trouver les états d'équilibre possibles, stables et instables, d'un corps flottant donné, ayant un certain poids spécifique relatif ε et un volume V, on détermine le lieu géométrique σ des centres de gravité des segments de volume εV découpés par des plans. Sur cette surface σ on abaisse des normales FS à partir du centre de gravité F du corps tout entier. Chacune de ces normales correspond à un état d'équilibre, dans lequel cette normale occupe une position verticale [2]).

---

[1]) Soient F le pôle, S un point quelconque de la surface primitive σ, β le plan tangent en S, β' un plan tangent voisin, P le pied de la perpendiculaire abaissée de F sur β, P' celui de la perpendiculaire de F sur β'. Déplaçons β' parallèlement à lui-même de manière à passer par S; alors le pied de la perpendiculaire abaissée de F sur ce plan ne subit qu'un déplacement du second ordre. Mais ce pied est situé, tout comme P, sur la sphère décrite sur FS comme diamètre, de sorte que le plan tangent en P à la surface podaire π coïncide avec le plan tangent à cette sphère. Si l'on réunit donc le point P au point M qui est situé à mi-chemin entre les points F et S, PM est la normale en P à la surface π; mais cette normale ne se confond avec FP que si P tombe en S, et alors $FP \equiv FS$ est de même normale à la surface σ, puisqu'elle est perpendiculaire au plan tangent β à cette surface.

[2]) Cette construction, qui a été donnée pour la première fois par Dupin (voir à la page 49 de ses „Applications", ou Appell, p. 202), se déduit plus directement encore du théorème de Bouguer, en remarquant que le poids du corps, dont le point d'application est en F, et la poussée en S doivent se faire équilibre et agissent donc suivant une même verticale. Mais cette droite est alors perpendiculaire à la surface de niveau α, donc aussi perpendiculaire au plan tangent à σ au point S, qui lui est parallèle; c'est ce qu'il fallait démontrer.

C'est ainsi que la construction est déduite dans Appell, *loc. cit.*, pp. 192 à 195 et 202; mais nous avons voulu montrer comment on peut la déduire du théorème de Huygens, sans autres considérations statiques. Cette voie nous mène d'ailleurs tout naturellement aux conditions de stabilité, comme nous allons le voir ci-après.

Examen de la stabilité dans la construction simplifiée.

6. La construction simplifiée ainsi donnée serait imparfaite, s'il n'y avait pas moyen de juger de la stabilité en considérant la surface σ. Or, d'après le théorème de Huygens, cette stabilité existe si $FP - FS$ est réellement une plus courte distance de F à la surface π; nous avons donc à chercher la relation qui existe à ce point de vue entre les surfaces σ et π.

A cet effet nous prenons comme origine O des coordonnées le point P coïncidant avec S, et comme axes coordonnés la normale FO et les deux tangentes principales (axes de l'indicatrice) au point O, considéré comme point de la surface σ; si de plus $FO = c$, nous pouvons écrire pour équation de la surface σ, à un degré d'approximation suffisant:

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2}. \tag{5}$$

Soient maintenant (x', y', z') un point S de la surface primitive, dans le voisinage de l'origine, (ξ, η, ζ) le point correspondant P de la podaire; il faut que ce dernier point soit situé: 1°. dans le plan tangent à σ en S, 2°. sur la normale abaissée de F sur ce plan tangent. Cela conduit aux relations:

$$\zeta = \frac{x'\xi}{R_1} + \frac{y'\eta}{R_2} - z' \tag{6}$$

et

$$\frac{R_1\xi}{x'} = \frac{R_2\eta}{y'} = c - \zeta; \tag{7}$$

on a en même temps

$$z' = \frac{x'^2}{2R_1} + \frac{y'^2}{2R_2}. \tag{8}$$

Eliminant x', y' et z' entre ces équations et négligeant les termes d'ordre supérieur au second on trouve aisément

$$\zeta = \frac{2c - R_1}{2c^2}\xi^2 + \frac{2c - R_2}{2c^2}\eta^2. \tag{9}$$

Mais, si nous représentons par ρ la distance de F au point $P(\xi, \eta, \zeta)$ nous avons:

$$\rho^2 = (c - \zeta)^2 + \xi^2 + \eta^2 = c^2 - 2c\zeta + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2; \quad (10)$$

on trouve donc, en négligeant ζ^2,

$$\rho^2 = c^2 + \left(\frac{R_1}{c} - 1\right)\xi^2 + \left(\frac{R_2}{c} - 1\right)\eta^2. \quad (11)$$

Il résulte de là que la stabilité exige en premier lieu que la surface σ soit convexe autour du pied S de la normale, et tourne sa concavité vers F; mais en outre il faut que chacun des deux rayons de courbure principaux soit plus grand que la normale FS elle-même [1]).

Or, cette dernière condition est tout à fait identique à celle qui doit être remplie pour que FS soit, par rapport à σ, un véritable minimum parmi les droites de raccordement avec F [2]). Nous rappelant qu'en vertu de ce qui a été démontré à la note 2, p. 369, la surface σ doit toujours être convexe, nous pouvons donc résumer comme suit notre résultat:

---

[1]) Sous cette forme on reconnaît aisément les conditions de stabilité trouvées par Dupin, telles qu'elles sont données par Appell, *loc. cit.* p. 217. Mais Dupin les a lui-même données en même temps sous la forme que nous donnons dans la suite; toutefois il paraît ne pas avoir songé à la possibilité d'une situation de F du côté de la convexité de σ. Voir p. 25 de son travail déjà cité.

[2]) Pour la distance ρ de F à un point S (x', y', z') de la surface σ nous trouvons notamment immédiatement, avec une approximation suffisante, $\rho^2 = c^2 - 2cz' + x'^2 + y'^2$, ou bien, en vertu de (8),

$$\rho^2 = c^2 + \left(1 - \frac{c}{R_1}\right)x'^2 + \left(1 - \frac{c}{R_2}\right)y'^2 + \ldots,$$

une expression qui devient réellement un minimum pour le point O, lorsque c est plus petit que R_1 et R_2.

La condition pour que la normale $FS \equiv FP$ soit réellement une plus courte distance pour les surfaces σ et π est donc toujours remplie pour les deux surfaces à la fois, si la surface σ a une courbure positive et tourne en S sa concavité vers F. Dans les autres cas elle est différente pour les deux surfaces. Ainsi, si la surface σ est à courbure positive, mais qu'elle tourne sa convexité vers F, la droite $FS \equiv FP$ est une plus courte distance pour σ, mais une plus grande pour π.

La stabilité exige 1°. *que la surface* σ, *toujours convexe, dirige sa concavité vers* F [1]), 2°. *que* FS *soit un minimum parmi les droites voisines qui relient* F *avec un point de* σ. *Dans tout autre cas il y a instabilité.*

Application aux parallélipipèdes flottants, dont l'axe longitudinal est horizontal. Conditions de stabilité des positions (1) et (5).

7. Quand un parallélipipède homogène flotte de telle façon que son grand axe est horizontal, il est clair que la section verticale par le centre de gravité est un plan de symétrie de la surface σ, et si l'on présuppose que cette position horizontale de l'axe longitudinal se conserve, nous n'ayons à tenir compte que des normales situées dans ce plan de symétrie pour déterminer les états d'équilibre possibles.

La surface σ peut donc être remplacée par sa section s par ce plan de symétrie; cette section n'est autre chose que le lieu géométrique des centres de gravité des segments de même aire, découpés par des droites de la section normale, qui a la forme d'un rectangle $ABCD$ (voir les figures du § 1).

Sur ce lieu géométrique s on doit abaisser des normales FS du point F, coïncidant avec le centre du rectangle, et la stabilité exige que ces normales aboutissent à la concavité de la courbe s et en même temps que FS soit un véritable minimum; cela veut dire ici que FS doit être plus court que le rayon de courbure de la courbe s au point S.

8. Nous commencerons par déterminer la courbe s pour des positions dans le voisinage de (1), c. à d. appartenant à (2). Dans la suite nous allons représenter par a le plus grand côté du rectangle formant la sec-

---

[1]) Tel sera toujours le cas pour une distribution homogène de la masse, ainsi qu'on le reconnaît aisément, en vertu de ce qui a été dit à la note 2, page 369, en déterminant F en prenant les moments des portions immergées et émergentes par rapport au plan α.

Si la distribution de la masse n'est pas homogène, F peut fort bien tomber du coté de la convexité de σ. Alors il y a toujours instabilité.

tion normale du parallélipipède, par b le plus petit côté, par ε le poids spécifique divisé par celui du liquide; par η le quotient $\frac{b}{a}$. Nous plaçons

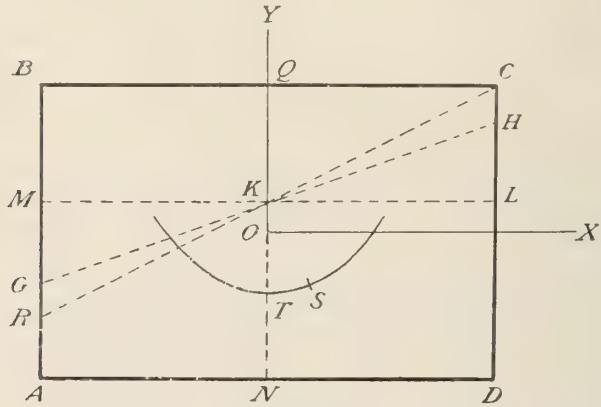


Fig. 2.

l'origine des coordonnées (fig. 2) au centre du rectangle; l'axe X est pris parallèlement au grand côté a, l'axe Y parallèlement au petit côté b.

Il faut maintenant découper des trapèzes $AGKHD$ de surface donnée $ab\varepsilon$ et déterminer le lieu de leurs centres de gravité.

A cet effet il suffit de prendre $NK = b\varepsilon$ et de tracer des lignes quelconques GKH, dont nous représenterons par Φ l'angle qu'elles forment avec KL.

En prenant p. ex. les moments du rectangle $MLDA$ et des triangles KHL et MGK, nous trouvons aisément pour les coordonnées du centre de gravité cherché S:

$$x = \frac{b\, tg\, \Phi}{12\varepsilon\eta^2}, \qquad y = \frac{b\, tg^2 \Phi}{24\varepsilon\eta^2} - \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)\, b; \tag{12}$$

de sorte que l'équation de la courbe s peut être mise sous la forme:

$$x^2 = \frac{b}{6\varepsilon\eta^2}\left[y + \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)\, b\right]. \tag{13}$$

Cette équation est celle d'une parabole, dont le sommet T est situé de telle façon que $OT = \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\, b$; le rayon de courbure en T est égal à $\frac{b}{12\varepsilon\eta^2}$.

La stabilité de la position (1) exige, conformément au paragraphe précédent, que la normale OT, abaissée du centre de gravité O du parallélipipède, soit plus petite que ce rayon de courbure. Il faut donc ici:

$$6\,(1-\varepsilon)\,\varepsilon\eta^2 < 1. \tag{14}$$

Si l'on construit donc sur la représentation graphique (planche X) la courbe $6\,(1-\varepsilon)\,\varepsilon\eta^2 = 1$, représentée par EFG sur cette planche, il est évident que, *dans tous les cas ou le point figuratif* (ε, η) *tombe dans le champ* $BEFGCAOB$ *de la représentation graphique, la position* (1) *est un état d'équilibre stable.* Comme $OR = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$, tous les parallélipipèdes pour lesquels $b < a\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ peuvent flotter dans la position (1), quel que soit leur poids spécifique [1]).

Cela n'est plus le cas pour $b > a\sqrt{\tfrac{2}{3}}$; alors ε devra être ou bien plus petit que la plus petite des deux racines de l'équation du second degré $\varepsilon\,(1-\varepsilon) = \dfrac{1}{6\eta^2}$, ou bien plus grand que la plus grande de ces deux racines [2]).

9. Pour ce qui regarde maintenant la condition de stabilité de l'état (5), on peut la trouver immédiatement en permutant a et b dans le résultat obtenu, donc en remplaçant η par η^{-1}. La condition devient ainsi

$$\eta^2 > 6\,\varepsilon\,(1-\varepsilon), \tag{15}$$

---

[1]) C'est le „Theorema 2" de Huygens „liber 2".

[2]) C'est à peu près de cette façon que Huygens formule son résultat dans le „Theorema 3"; mais la forme est un peu plus géométrique. Il construit notamment un point U sur le côté DC, de telle façon que $CU \times UD = \tfrac{1}{6}\,AD^2$ et dit: l'équilibre sera stable si le poids spécifique est plus petit que $\dfrac{CU}{UD}$ ou plus grand que $\dfrac{UD}{CD}$; on peut se convaincre aisément que cela conduit à l'équation donnée. C'est d'une façon analogue qu'il formule les théorèmes suivants. Il part toujours d'une section normale donnée, donc d'une valeur donnée de η. C'est ce qui fait que Huygens est obligé de donner séparément des théorèmes pour les cas où $\eta < \dfrac{RO}{BO}$ (voir la représentation graphique), où $\dfrac{RO}{BO} < \eta < \dfrac{TO}{BO}$ et enfin où $\eta > \dfrac{TO}{BO}$. Nous ne reviendrons plus sur les résultats obtenus par Huygens ni sur la façon dont il les formule; je me contenterai de renvoyer au mémoire original et aux notes qui y sont ajoutées. Je dirai seulement encore ici que les résultats obtenus par Huygens constituent ensemble une solution complète du problème, sauf pour ce qui regarde les positions (3) et (3'), puisqu'il n'a pas découvert que ces positions peuvent aussi se présenter dans les cas où le point figuratif est situé dans les champs $OH \equiv O$ ou $AZNA$ de notre représentation graphique.

et si l'on trace sur la représentation graphique l'ellipse

$$6\,(1-\varepsilon)\,\varepsilon=\eta^2, \tag{16}$$

dont les deux portions OE et AG tombent dans les limites de la figure, on voit *que la condition de stabilité de la position* (5) *revient à ceci, que le point figuratif doit tomber dans un des champs OBE ou AGC de la représentation graphique.* On déduit immédiatement de là que cette position d'équilibre peut être stable, quelle que soit la valeur de η; il suffit pour cela que le poids spécifique relatif soit ou bien assez petit, ou bien suffisamment rapproché de l'unité; c'est du reste ce que nous avons déjà fait remarquer dans la note 1 à la page 365. Si la section rectangulaire a des côtés fort inégaux, les limites entre lesquelles peut varier le poids spécifique sont toutefois très resserrées. Elles deviennent de plus en plus larges à mesure que la section se rapproche d'un carré. Pour une section carrée parfaite ε doit être plus petit que $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{3}=0{,}211\ldots$ ou plus grand que $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{3}=0{,}788\ldots$

Conditions de réalisation des positions (2) et (4).

10. Aussi longtemps que dans la fig. 2 OT est plus petit que le rayon de courbure de la parabole en T, on ne peut abaisser sur cette parabole qu' une seule normale du centre de gravité O du parallélipipède. Mais dès que OT devient plus grand il existe trois normales. OT n'est plus alors un minimum; en effet, OS diminue à partir d'elle jusqu' aux deux nouvelles normales, situées de part et d'autre de la première. Il en résulte que la position (1) disparaît comme position d'équilibre stable, et est remplacée pour commencer par la position (2), qui se présente donc à l'instant même où la position (1) fait défaut, c. à. d. lorsque

$$6\,(1-\varepsilon)\,\varepsilon\eta^2>1; \tag{17}$$

elle ne peut donc exister que si le point figuratif est placé dans le champ $EFGE$.

Toutefois cette condition n'est pas suffisante. Car, si pour faire coïncider p. ex. S avec le pied de la nouvelle normale, tombant à la droite de OT, on doit choisir une valeur de φ plus grande que $arc\ tg\ \frac{CL}{KL}$, la position (2) ne pourra pas se présenter, parce qu'elle exigerait que le point C se plaçât sous le niveau du liquide; or, cela conduit à l'état (3).

En tenant compte de cette nouvelle condition nous distinguerons les cas $\varepsilon > \frac{1}{2}$ et $\varepsilon < \frac{1}{2}$; admettons d'abord le premier.

Érigeons au point S, appartenant à l'angle $HKL = \varphi$, une normale sur la parabole. Comme en vertu de ce qui a été démontré au § 5 cette normale doit être perpendiculaire à KH, ce que l'on peut du reste vérifier aisément dans ce cas, on peut écrire directement pour son équation

$$Y - \frac{b\, tg^2 \varphi}{24\, \varepsilon \eta^2} + \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)\, b = -\left(X - \frac{b\, tg\, \varphi}{12\, \varepsilon \eta^2}\right) cotg\, \varphi. \qquad (18)$$

Or, pour qu'elle corresponde au nouvel état d'équilibre, cette normale doit passer par l'origine O. Cela exige:

$$tg^2 \varphi = 12\, \varepsilon\, (1-\varepsilon)\, \eta^2 - 2. \qquad (19)$$

Toutefois, pour que les solutions ainsi obtenues aient une signification véritable, il faut que

$$tg^2 \varphi < tg^2\, CKL = 4\, (1-\varepsilon)^2 \eta^2. \qquad (20)$$

La deuxième condition devient donc

$$12\, \varepsilon\, (1-\varepsilon)\, \eta^2 - 2 < 4\, (1-\varepsilon)^2 \eta^2, \qquad (21)$$

c. à d.

$$2\, (4\varepsilon - 1)\, (1-\varepsilon)\, \eta^2 < 1. \qquad (22)$$

Si nous dessinons donc dans la représentation graphique la courbe LMN dont l'équation est:

$$2\, (4\varepsilon - 1)\, (1-\varepsilon)\, \eta^2 = 1, \qquad (23)$$

le point figuratif ne devra pas tomber dans le champ $LMNL$.

11. Les considérations que nous venons de faire perdent leur valeur si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, puisqu' alors le point A (fig. 2) atteint le niveau du liquide avant le point C. On pourrait recommencer les calculs, mais je préfère faire observer que, si nous nous figurons la fig. 2 retournée sens dessus dessous, nous pouvons considérer $GKHCBG$ comme la partie immergée; mais c'est alors $1-\varepsilon$ qui représente le poids spécifique.

Nous n'avons donc qu' à remplacer dans les résultats ε par $1-\varepsilon$ pour

pouvoir les appliquer immédiatement au cas $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que dans ce cas la condition peut s'écrire [1]):

$$2\,(3-4\varepsilon)\,\varepsilon\eta^2 < 1. \tag{24}$$

Si nous dessinons dans la représentation graphique la courbe HKL, dont l'équation est:

$$2\,(3-4\varepsilon)\,\varepsilon\eta^2 = 1, \tag{25}$$

nous trouvons que le champ $HKLH$ aussi doit être exclu, et nous obtenons finalement *que $EFGNMLKHE$ est le champ où doit tomber le point figuratif pour que la position ② soit possible.*

12. Quant à la position ④, elle ne se distingue de la position ② que par ceci, que le petit côté b et le grand côté a ont interverti leurs rôles. Dans les considérations précédentes nous n'avons donc qu'à remplacer η par η^{-1} et nous trouvons comme courbes limites, en dehors de l'ellipse déjà considérée $6\,(1-\varepsilon)\,\varepsilon = \eta^2$, les deux nouvelles ellipses $2\,(4\,\varepsilon-1)\,(1-\varepsilon) = \eta^2$ et $2\,\varepsilon\,(3-4\,\varepsilon) = \eta^2$, qui, pour autant qu'elles tombent dans les limites du tracé et viennent en ligne de compte, donnent lieu aux courbes limites NA et HO.

Le point représentatif doit donc se trouver dans un des deux champs $EOHE$ ou $NAGN$ pour que la position ④ se réalise. Cette position est donc réalisable pour tous les parallélipipèdes, à condition que l'on puisse choisir la densité; mais ce choix ne peut se faire qu'entre des limites étroites, et d'autant plus étroites que la section du parallélipipède s'écarte davantage d'un carré.

Pour un carré cette densité doit être comprise entre les limites $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{3} = 0{,}211\ldots$ et 0,25 ou entre 0,75 et $\frac{1}{2}+6\sqrt{3} = 0{,}788\ldots$

Conditions pour l'existence des positions ③ et ③'.

13. Ce sont les considérations relatives à ces positions qui présentent le plus de difficultés.

Nous commencerons de nouveau par supposer $\varepsilon > \frac{1}{2}$, en quel cas la position ③ seule est réalisable.

[1]) Cette relation et la précédente se trouvent non seulement dans Huygens, mais encore dans Euler, Scientia navalis, p. 41.

Nous prendrons comme axes des coordonnées les deux côtés du rectangle qui sont coupés par la ligne de niveau GH (fig. 3), et nous poserons $OH = p$, $OG = q$, de sorte que

$$pq = 2ab\,(1-\varepsilon) = 2a^2\eta\,(1-\varepsilon). \tag{26}$$

Les coordonnées du centre de gravité S_1 de la portion émergente deviennent ainsi $x = \frac{1}{3}\,p$, $y = \frac{1}{3}\,q$, et la courbe s, lieu de ce centre de gravité, devient l'hyperbole:

$$xy = \frac{2}{9}\,ab\,(1-\varepsilon). \tag{27}$$

C'est sur cette hyperbole que nous devons maintenant abaisser des normales du point $F\,(\frac{1}{2}\,a,\ \frac{1}{2}\,b)$.

Pour y arriver nous n'avons qu'à faire en sorte que la droite FS_1 : $\dfrac{y-\frac{1}{3}q}{\frac{1}{2}b-\frac{1}{3}q} = \dfrac{x-\frac{1}{3}p}{\frac{1}{2}\,a-\frac{1}{3}p}$ soit perpendiculaire à la droite GH: $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1$; en effet, d'après ce qui a été démontré au § 5, cette dernière droite est parallèle à la tangente à l'hyperbole au point S_1.

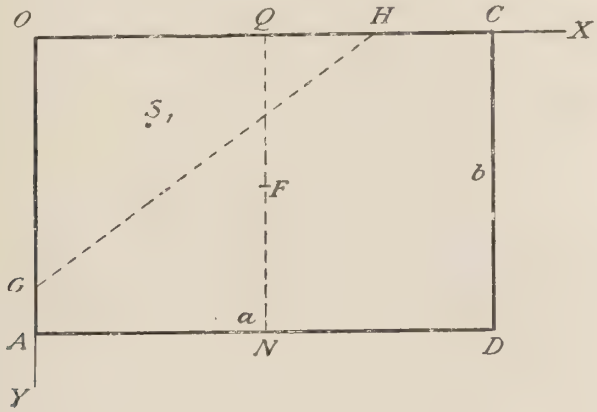


Fig. 3.

On arrive ainsi à la condition:

$$p\,(2p-3a) - q\,(2q-3b) = 0; \tag{28}$$

qui, moyennant (26), conduit à l'équation du quatrième degré:

$$f(p) \equiv 2p^4 - 3ap^3 + 6a^3\eta^2\,(1-\varepsilon)\,p - 8a^4\eta^2\,(1-\varepsilon)^2 = 0. \tag{29}$$

Parmi les racines de cette équation on ne doit considérer que celles qui sont comprises entre les limites :

$$p < a \tag{30}$$

et $q < a\eta$, ou bien, après réduction,

$$p > 2a\,(1-\varepsilon), \tag{31}$$

une limite qui, pour $\varepsilon > \frac{1}{2}$, est toujours plus basse que la première.

D'ailleurs on doit encore décider si les racines comprises entre ces limites donnent lieu à des positions d'équilibre stable, c. à d., d'après le § 6, si la normale correspondante est située du côté concave et est réellement un minimum de distance.

Nous remarquons immédiatement que $f(-\infty)$ est *positif* et $f(0)$ *négatif*. Il y a donc toujours une racine entre 0 et $-\infty$, mais il est tout à fait évident qu' à cette racine négative correspond la normale abaissée de F sur la branche de l'hyperbole non située dans l'angle XOY. Des considérations géométriques apprennent facilement qu' il y a toujours une pareille normale, et qu' il n'y en a qu' une.

Puis nous trouvons

$$f(2a\,(1-\varepsilon)) = -\left\{ 2\,(4\varepsilon-1)\,(1-\varepsilon) - \eta^2 \right\} \times 4a^4\,(1-\varepsilon)^2 \tag{32}$$

et

$$f(a) = \left\{ 2\,(4\varepsilon-1)\,(1-\varepsilon)\,\eta^2 - 1 \right\} \times a^4. \tag{33}$$

14. Nous commencerons la discussion plus précise par les cas où le point figuratif (ε, η) tombe dans le champ $NCAN$ de la représentation graphique.

Dans ces cas $\eta^2 > 2\,(4\,\varepsilon-1)\,(1-\varepsilon)$, ainsi que cela résulte de cette circonstance que, pour la même valeur de ε, on peut toujours trouver sur la courbe NA un point dont le η est plus petit que celui du point figuratif donné, tandis que sur cette courbe on a $\eta^2 = 2\,(4\,\varepsilon-1)\,(1-\varepsilon)$, d'après le § 12.

Mais en même temps $2\,(4\,\varepsilon-1)\,(1-\varepsilon)\,\eta^2 < 1$, comme il résulte de la situation par rapport à la courbe LMN (§ 10), que l'on peut poursuivre aisément en dehors du tableau et qui aurait alors le côté AC comme asymptote.

Il s'ensuit que pour les cas en question :

$$f(0) < 0; f(2a(1-\varepsilon)) > 0; f(a) < 0; f(\infty) > 0.$$

Parmi les trois racines réelles positives il y en a donc une qui tombe entre les limites donneés.

On reconnaît toutefois directement que cette racine conduit à un état d'équilibre *instable :* cela résulte notamment de cette circonstance qu'elle est *celle du milieu* parmi les trois qui se rapportent à la branche d'hyperbole situeé dans l'angle XOY de la fig. 3. Or la distance correspondante ne saurait donc être une plus petite distance, car, si l'on vient de l'infini de OX, la distance à E est d'abord infiniment grande et descend jusqu' à une valeur déterminée, correspondant à la première racine. Comme ce n'est pas une racine double, la distance doit ensuite augmenter de nouveau jusqu' à la racine moyenne, pour diminuer de nouveau jusqu' à la troisième racine et augmenter enfin indéfiniment.

Nous savons donc que la position (3) ne saurait être une position d'équilibre stable, si le point figuratif tombe dans le champ $NCAN$.

15. Passant aux cas où le point figuratif tombe dans le champ $LMNAA'L$, nous remarquons que pour ces cas

$$f(0) < 0; f(2a(1-\varepsilon)) < 0; f(a) < 0; f(\infty) > 0.$$

Entre les limites $2a(1-\varepsilon)$ et a il y a donc deux racines ou il n'y en a aucune.

Or, si l'on part du cas précédent où une racine est comprise entre 0 et $2a(1-\varepsilon)$ et une autre entre $2a(1-\varepsilon)$ et a, il est facile de montrer qu' au passage de la ligne NA la première racine passe du premier intervalle dans le second.

Pour le faire voir, nous n'avons qu' à déterminer le signe de

$$f'(p) \equiv 8p^3 - 9ap^2 + 6a^3\eta^2(1-\varepsilon)$$

pour $p = 2a(1-\varepsilon)$ et $\eta^2 = 2(4\varepsilon - 1)(1-\varepsilon)$. On trouve que $f'(2a(1-\varepsilon)) = 16a^3(1-\varepsilon)^3$, donc toujours positif. Mais on a alors, δ représentant une petite grandeur positive, *sur* la ligne NA :

$$f(0) < 0; f(2a(1-\varepsilon) - \delta) < 0; f(2a(1-\varepsilon)) = 0;$$
$$f(2a(1-\varepsilon) + \delta) > 0; f(a) < 0.$$

Dans ce cas de transition il y a donc entre les limites $2a\,(1-\varepsilon)$ et a déjà une première racine, qui doit subsister provisoirement au passage de NA, de sorte qu' à ce moment une nouvelle racine doit faire son entrée dans ce même intervalle.

Pour des points figuratifs situés à la gauche de NA, mais dans le voisinage de cette ligne, on doit donc trouver deux racines réelles, dont une représente un état d'équilibre stable. Et comme aussi longtemps que l'on ne franchit pas la courbe LMN $f'(a)$ doit rester négatif, de sorte qu' à l'autre limite il ne peut sortir aucune racine, cet état d'équilibre doit subsister jusqu' à ce que les deux racines réelles, qui sont comprises entre les limites voulues, coïncident et deviennent ensuite imaginaires.

Tant qu'il y a donc quatre racines réelles de l'équation (29), l'état ③ existe comme position d'équilibre, pour disparaître comme telle en même temps que les deux racines réelles.

Nous découvrons ainsi une nouvelle ligne de séparation [1]), et nous avons, pour la déterminer, à chercher la condition pour que les quatre normales existent.

C'est ce qu'on fait le plus facilement en cherchant la développée de l'hyperbole

$$xy = \frac{2}{9}\,ab\,(1-\varepsilon) = \frac{2}{9}\,a^2\eta\,(1-\varepsilon). \tag{34}$$

On trouve aisément que son équation est

$$\left\{\frac{9\,(x+y)^2}{32a^2\eta\,(1-\varepsilon)}\right\}^{\frac{1}{3}} - \left\{\frac{9(x-y)^2}{32a^2\eta\,(1-\varepsilon)}\right\}^{\frac{1}{3}} - 1 = 0. \tag{35}$$

La forme de cette développée est connue, et de là résulte pour condition d'existence simultanée des quatre normales:

$$\left\{\frac{9\,(x+y)^2}{32a^2\eta\,(1-\varepsilon)}\right\}^{\frac{1}{3}} - \left\{\frac{9\,(x-y)^2}{32a^2\eta\,(1-\varepsilon)}\right\}^{\frac{1}{3}} - 1 > 0. \tag{36}$$

[1]) C'est l'ignorance de cette ligne de séparation qui fait que les solutions antérieures, dont j'ai pris connaissance, étaient incomplètes. Cela n'a pourtant pas induit HUYGENS en erreur. Il ne fait que laisser indécis ce qui doit se passer lorsque le parallélipipède, placé dans la position limite entre ④ et ③, est poussé vers l'état ③, ou plus loin, par le couple qui prend naissance. (Comp. „Liber 2, Theorema 8, Conclusio 4" du mémoire déjà cité de HUYGENS).

En appliquant ce résultat au point F, dont les coordonnées sont représentées par $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a\eta$, nous trouvons la condition :

$$\frac{3^{\frac{2}{3}}(1+\eta)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{7}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{3}}} - \frac{3^{\frac{2}{3}}(1-\eta)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{7}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{3}}} > 1, \tag{37}$$

ou encore

$$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{3}} < \frac{(1+\eta)^{\frac{2}{3}} - (1-\eta)^{\frac{2}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}} \times \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{9}{2}}. \tag{38}$$

Nous dessinons donc dans la représentation graphique la courbe

$$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{3}} = \frac{(1+\eta)^{\frac{2}{3}} - (-\eta)^{\frac{2}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}} \times \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{9}{2}}. \tag{39}$$

Alors pour tous les points figuratifs, placés à la droite de cette courbe, pour lesquels, à η égal, le ε est plus grand que pour un point de la courbe, les quatre racines seront réelles.

Or, cette courbe doit se trouver toute entière à la gauche de NA, puisque nous avons vu que pour les points de NA et un peu à gauche les quatre racines sont réelles.

Sur la représentation graphique cette courbe est représenteé par QA. *Nous savons donc déjà que la position* ③ *pourra se présenter dans le domaine* $ZNAZ$, mais *non* dans le champ $LMZA\Gamma L$.

16. Avant d'aller plus loin je veux dire un mot de la courbe QA. Pour $\eta = 0$ on trouve $\varepsilon = 1$. La courbe commence donc au point A où elle touche intimement l'ellipse NA. En effet, pour bien faire connaître l'allure des trois courbes qui se rejoignent en ce point, nous développerons pour toutes les trois $1-\varepsilon$ d'après les puissances croissantes de η^2.

On trouve pour GA:

$$1-\varepsilon = \frac{1}{6}\eta^2 - \frac{1}{36}\eta^4 + \frac{1}{108}\eta^6 + \ldots; \tag{40}$$

pour NA:

$$1-\varepsilon = \frac{1}{6}\eta^2 + \frac{1}{27}\eta^4 + \frac{4}{243}\eta^6 + \ldots; \tag{41}$$

et enfin pour QA:

$$1-\varepsilon=\frac{1}{6}\eta^2+\frac{1}{27}\eta^4+\frac{25}{1458}\eta^6+\ldots \tag{42}$$

Plus loin l'allure de la courbe QA est donnée par:

$$\frac{d.(1-\varepsilon)^{\frac{1}{3}}}{d\eta}=\frac{(1+\eta)^{\frac{2}{3}}-(1-\eta)^{\frac{2}{3}}}{\eta^{\frac{4}{3}}(1+\eta)^{\frac{1}{3}}(1-\eta)^{\frac{1}{3}}}\times\frac{1}{12}\sqrt[3]{\frac{9}{2}}, \tag{43}$$

ce qui prouve que $1-\varepsilon$ augmente continuellement avec η, jusqu'à ce qu'on ait atteint, pour $\eta=1$, le point Q, tel que

$$CQ=1-\varepsilon_Q=\frac{9}{32}=0{,}281\ldots,$$

et où la courbe est tangente à la ligne BC.

D'ailleurs, pour les valeurs de η plus petites que $\frac{1}{2}$, la courbe diffère excessivement peu de l'ellipse NA. C'est ainsi que pour $\eta=\frac{1}{2}$ les valeurs de $1-\varepsilon$ sur les trois courbes sont: sur GA: 0,0435..., sur NA: 0,044281..., sur $QA=0{,}044297\ldots$

17. Considérons maintenant les cas où le point représentatif tombe dans la section $LMZQ$. Dans ces cas ce point est situé au-dessus de la courbe LMN, de sôrte que

$$2\,(4\varepsilon-1)\,(1-\varepsilon)\,\eta^2>1;$$

mais il est situé au-dessous du prolongement de la courbe NA, de sorte que:

$$2\,(4\varepsilon-1)\,(1-\varepsilon)-\eta^2>1.$$

On a donc

$$f(0)<0;\ f(2a\,(1-\varepsilon))<0;\ f(a)>0;\ f(\infty)>0.$$

Il y a donc toujours une racine entre les limites voulues, et, comme le point figuratif se trouve à la gauche de la courbe QA, c'est là la seule racine qui appartienne à la branche de l'hyperbole placée dans l'angle XOY (fig. 3). La normale correspondante est donc certainement une distance minima et l'état d'équilibre qu'elle indique est stable.

Si donc le point figuratif tombe dans la région $LMZQ$, un seul état d'équilibre (3) *est possible.*

18. Il ne nous reste plus à examiner que les cas où le point figuratif tombe dans le triangle curviligne QZN.

On a encore:

$$f(0) < 0;\ f(2a(1-\varepsilon)) < 0;\ f(a) > 0;\ f(\infty) > 0;$$

mais, comme alors les quatre racines sont réelles, il se peut qu'il y en ait trois entre les limites en question, ou une seule.

Or, comme il n'y a dans tout ce triangle aucune ligne au passage de laquelle une racine pourrait quitter les limites posées, ou pourrait disparaître, il suffit d'examiner les circonstances en un seul point de ce triangle. Ce que nous trouvons pour ce point-là s'applique à tout le triangle. Prenons d'abord un point situé hors du triangle, à quelque distance à droite et au-dessous de la ligne NZ; pour un tel point:

$$f(0) < 0;\ f(2a(1-\varepsilon)) < 0;\ f(a) < 0;\ f(\infty) > 0.$$

En vertu du § 15 il y a alors deux racines réelles entre $2a(1-\varepsilon)$ et a.

Si maintenant le point figuratif franchit la ligne NZ on peut, en faisant attention au signe de $f'(a) = 4a^3(1-\varepsilon) : (4\varepsilon-1)$ sur cette ligne, aisément faire voir, de la même façon qu'au § 15, que la racine primitivement comprise entre a et $+\infty$ a quitté ce domaine, et qu'on a $f(a) > 0$, $f(\infty) > 0$. Il est impossible que cette racine soit devenue imaginaire, car il faudrait pour cela que deux racines aient coïncidé, ce qui n'arrive que sur la ligne limite QA. Elle a donc nécessairement passé dans le domaine compris entre $2a(1-\varepsilon)$ et a, de sorte que ce domaine contient trois racines réelles.

Parmi ces trois il faut nécessairement qu'il y en ait deux qui correspondent à des minima réels de distance, et nous pouvons donc conclure:

Si le point figuratif tombe dans la région QZN, deux positions d'équilibre stable (3) *sont possibles.*

19. A partir du § 13 nous avons supposé $\varepsilon > \frac{1}{2}$. Il nous reste donc encore à traiter la position (3)′ (voir fig. 1), appartenant au cas $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Tout comme nous l'avons fait pour la fig. 2 au § 11, nous pouvons nous figurer de nouveau que la fig. 3 soit retournée sens dessus dessous, et considérer OGH comme la portion immergée, de sorte que nous devons prendre $1-\varepsilon$ pour le poids spécifique. Si nous traitons alors le

centre de gravité S_1, de la partie immergée, de la même manière que nous avons traité le centre S aux §§ 14 à 18, nous devons trouver des résultats qui ne diffèrent de ceux déjà obtenus qu'en ce que dans toutes les formules ε est remplacé par $1 - \varepsilon$.

La ligne limite AQ est ainsi remplacée par la ligne OP, dont l'équation peut s'écrire:

$$\varepsilon^{\frac{1}{3}} = \frac{(1+\eta)^{\frac{2}{3}} - (1-\eta)^{\frac{2}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}} \times \frac{1}{4}\sqrt{\frac{9}{2}}, \tag{44}$$

et l'on arrive à cette conclusion: *que la position* ③′ *se réalise comme état d'équilibre lorsque le point figuratif tombe dans le domaine* $OHPLK \equiv O$, *et même deux fois s'il tombe dans le champ* $H \equiv PH$.

Signification particulière des lignes limites QA et PO.

20. Avant de terminer ce travail je désire attirer l'attention sur le rôle particulier que jouent les lignes limites QA et PO, et qui les distingue des lignes limites EFG, HKL, LMN, EO, GA, HO et NA.

Au moment où le point figuratif franchit une de ces dernières lignes limites, la position d'équilibre passe graduellement en une autre, dont le caractère ne peut différer de la précédente qu'en ceci, que l'un des sommets A, B, C ou D de la section normale du parallélipipède flottant (voir fig. 1) a traversé la surface liquide. En même temps le parallélipipède a exécuté une rotation graduelle.

Il en est tout autrement des lignes QA et PO; si l'on franchit la première de droite à gauche, et la deuxième de gauche à droite, il y a un état d'équilibre stable qui disparaît subitement (par la coïncidence avec une position d'équilibre instable qui était dans le voisinage). Le parallélipipède perd son équilibre et se renverse tout à coup.

Pour bien comprendre ceci, figurons-nous que le poids spécifique relatif du parallélipipède, d'abord à peu près égal à l'unité, diminue peu à peu. Si l'on veut songer à un processus physique, on peut imaginer que cela se produise ainsi que le *liquide* devient plus lourd par mélange avec un autre liquide ou par dissolution d'un sel.

Si nous admettons d'abord $\eta < AS$, nous pouvons supposer que le

point figuratif commence par se trouver au-dessous de la droite RS dans la section GAC; c. à d. que les états (1) et (5) sont possibles. Si l'on place le parallélipipède dans la position (1), il y reste quelque petit que devienne ε, mais il en est autrement quand on le place dans la position (5).

Il conserve cette position jusqu'à ce que le point représentatif atteint la ligne GA. A partir de ce moment le parallélipipède se met dans la position inclinée (4). Ensuite, quand le point figuratif arrive sur la ligne NA, le sommet D de la fig. 1 atteint la surface du liquide. Puis le parallélipipède commence par se mettre dans la position (3), en tournant lentement, mais cette rotation ne se poursuit pas jusqu'à la fin, car, avant d'atteindre la position (2), le parallélipipède se renverse d'un mouvement subit, au moment où le point représentatif traverse la ligne QA. A partir de ce moment la position (1) est la seule possible, du moins aussi longtemps que $\varepsilon > \frac{1}{2}$. [1]).

21. Pour donner un second exemple, nous partirons du cas où $\eta > UA$, en prenant encore au commencement ε presque égal à l'unité.

Ici encore les deux positions (1) et (5) sont toutes deux réalisables. Partons d'abord de la position (1); celle-ci se conserve jusqu'à ce que GWF soit atteint. Puis le parallélipipède s'incline dans la position (2), qu'il conserve jusqu'à ce qu'il prend la position (3) au moment du passage de la ligne LMN. Mais à un moment donné, où la ligne LMN est franchie pour la seconde fois, la position (2) est reprise, pour passer dans l'état (3)′ quand on atteint la ligne LKH; on revient ensuite encore une fois à (2) et enfin, lorsque le point représentatif franchit la ligne EF, le parallélipipède revient dans la position (1).

Ici toutes les rotations s'opèrent d'une façon continue.

Par contre, si nous partons de la position (5), celle-ci passe dans

---

[1]) Je laisse au lecteur le soin de considérer au même point de vue le cas $\varepsilon < {}^1/_2$, ainsi que le cas $AU > \eta > AS$. On remarquera combien sont petites les différences de poids spécifique nécessaires pour faire parcourir les états (3) et (4), surtout pour $\eta < {}^1/_2$ (comp. la fin du § 16). Les limites de densité entre lesquelles les positions (3) et (4) sont réalisables sont alors si resserrées qu'il sera fort difficile d'obtenir expérimentalement ces positions pour d'autres parallélipipèdes que pour ceux dont la section est très voisine de la forme carrée.

l'état (4) au moment où le point figuratif passe GA, et se transforme en la position (3) au passage de NA. Cette dernière position se conserve jusqu'à ce qu'elle est abandonnée subitement par le parallélipipède au moment de franchir la ligne QA, et alors, quand le frottement a amorti les oscillations, on observe la position (2) si le passage s'est effectué sur la partie au-dessous de Z, ou bien le deuxième état d'équilibre (3) si c'est la portion QZ qui est franchie. A partir de ce moment la position est la même que celle à laquelle on arrive graduellement en partant de (1); nous avons donc déjà vu ce qui se produit ultérieurement.

SUR L'ALLURE DES COURBES SPINODALES
ET DES COURBES DE PLISSEMENT POUR DES MÉLANGES BINAIRES
DE SUBSTANCES NORMALES.

4e Communication: Le pli longitudinal.

PAR

J. J. VAN LAAR.

1. Afin de faciliter l'aperçu de ce que j'ai traité jusqu'ici, je rappellerai brièvement ce que j'ai déjà communiqué à ce sujet dans ces *Archives* et dans les *Archives du Musée Teyler*.

a. Dans la *première* communication (ces *Archives*, (2), 10, 373, 1905) j'ai déduit pour des mélanges de substances *normales*, dans l'hypothèse que a et b soient indépendants de v et T et que $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$, l'équation suivante des lignes *spinodales*:

$$RT = \frac{2}{v^3}\left[x(1-x)(\alpha v - \beta\sqrt{a})^2 + a(v-b)^2\right], \tag{1}$$

et pour la projection v, x de la *courbe de plissement* j'ai trouvé:

$$(\alpha v - \beta\sqrt{a})^3\left[(1-2x)v - 3x(1-x)\beta\right] +$$
$$+ \sqrt{a}(v-b)^2\left[3(av-\beta\sqrt{a})(\alpha v - 2\beta\sqrt{a}) + \frac{a(v-b)v-3b)}{x(1-x)}\right] = 0, \tag{2}$$

où $\alpha = \sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}$ et $\beta = b_2 - b_1$.

b. Dans la *deuxième* note (ces *Archives*, (2), 10, 386, 1905) j'ai examiné de plus près la forme de ces courbes dans divers cas. Pour simplifier les calculs j'ai admis $\beta = 0$, c. à d. $b_1 = b_2$, de sorte que le rapport θ des températures critiques des deux composantes était égal au rapport π des deux pressions critiques. Posant alors $\frac{\sqrt{a_1}}{\alpha} = \varphi$, $\frac{b}{v} = \varkappa$,

$\frac{T}{T_0} = \tau$ (T_0 étant la „troisième" température critique, c. à d. la tempé-pérature de plissement pour $v = b$), les deux équations précédentes deviennent:

$$\tau = 4\omega\,[x(1-x) + (\Phi + x)^2\,(1-\omega)^2] \qquad (1a)$$

$$(1-2x) + 3(\Phi + x)\,(1-\omega)^2 + \frac{(\Phi + x)^3\,(1-\omega)^3\,(1-3x)}{x(1-x)} = 0. \qquad (2a)$$

J'ai reconnu que dans ces circonstances la ligne de plissement présente un *point double* pour $\Phi = 1{,}43$, c. à d. $\theta = \pi = 2{,}89$. Si $\theta > 2{,}89$, on se trouve dans le cas (anormal) de la fig. 1 (l. c.) (construite pour $\Phi = 1$, $\theta = (1 + {}^1/_\Phi)^2 = 4$); mais si $\theta < 2{,}89$, on a le cas normal de la fig. 2 (l. c.) (construite pour $\Phi = 2$, $\theta = 2\,{}^1/_4$).

J'ai indiqué en même temps la possibilité de l'existence d'un troisième cas (fig. 3, l. c.), où la branche de la courbe de plissement allant de C_1 vers C_2 est touchée *deux fois* par une courbe spinodale. Dans ce cas il y a encore une spinodale qui touche la branche $C_0 A$. [Dans les deux premiers cas un pareil contact n'avait lieu qu'une seule fois, ou bien (fig. 1, l. c.) sur la branche $C_1 A$ (A étant le point $x = 0$, $v = b$), ou bien (fig. 2, l. c.) sur la branche $C_0 A$ (C_0 étant le troisième point critique déjà nommé)].

J'ai reconnu ainsi que *tous* les cas anormaux découverts par M. Kuenen peuvent déjà être présentés par des mélanges de substances *parfaitement normales*.

La constatation de l'existence de deux branches différentes pour une même courbe de plissement est certainement d'une grande importance pour la théorie des mélanges, puisqu'il y a un grand nombre de phénomènes, entr'autres des phénomènes en rapport avec l'existence de divers „points de mélange critiques", qui peuvent maintenant s'expliquer tout naturellement.

c. Dans la *troisième* note (ces *Archives*, (2), 10, 405, 1907) j'ai déduit, dans le cas *absolument général* où $a_2 \gtrless a_1$, $b_2 \gtrless b_1$, l'expression suivante pour l'*élévation moléculaire* de la température critique la plus basse:

$$\Delta = \frac{1}{T_1}\left(\frac{dT}{dx}\right)_0 = \theta\sqrt{\frac{1}{\pi}}\left[\theta\sqrt{\frac{1}{\pi}}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\right)^2 - 1\right]. \qquad (3)$$

Dans le cas particulier où $\pi = 1$ ($p_2 = p_1$) cette expression se réduit à

$$\Delta = \theta(\theta - 1), \tag{3a}$$

une formule qui a été appliquée avec succès à quelques observations de MM. Centnerszwer et Büchner.

d. La *quatrième* communication a paru dans le numéro des *Archives Teyler* de novembre 1905. J'y ai abandonné la supposition restrictive $\beta = 0$ (voir *b*) dans la détermination du *point double*, pour considérer le cas général $a_2 \gtrless a_1$, $b_2 \gtrless b_1$. Cela m'a conduit à des calculs fort compliqués, mais finalement je suis arrivé à des expressions qui m'ont permis de calculer les valeurs de $\pi = \frac{p_2}{p_1}$ correspondant à des valeurs déterminées de $\theta = \frac{T_2}{T_1}$, ainsi que les valeurs de x et v au point double.

En dehors du cas spécial $\theta = \pi$ (voir *b*) j'ai encore examiné le cas $\pi = 1$; j'ai trouvé que dans ce cas le point double correspond à $\theta = 9{,}90$. Ce point est alors situé sur la ligne $v = b$.

e. La *cinquième* communication (ces *Archives*, (2), 11, 224, 1906) contenait la condition pour l'existence d'une *température critique* (*de plissement*) *minima* et pour l'existence d'un *maximum de tension de vapeur* à température élevée (c. à d. quand à basse température la pression des trois phases est plus grande que les tensions de vapeur des composantes. J'ai trouvé pour la première condition:

$$\theta < \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{(3\sqrt{\pi} - 1)^2}, \tag{4}$$

et pour la seconde:

$$\theta < \frac{\pi}{2\sqrt{\pi} - 1}. \tag{5}$$

Ces deux conditions ne sont donc pas identiques.

Puis j'ai parlé des rapports connodaux dans les trois types principaux, en les mettant en rapport avec ce que M. Korteweg (ces *Archives*, 24, 1891) et après lui M. van der Waals (ces *Archives*, (2), 10, 483, 1905) avaient déjà écrit sur ce sujet. Les transformations successives des plis principal et latéral étaient ainsi rendues plus claires, *par l'allure de la courbe de plissement et sa séparation en deux branches.*

f. Dans la *sixième* note (*Arch. Teyler* de mai 1906) j'ai commencé par approfondir la question des rapports connodaux, et j'ai donné les représentations p, x. Puis j'ai démontré que les points R_1, R_2 et R_2', où les lignes spinodales touchent la courbe de plissement, sont des *points de rebroussement* dans la représentation p, T.

J'ai fait ensuite une représentation graphique des valeurs correspondantes de θ et π pour le point double dans la courbe de plissement, conformément aux calculs mentionnés sous *d*.

Je reproduis ici la représentation graphique aussi bien que le tableau. Les résultats sont assez importants pour que j'y revienne brièvement.

Toutes les couples de substances possibles peuvent être caractérisées par les valeurs de θ et π, et ce seront en somme ces valeurs-là qui détermineront auquel des trois types principaux nous aurons affaire. Pour un aperçu général il est utile d'examiner quel est le système (θ, π) pour lequel s'opère le passage d'un type à un autre. Le passage du type I au type II (III) s'effectue précisément par le système pour lequel la ligne de plissement a un point double. Dans la fig. 1 de la planche XI ci-jointe chaque point du plan représente un système (θ, π) auquel correspond une paire de substances déterminée.

$\theta = \frac{T_2}{T_1}$	$\pi = \frac{p_2}{p_1}$	π	v/b
1,00	7,50 et 0,13	0,96 et 0,040	2,57 et 2,57
1,19	7,21 „ 0,13	0,94 „ 0,036	2,49 „ 2,60
1,71	6,26 „ 0,13	0,84 „ 0,025	2,26 „ 2,68
1,88	5,76 „ 0,13	0,78 „ 0,021	2,18 „ 2,71
2,04	5,42 „ 0,12	0,72 „ 0,018	2,11 „ 2,74
2,22	4,94 „ 0,12	0,63 „ 0,014	2,02 „ 2,79
2,89	2,89 „ 0,12	0,24 „ 0,003	1,73 „ 2,87
9,90	1,00 „ 0,11	0,01 „ 0,001	1,00 „ 2,95
∞	— „ 0,11	— „ 0,000	— „ 3,00

Dans la figure en question la ligne $C'APB$ donne les valeurs correspondantes de θ et π depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 9{,}9$. En C' on a $\theta = 0$,

$\pi = 9$; en A $\theta = 1$, $\pi = 7{,}5$; à $\theta = 2{,}22$ correspond $\pi = 4{,}94$ (cas $\pi = \theta^2$ ou $a_2 = a_1$); en P $\pi = \theta = 2{,}89$ (cas $\pi = \theta$ ou $b_2 = b_1$); en B on a $\theta = 9{,}9$, $\pi = 1$. Pour des valeurs de $\theta > 9{,}9$ le point double viendrait du côté de la ligne $v = b$ où $v < b$. Il résulte des figg. 23, 24 et 25 du travail en question qu'alors la ligne BD ($\pi = 1$) forme la limite entre les types I et II (III). En effet, partant d'un point où $\pi > 1$ (quelque petite que soit la différence) et θ relativement petit, de manière à se trouver à coup sûr dans le domaine II (III), il est clair qu'on ne saurait quitter ce domaine en laissant augmenter θ tout en conservant la même valeur de π. En effet, il est impossible de passer au type I sans atteindre un point double pour des valeurs *réalisables* de v (donc $> b$); or des considérations bien simples (voir le travail cité) nous apprennent que pour $\pi < 1$ un point double correspondrait toujours à une valeur de v plus petite que b.

Il est clair que $\theta = 0$, $\pi = 9$ revient au même que $\theta = \infty$, $\pi = {}^1/_9$; que $\theta = \pi = 2{,}89$ est identique à $\theta = \pi = {}^1/_{2{,}89} = 0{,}35$; etc. etc. (les deux composantes n'ont fait que permuter leurs rôles); il s'ensuit qu'à la ligne $C'A$ correspondra la ligne CA', et à AB correspond $A'B'$. Si maintenant on ne considère que des valeurs de θ qui sont > 1, en d'autres termes si l'on suppose toujours $T_2 > T_1$, on peut dire que le domaine du type normal II (III) est pratiquement limité par les lignes ABD, $A'A$ et $A'C$. A la droite de ABD on a le type anormal I ($C^2H^6 + CH^3OH$, éther $+ H^2O$); à la gauche de $A'C$ on a encore le type I. Mais, tandis que dans le premier domaine de I les branches de la ligne de plissement sont C_2C_0 et C_1A, dans le second domaine de I elles sont C_1C_0 C_2B (voir figg. 23 à 25 l. c.). Il est notamment aisé de faire voir (l. c.) que pour $\pi > 1$ les branches de la ligne de plissement sont ou bien C_1C_2 et C_0A (types II et III), ou bien C_1A et C_0C_2 (type I), tandis que pour $\pi < 1$ ces branches sont C_1C_2 et C_0B (types II et III) ou C_2B et C_0C_1 (type I). La ligne $\pi = 1$ sépare donc le domaine du type II (III) en deux parties, où les branches de la ligne de plissement ont l'allure que nous venons de voir (pour $\theta > 1$). Mais en pratique il ne se présentera peut être jamais qu'à $\theta > 1$ correspond une valeur de π beaucoup plus petite que 1, car le plus souvent, si la température critique est plus élevée, la pression critique est plus élevée également. On peut donc dire que pour une valeur donnée de π le type anormal I apparaît lorsque θ est *relativement grand* (plus grand que la valeur de θ relative au point de plissement double correspondant à cette valeur de θ), tandis

que le type normal II (ou III) apparaît lorsque θ est *relativement petit* (plus petit que la valeur au point double).

Il est maintenant de la plus haute importance d'examiner quand le type II passe au type III, où la ligne de plissement C_1C_2 est touchée deux fois par une ligne spinodale (en R_1 et R_2'). Cet examen a terminé mon dernier travail dans les *Arch. Teyler*.

Mais les calculs deviennent tellement compliqués, qu'il n'a pas été pratiquement possible de les effectuer pour le cas tout à fait général $a_2 \gtrless a_1$, $b_2 \gtrless b_1$. Seuls les cas particuliers $\beta = 0$ ($b_2 = b_1$ ou $\pi = \theta$) et $\pi = 1$ se prêtaient au calcul, bien qu'il fût encore assez compliqué dans ces cas simples.

J'ai trouvé que pour $\beta = 0$ le domaine du type III se réduit à rien, et qu'il apparaît pour disparaître aussitôt au point double P, où $\pi = \theta = 2{,}89$. Mais dans le cas $\pi = 1$ le domaine est compris entre $\theta = 4{,}44$ et $\theta = 9{,}9$ (le point double). C'est le domaine QB de la fig. 1. Cela veut donc dire que pour des valeurs de $\theta > 1$ et $< 4{,}44$ on a le type II (voir fig. 2*a*); pour $\theta = 4{,}44$ (en Q) il apparaît un point d'inflexion dans la ligne de plissement (voir fig. 2*b*), et de $\theta = 4{,}44$ jusqu'à $\theta = 9{,}9$ il se présente le type III (fig. 2*c*) avec deux contacts, en R_1 et R_2', des spinodales et de la courbe de plissement. Ce type disparaît au point double P, où $\theta = 9{,}9$ et où R_2 et R_2' se confondent (fig. 2*d*), et pour des valeurs de $\theta > 9{,}9$ il passe dans le type I (fig. 2*e*). Nous remarquons que les figures 2*a* à 2*e* ont été dessinées pour un cas intermédiaire (c. à d. entre $\pi = \theta$ et $\pi = 1$, voir fig. 1), car pour $\pi = 1$ la branche AR_2C_0 coïnciderait avec AB ($c = b$). Voilà pourquoi la valeur spéciale 4,44 est remplacée par θ_q (la valeur de θ en Q) et la valeur 9,9 par θ_p (la valeur de θ en P).

Nous ne connaissons donc jusqu'ici que les points P et Q (voir fig. 1) de la courbe qui sépare le type II du type III, et pour le reste l'allure de la courbe nous est absolument inconnue; voilà pourquoi elle a été représentée provisoirement en pointillé. [1])

Dans tous les cas l'étude faite dans ma note des *Arch. Teyler* a *prouvé* que le type III si anormal peut se présenter *dans des mélanges de substances normales*. Si les pressions critiques des deux composantes sont

---

[1]) Je viens de compléter l'examen de l'étendue du domaine du type III, pour le cas tout à fait général, dans les *Archives Teyler*, (2), 11, 1ère partie.

égales ($\pi = 1$), le type se présente lorsque θ est compris entre 4,1 et 9,9. Il faut donc que les températures critiques soient fort différentes, mais non (voir fig. 1) autant qu'il le faudrait pour obtenir le type I.

Je veux encore insister là-dessus que les résultats *numériques* de notre examen se modifient nécessairement si l'on ne suppose plus que b est indépendant de v et T ou bien si une ou deux des composantes sont des substances associées. Dans ces conditions les types III et I se présenteront *plus tôt* (c. à d. pour des valeurs plus petites de θ, π restant le même); mais *qualitativement* il n'y aura rien de changé. Cela résulte déjà de ceci, que le remplacement de l'hypothèse simplificatrice $b_1 = b_2$ par l'hypothèse tout à fait générale $b_1 \gtrless b_2$ (dans la première note des *Arch. Teyler*) n'a rien changé à l'existence d'un point double dans la ligne de plissement pour des valeurs correspondantes déterminées de θ et π, et que les calculs pour l'établissement de la limite du type III (dans la deuxième note des *Arch. Teyler*) peuvent s'effectuer pour le cas tout à fait général $b_1 \gtrless b_2$. Qualitativement les phénomènes restent donc identiquement les mêmes pour des couples de valeurs fort différentes de b_1 et b_2; ils ne changeront donc pas *de nature* si une couple de valeurs déterminée, relative p. ex. aux conditions critiques d'une des composantes, se modifie, soit par association, si par d'autres causes, lorsque v et T varient, pas plus que les phénomènes critiques d'une substance pure, p. ex., ne changent *de nature*, lorsque b n'est plus une constante, mais est censé dépendre de v et T, ou bien quand la substance forme des molécules complexes.

Le pli longitudinal.

2. Dans mes notes antérieures j'ai démontré que sur la ligne $C_0 C_2$ dans le cas du type I, aussi bien que sur la ligne $C_0 A$ dans le cas du type II, il se présente dans le voisinage de C_0 une température de plissement minima, de sorte qu' *à partir de* C_0, à une température déterminée T_0 (la température de plissement en C_0), il se forme par abaissement de température un *pli séparé* qui se fusionne plus tard (à la température de plissement minima) avec le pli principal (ou son pli latéral) en un point double homogène. Il s'ensuit que, dans le cas du type I p. ex., aux

basses températures le pli principal est toujours *ouvert* du côté des petits volumes, de sorte qu'une augmentation de pression ne peut jamais faire coïncider les deux phases dans lesquelles le mélange s'est séparé.

Mais considérons spécialement le cas du type II. Pour ce type les circonstances ordinaires, représentées entre autres dans mon avant-dernière note, sont les suivantes. Si l'on part des basses températures en allant vers les températures élevées, on atteint une certaine température où une ligne spinodale touche en R_2 la branche AC_0 de la ligne de plissement. Il commence à se former, de la manière connue, à l'intérieur de la ligne connodale proprement dite une connodale fermée, qui émerge de la connodale primitive à une température plus basse, et donne naissance à un nouveau pli (latéral), et en même temps à un équilibre entre trois phases (figg. 3*a* et 3*b*). En maint cas ce pli latéral a déjà fait son apparition avant que le pli partant de C_0 ait commencé à se développer à partir de C_0, à une température un peu plus basse. Plus tard les deux plis se fusionnent (en D à la température minima), après quoi ils forment de nouveau un pli latéral continu (fig. 3*c*) [1]).

Dans le cas particulier $b_2 = b_1$ le point D est toujours très rapproché de C_0 (voir ma deuxième note). Si dans ce cas on a p. ex. $\frac{T_2}{T_1} = 2^1/_4$, $\frac{T_m}{T_0} = 0{,}99$, T_m étant la température du minimum en D. Alors le véritable pli longitudinal autour de C_0 n'existe qu' aux très hautes pressions (fig. 3*b*), tandis que le pli ouvert de la fig. 3*c* ne peut pas bien être appelé un pli longitudinal, mais est plutôt le pli accessoire du pli transversal fusionné avec le pli longitudinal primitif. Ici une augmentation de pression produit toujours un rapprochement des deux phases liquides coexistantes, sauf à des pressions très élevées, où les phases s'écartent de nouveau l'une de l'autre.

Le calcul nous apprend que dans le cas tout à fait général $b_1 \gtrless b_2$ le point D peut se rapprocher beaucoup plus de R_2, et aussi que la température du point de plissement C_0 peut être relativement élevée, de sorte que, contrairement à ce qui a été représenté dans la fig. 3*a*, le pli longitudinal existe déjà autour de C_0 bien avant qu' il se produit un

[1]) Dans cette figure et dans quelques figures suivantes les lignes spinodales semblent se toucher au point double homogène D au lieu de se *couper*, ainsi que cela doit être.

équilibre de trois phases en M (figg. 4*a* et 4*b*). La coïncidence de ce pli longitudinal, qui a déjà une forte extension, avec le pli latéral se produit donc beaucoup plus près de la ligne 1,2 du triangle des trois phases, de sorte qu'après la fusion le pli prend la forme dessinée dans la fig. 4*c*, ce qui fait qu'il conserve en grande partie le caractère du pli longitudinal proprement dit. Ainsi donc, au commencement une augmentation de pression produit un rapprochement des phases (cette partie peut être très petite mais elle existera généralement); mais ensuite l'augmentation de pression fait que les deux phases 1 et 2 s'ecartent l'une de l'autre, de sorte que x_1 et x_2 tendent vers des valeurs limites ($p = \infty$), sans que le pli longitudinal se referme de nouveau, ce que jusqu'ici on considérait comme possible (voir e. a. v. D. Waals, Cont. II, p. 190). En effet, par suite du minimum en D le pli longitudinal entoure toujours le point C_0. Ce n'est qu' à des températures plus hautes que T_0, où le pli longitudinal n'existe pas encore, qu' il peut être question d'une homogénéité permanente aux hautes pressions. Mais alors le point de plissement P appartient au *pli accessoire* du *pli transversal* et *non* au pli longitudinal. C'est ce qu' indique p. ex. la fig. 3*a*, *après* que la connodale fermée a percé en M la connodale proprement dite du pli transversal; ou bien la fig. 3*b*, *avant* qu' il s'est développé un pli longitudinal autour de C_0.

Il peut évidemment se présenter encore le cas où le pli autour de C_0 coïncide avec le pli accessoire au moment précis où le point de plissement de ce dernier pli sort du pli transversal, ainsi que le représente la fig. 5*a*; mais cela nécessite évidemment une *relation* entre ϑ et π et est par conséquent *un cas tout à fait particulier*. Alors l'émergence du pli accessoire se produit au minimum en D. Après la coïncidence le pli présente alors la forme représentée fig. 5*b*. Dans ces conditions les deux phases 1 et 2 vont en s'ecartant l'une de l'autre *dès l'origine* par une augmentation de pression.

Mais il peut arriver aussi que le pli longitudinal autour de C_0 rencontre la ligne connodale du pli transversal *avant* que la connodale fermée ait apparu à l'intérieur (fig. 6*a*). Alors l'équilibre de trois phases ne se développe pas, comme dans la fig. 4*a*, au pli transversal (d'où se détache un pli accessoire), mais au pli *longitudinal* autour de C_0. Ce dernier pénètre dans le pli transversal jusqu'à ce qu'il rencontre en D la connodale fermée isolée (fig. 6*c*), après quoi le fusionnement a lieu dans le domaine irréalisable (fig. 6*c*).

Ce pli est le *pli longitudinal proprement dit*, dont il est question le plus souvent dans le cas de mélanges de substances difficilement miscibles. Mais on ne doit pas oublier qu'il peut tout aussi bien se présenter le cas traité ci-dessus de la fig. 4, avec la fig. 5 comme cas transitoire.

Le calcul apprend que le cas de transition se présente lorsque le rapport θ des températures critiques des deux composantes est voisin de 1, et qu'en même temps le rapport π des pressions critiques est assez élevé.

Les deux représentations p, T des figg. 7 et 7*a* donnent une idée nette de ces divers rapports. (La température de C_0 y est prise plus basse que celle de R_2, mais elle pourrait tout aussi bien être plus élevée). Les points de plissement p' sur la portion $R_2 A$ au-dessous du point de rebroussement sont les points de plissement irréalisables (voir aussi les figg. 3 à 6); de même les points de plissement p en avant de M sur la portion $R_2 M$ (la connodale fermée isolée n'est pas encore venue à l'extérieur). Tous les points de plissement P au-delà de M sont réalisables.

D'après ce qui précède nous arrivons à cette conclusion que, dans tous les cas où il se présente un pli longitudinal net de la forme représentée dans les figures 4*c* et 6*c* (c. à d. quand le minimum D est près de R_2), le point de mélange critique des trois phases ne doit pas toujours être situé sur le pli longitudinal (voir fig. 4*c*), et aussi que le pli longitudinal avec le point de plissement P ne se fusionnera pas toujours avec le pli transversal même, mais peut aussi se confondre avec son pli accessoire; au moment de cette fusion il n'y a pas d'équilibre entre trois phases, c. à d. qu'il n'y a pas de phase vapeur (voir fig. 4*c*). Mais les deux phases liquides 1 et 2 coïncident alors.

Il est évident que le cas représenté par les figg. 5*a* et 5*b* est tout particulier, et l'on peut calculer les conditions nécessaires à son apparition (voir ci-dessus). Ce calcul, tout comme celui qui fait connaître en général la situation des points R_2, D et M, seront publiés dans les *Archives Teyler*. [1]) Mais il va de soi que les considérations générales précédentes ne dépendent en aucune façon de ces calculs spéciaux.

Il n'est peut-être pas superflu de faire remarquer que ni dans la fig. 5*a* ni dans 6*a* la composition x_3 de la phase vapeur n'est égale à celle $x_{1,2}$ des deux phases liquides coïncidantes, ainsi que M. VAN DER

---

[1]) Le numéro des *Archives Teyler* contenant ces calculs a déjà paru (voir la note, page 394).

LEE [1]) croit l'avoir démontré. Nous savons maintenant que si aux basses températures x_3 est compris entre x_1 et x_2 il ne faut pas qu'il en soit ainsi jusqu'au moment où x_1 et x_2 coïncident. Cette circonstance serait toute fortuite; en général un des deux maxima, p. ex. sur la ligne p, x, qui sont situés entre x_1 et x_2 dans la région labile, *viendra à l'extérieur* avant la coïncidence de x_1 et x_2 [2]). C'est ce que j'avais déjà montré en détail dans un travail antérieur [3]), et un peu plus tard M. KUENEN [4]) arriva indépendamment de moi à la même conclusion. D'ailleurs, en 1900, M. SCHREINEMAKERS [5]) avait prouvé expérimentalement cette sortie précisément pour le même mélange (phénol et eau) pour lequel M. VAN DER LEE croyait pouvoir prouver par voie théorique qu'il fallait avoir $x_3 = x_{1,2}$ [6]).

Enfin je veux encore faire remarquer que l'allure particulière de la ligne de plissement, dans la représentation p, T et dans le voisinage du point D (fig. 7), et la *non*-coïncidence des deux moments critiques, indiquée par les figg. 4*a* et 4*c* (puisque D et M ne coïncident *pas* en général), donnent probablement l'explication du phénomène éminemment énigmatique, et encore inexpliqué jusqu'ici, que MM. GUTHRIE et ROTHMUND ont observé dans leurs expériences [7]), savoir l'apparition et la disparition consécutive d'un trouble net par échauffement au-dessus de la „température de mélange critique", un trouble qui persistait parfois jusqu'à 10° au-dessus de cette température. [8])

---

[1]) N. J. VAN DER LEE, Dissertation, Amsterdam, 1898, pp. 66 à 69, 73 à 74, et thèse III. Voir aussi VAN DER WAALS, Cont. II, p. 181.

[2]) Voir *Versl. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam*, 5 avril 1905, figg. 12*a* à 12*f* et § 8, pp. 669 et 670, ainsi que la note au bas de la page 665.

[3]) *Ibidem*, 27 juin 1903.

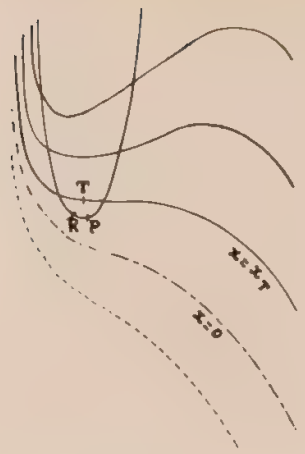
[4]) *Ibidem*, 31 oct. 1903. Voir aussi: KUENEN, Theorie der Verdampfung und Verflüssigung von Gemischen. Leipzig 1906, p. 170 note.

[5]) Ces *Archives*, (2), 4, 348, 1901.

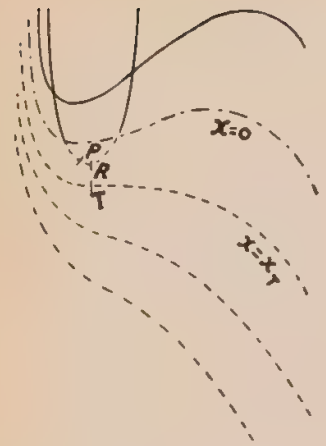
[6]) Les calculs apprennent d'ailleurs que la supposition $x_3 = x_{1,2}$ au point M conduit à des conclusions non seulement étranges, mais éminemment absurdes.

[7]) *Zeitschr. f. Physik. Chem.*, 26, 446, 1898. Voir aussi FRIEDLÄNDER, Ueber merkwürdige Erscheinungen in der Umgebung des kritischen Punktes. *Zeitschr. f. Physik. Chem.*, 38, 385, 1901.

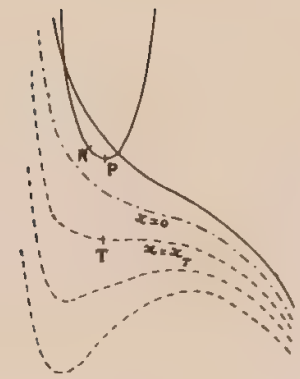
[8]) Voir le numéro cité des *Archives Teyler* qui vient de paraître.



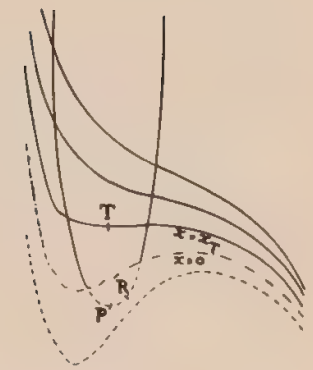
$m_{01} > 0, \alpha > 0, \quad RT^2 k\, k_{11}\, \alpha < m^2_{01}, \quad T > Tk.$
Fig. 1.



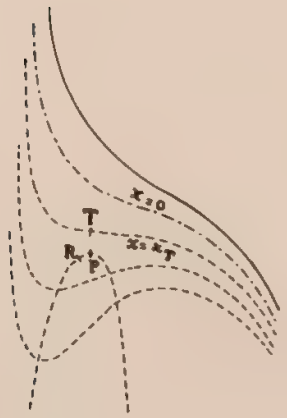
$m_{01} > 0, \alpha > 0, \quad RT^2 k\, k_{11}\, \alpha < m^2_{01}, \quad T < Tk.$
Fig. 2.



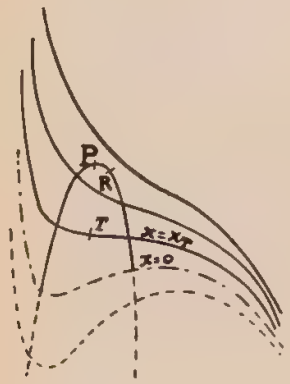
$m_{01} > 0, \alpha < 0, \quad RT^2 k\, k_{11}\, \alpha < m^2_{01}, \quad T > Tk.$
Fig. 3.



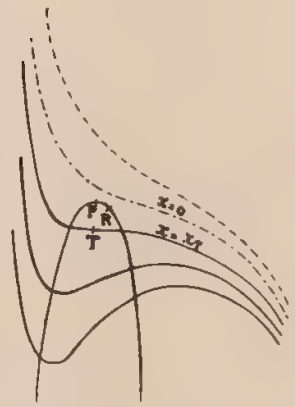
$m_{01} > 0, \alpha < 0, \quad RT^2 k\, k_{11}\, \alpha < m^2_{01}, \quad T < Tk$
Fig. 4.



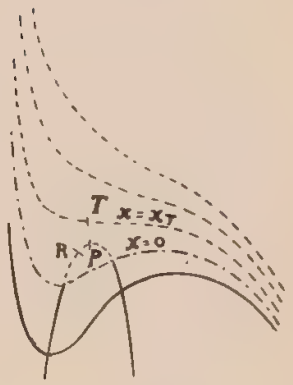
$m_{01} > 0, \alpha < 0, \quad RT^2 k\, k_{11}\, \alpha > m^2_{01}, \quad T > Tk.$
Fig. 5.



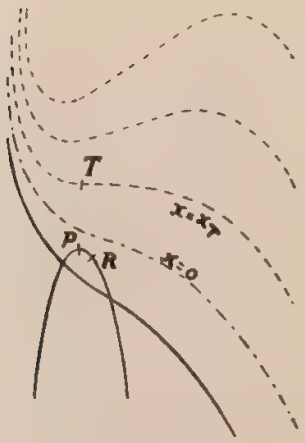
$m_{01} > 0, \alpha < 0, \quad RT^2 k\, k_{11}\, \alpha > m^2_{01}, \quad T < Tk.$
Fig. 6.



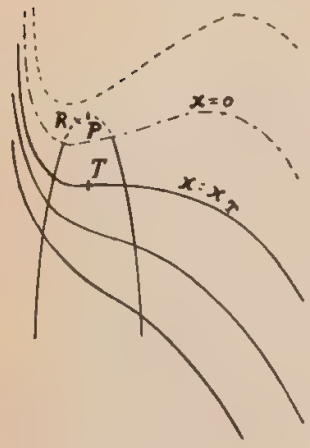
$m_{01} < 0, \alpha > 0, \quad RT^2 k\, k_{11}\, \alpha < m^2_{01}, \quad T > Tk.$
Fig. 7.



$m_{01} < 0, \alpha > 0, \quad RT^2 k\, k_{11}\, \alpha < m^2_{01}, \quad T < Tk.$
Fig. 8.

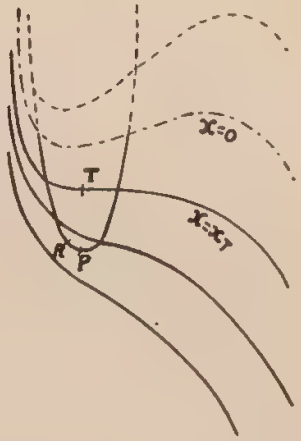


$m_{01} < 0, \alpha < 0, \quad RT^2 k\, k_{11}\, \alpha < m^2_{01}, \quad T > Tk.$
Fig. 9.

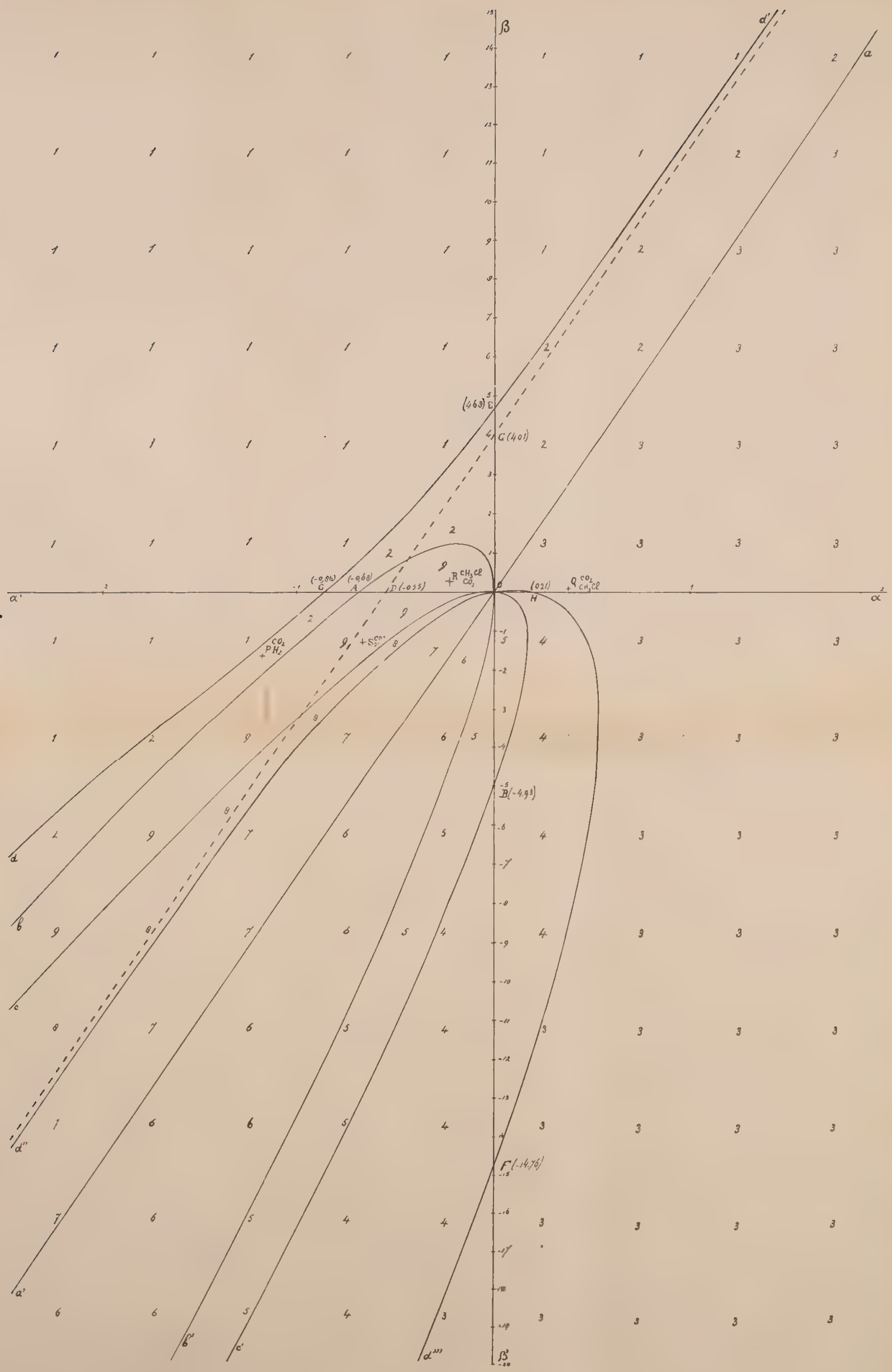


$m_{01} < 0, \alpha < 0, \quad RT^2 k\, k_{11}\, \alpha < m^2_{01}, \quad T < Tk.$
Fig. 10.

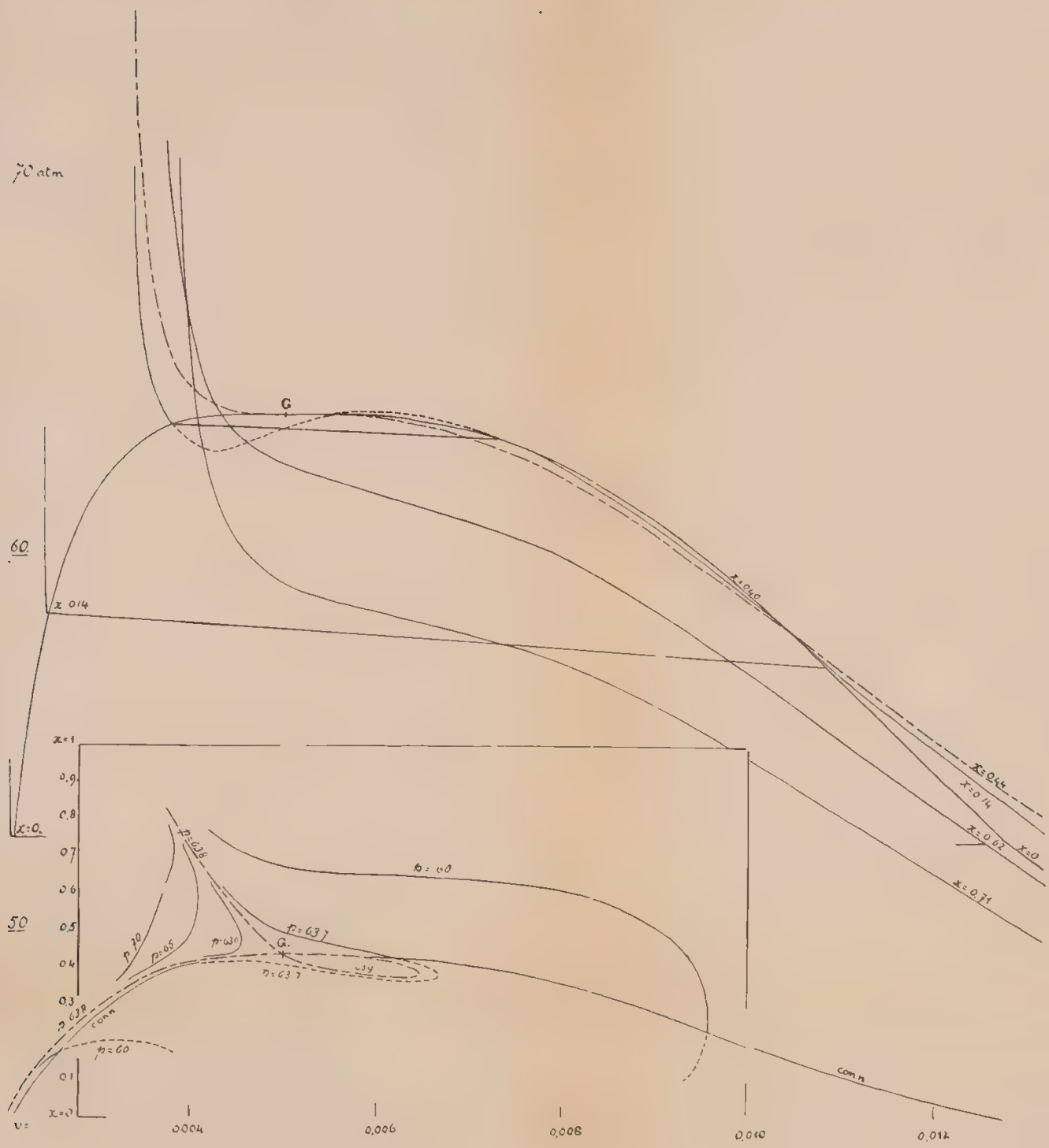
$m_{01} < 0, \alpha < 0, \quad RT^2 k\, k_{11}\, \alpha > m^2_{01}, \quad T > Tk.$
Fig. 11.



$m_{01} < 0, \alpha < 0, \quad RT^2 k\, k_{11}\, \alpha > m^2_{01}, \quad T < Tk.$
Fig. 12.

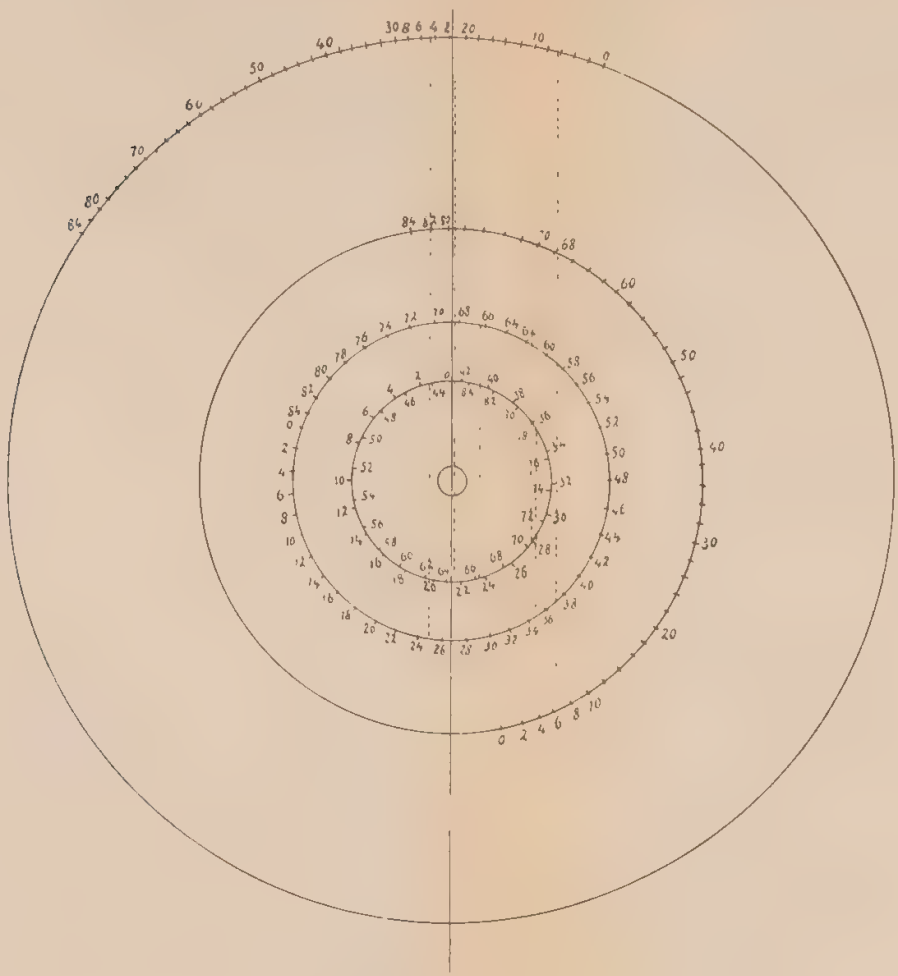


J. E. Verschaffelt. Contributions à la connaissance de la surface ψ de van der Waals, VII.

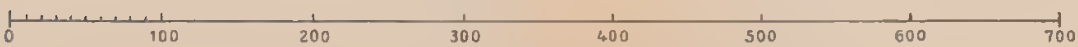


J. E Verschaffelt. Contributions à la connaissance de la surface ψ de van der Waals, VIII.

Origine: la conjonction géocentrique supérieure de I, le 12 juillet 1908,
à $11^h\,2^m{,}3$ t. m. Greenwich $= 11^h\,11^m{,}65$ t. m. Paris $= 23^h\,11^m{,}65$ temps civil Paris.

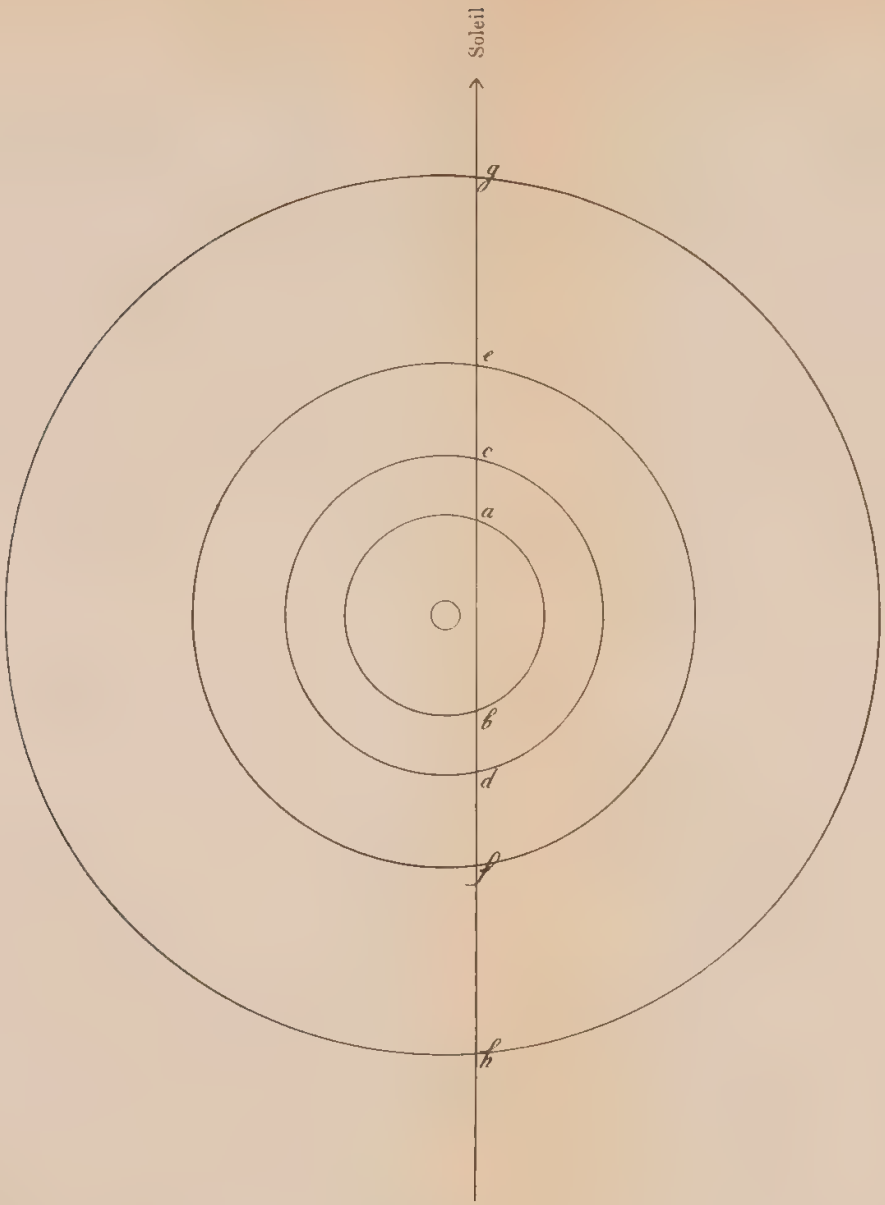


Echelle $\frac{1}{30\,168\,000\,000}$ $1^{mm}. = 8''$héliocentriques.



L'unité est le rayon de l'équateur terrestre.

J. A. C. Oudemans. Occultations et éclipses mutuelles des Satellites de Jupiter en 1908.

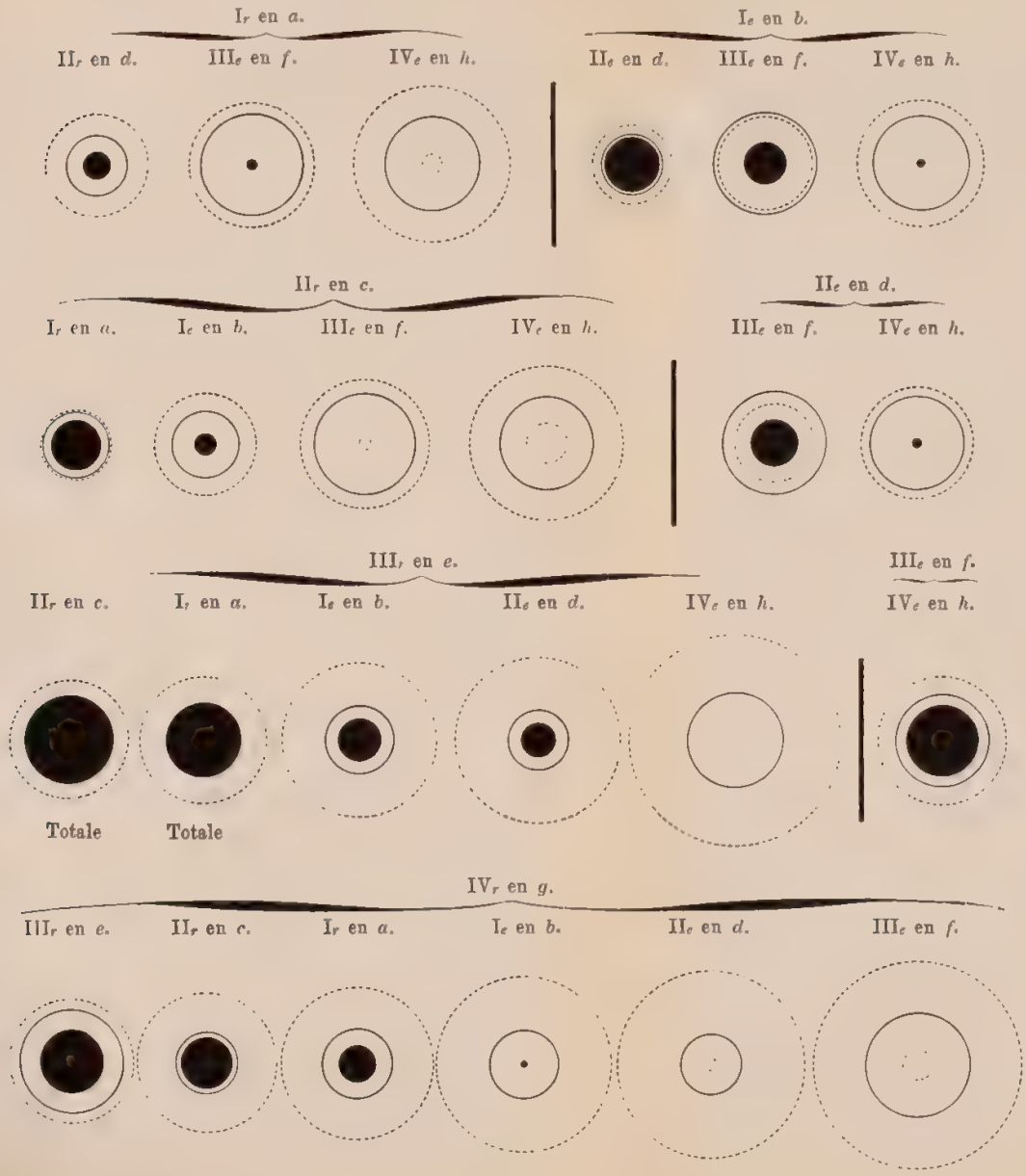


Echelle $\frac{1}{30\,168\,000\,000}$. A cette échelle le soleil a un diamètre de 0,045 m. et se trouve à une distance de 25,783 m.

J. A. C. Oudemans Occultations et éclipses mutuelles des Satellites de Jupiter en 1908.

N. B. Les cercles pleins représentent les contours des Satellites, les cercles pointillés les limites des pénombres.

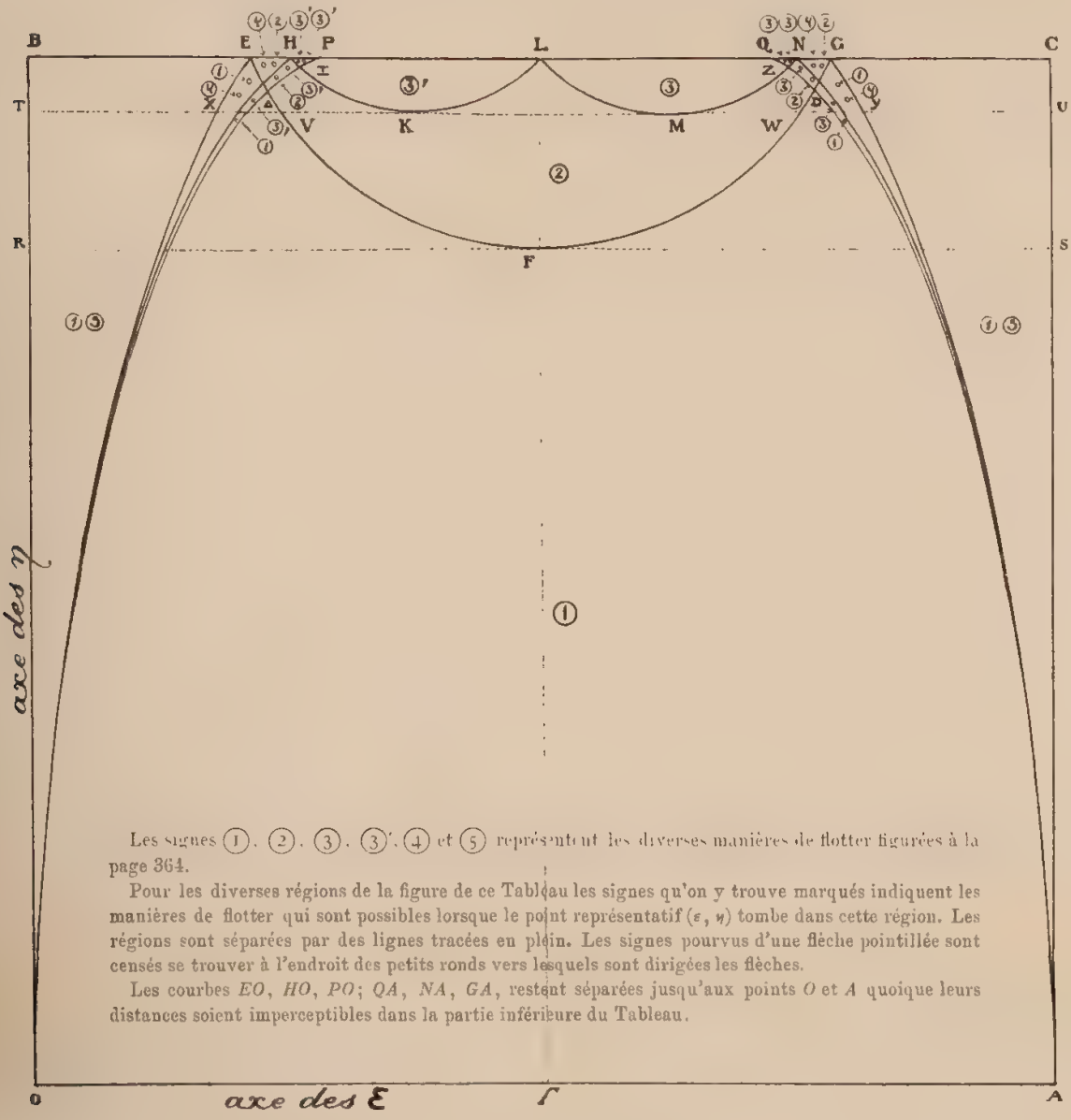
Echelle 1 : 314 250 000. 12mm = 1" héliocentrique.



J. A. C. Oudemans. Occultations et éclipses mutuelles des Satellites de Jupiter en 1908.

TABLEAU REPRÉSENTANT LA SOLUTION COMPLÈTE DU PROBLÈME DU PARALLÉLIPIPÈDE RECTANGLE FLOTTANT AVEC LES ARÊTES LONGITUDINALES DANS LA SITUATION HORIZONTALE.

ε = rapport de la densité du parallélipipède à celle du liquide.
η = rapport du côté le plus petit de la section verticale rectangulaire au plus grand côté de cette section.



Les signes ①, ②, ③, ③', ④ et ⑤ représentent les diverses manières de flotter figurées à la page 364.

Pour les diverses régions de la figure de ce Tableau les signes qu'on y trouve marqués indiquent les manières de flotter qui sont possibles lorsque le point représentatif (ε, η) tombe dans cette région. Les régions sont séparées par des lignes tracées en plein. Les signes pourvus d'une flèche pointillée sont censés se trouver à l'endroit des petits ronds vers lesquels sont dirigées les flèches.

Les courbes EO, HO, PO; QA, NA, GA, restent séparées jusqu'aux points O et A quoique leurs distances soient imperceptibles dans la partie inférieure du Tableau.

Données principales.

$$BE = GC = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3} = 0{,}211..;\quad BH = NC = 0{,}25;\quad BP = QC = \frac{9}{32} = 0{,}28125$$

$$BT = CU = 1 - \sqrt{\frac{8}{9}} = 0{,}05719..;\quad BR = CS = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}1835..$$

Equations des courbes du Tableau..

HKL: $2\eta^2\varepsilon(3-4\varepsilon) = 1$; LMN: $2\eta^2(1-\varepsilon)(4\varepsilon-1) = 1$; EFG: $6\eta^2\varepsilon(1-\varepsilon) = 1$;
EO et GA: $6\varepsilon(1-\varepsilon) = \eta^2$; HO: $2\varepsilon(3-4\varepsilon) = \eta^2$; NA: $2(1-\varepsilon)(4\varepsilon-1) = \eta^2$;

$$PO\ \varepsilon^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\left[(1+\eta)^{\frac{2}{3}} - (1-\eta)^{\frac{2}{3}}\right]\eta^{-\frac{1}{3}};\quad QA: (1-\varepsilon)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}\left[(1+\eta)^{\frac{2}{3}} - (1-\eta)^{\frac{2}{3}}\right]\eta^{-1}.$$

L'ENREGISTREMENT DES BRUITS DU CŒUR DE L'HOMME À L'AIDE DU GALVANOMÈTRE À CORDE,

PAR

W. EINTHOVEN.

AVEC LA COLLABORATION DE

A. FLOHIL et P. J. T. A. BATTAERD.

Il y a déjà quelques années que nous avons élaboré au laboratoire de physiologie de Leyden une méthode pour enregistrer les bruits du cœur [1]; comme instrument enregistreur on se servait dans cette méthode de l'électromètre capillaire. Les courbes que j'ai publiées à cette époque ne faisaient pas seulement connaître l'instant auquel un bruit cardiaque commençait ou cessait [2], mais elles apprenaient aussi les différences de qualité de ces bruits.

Pourtant les tracés ne donnaient par eux-mêmes qu'une représentation graphique inexacte des bruits examinés. Pour en déduire la représentation graphique exacte il eût fallu les soumettre à des mesures de longue durée et à de nombreux calculs, qui n'ont pas été effectués alors. En 1894 on s'est contenté des images photographiques elles-mêmes, parce qu'elles donnaient déjà des formes très typiques pour le premier bruit et le deuxième, tels qu'on les obtient chez le lapin et en divers endroits de la région précordiale chez l'homme.

---

[1]) W. Einthoven et M. A. J. Geluk, Die Registrirung der Herztöne, Pflüger's *Arch. f. d. gesammte Physiol.*, 57, 617, 1894.

[2]) La méthode de Hürthle (*Deutsche mediz. Wochenschr.*, 1893, n°. 4) avait en particulier pour but d'indiquer nettement le moment précis du commencement d'un bruit cardiaque. Il en est de même de la méthode de Holowinski, *Arch. de physiol. norm. et path.*, (5), 8, 893, 1896.

Et cependant on conçoit que des images précises sont préférables aux courbes directement enregistrées par l'électromètre capillaire [1]); or, on obtient déjà un degré de précision suffisant en remplaçant simplement l'électromètre capillaire par un galvanomètre à corde, beaucoup plus sensible et réagissant beaucoup plus rapidement.

J'ai déjà montré [2]) jusqu'à quel point le galvanomètre à corde est capable de reproduire exactement des vibrations rapides. Parmi ma collection de fils de quartz argentés, c'est le n°. 20 qui est le plus léger. Il a 2,5 cm. de longueur et 1 μ d'épaisseur, et ne pèse que $1,5 \times 10^{-7}$ g. environ, un poids si petit qu'aucune balance ne l'accuse. Ce fil peut être tendu comme une corde de violon, et exécute alors des vibrations dont la période propre est de 0,31 σ. Cette période correspond à celle d'un son de 3230 vibrations par sec., ce qui est environ le *sol*^{4} dièze (*gis*^{4}), ou presque le son le plus haut d'un piano ordinaire.

Mais la tension du fil peut encore être augmentée sans danger de rupture. On pourrait d'ailleurs prendre un fil plus court, de sorte qu'on peut disposer si l'on veut de périodes de vibration plus petites encore.

Mais il est inutile de profiter de ces avantages pour enregistrer les bruits du cœur. On sait en effet que la hauteur des sons produits par l'activité cardiaque est beaucoup plus basse que celle des sons dont je viens de parler, de sorte que les vibrations amorties de la corde choisie doivent être la reproduction presque irréprochable du mouvement périodique qui lui est communiqué par les bruits du cœur.

Mais bien que l'on puisse prétendre que le fil de quartz du galvanomètre à corde est capable de suivre exactement les vibrations aériennes produites par les bruits, il n'est pas encore dit par là que toutes les difficultés qui se présentent dans l'enregistrement soient résolues. Dans la méthode que nous avons appliquée, les vibrations de l'air produites par le son à enregistrer doivent d'abord mettre en mouvement la plaque

[1]) Tout récemment encore M. Otto Frank a insisté sur ce point; voir *Münch. mediz. Wochenschrift*, 51e Jahrg., n°. 22, 1904.

M. Frank a réussi à enregister les bruits cardiaques directement, par voie mécanique, mais je n'ai jamais vu de reproductions des courbes qu'il a obtenues. Elles ne figurent pas dans sa note susmentionnée. Au sujet d'une tentative d'enregistrement mécanique de bruits cardiaques, voir aussi Hürthle, *Zentralbl. f. Physiol.*, 18, 617, 1904.

[2]) Voir plusieurs publications dans ces *Archives*, depuis 1903.

d'un microphone, traversé par un courant continu que fournit une source de courant constant. Les vibrations de la plaque font naître des variations d'intensité dans le courant du microphone, et ce sont ces variations qui, par l'intermédiaire d'un transformateur, mettent en mouvement le fil de quartz du galvanomètre à corde. On aura donc à tenir compte non seulement des propriétés du fil de quartz, mais encore de celles du microphone et du transformateur.

Il est vrai qu'au point de vue de la reproduction de vibrations de haute fréquence les microphones du commerce ne satisfont pas à d'aussi hautes exigences que le galvanomètre à corde, mais pour notre but, qui est d'enregistrer les bruits cardiaques, nous pouvions sans difficulté faire usage d'un appareil BERLINER, adopté par mainte société téléphonique. La construction d'un transformateur convenable ne présente pas de difficultés non plus. J'ai fait construire dans ce but un transformateur réglable, sans fer et sur bobines d'ébonite; mais nous pouvions faire usage, sans grand préjudice, d'un appareil d'induction ordinaire de DU BOIS-REYMOND ou de HELMHOLTZ, pourvu que nous enlevions le fer de la bobine primaire. Je laisserai de côté ici les calculs qui ont été faits pour arriver au transformateur le mieux approprié à notre but; je les communiquerai à une autre occasion, lorsque je parlerai de l'enregistrement de sons très élevés.

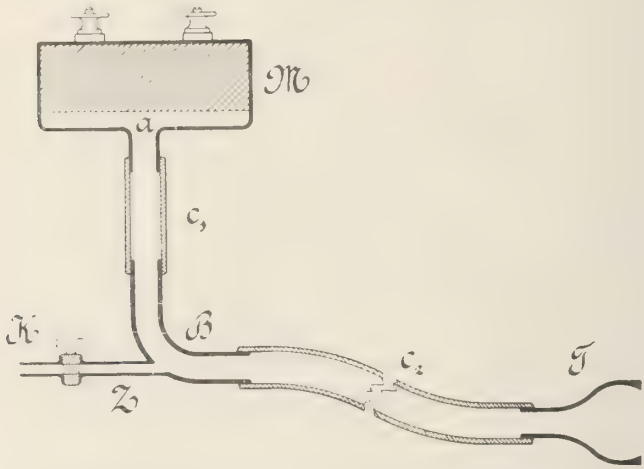
La figure ci-contre fait voir comment le son d'un bruit du cœur est amené au microphone.

Le microphone M est assujetti au milieu d'un anneau en fer assez lourd, non représenté dans la figure, qui est suspendu en trois points pour être à l'abri des trépidations, de la façon recommandée par M. JULIUS. Les trois fils d'acier auxquels l'anneau est suspendu sont munis de ressorts d'acier à leur extrémité inférieure, de manière à amortir des secousses verticales aussi bien que horizontales.

B est un tube métallique courbé, muni d'un tube latéral Z qui porte un robinet K. Le tube B même est solidement fixé à un pilier ou à une table murale, et l'une de ses extrémités est reliée au microphone par un tube en caoutchouc c_1, l'autre à l'entonnoir T d'un stéthoscope par l'intermédiaire d'un tube en caoutchouc c_2. Ce dernier tube a environ 75 cm. de longueur. On peut prendre l'entonnoir en main et l'agiter sans que le microphone présente la moindre trace de trépidation. On peut s'en assurer au moyen d'un miroir de mercure, dont les rides

constituent un réactif très sensible aux secousses, et au moyen duquel on peut vérifier aisément, et à chaque instant, la perfection de la méthode de JULIUS.

Le robinet K est toujours laissé largement ouvert, de sorte que la pression de l'air dans le système des tubes $c_1 B c_2$ reste toujours égale à la pression de l'air extérieur. De cette façon on exclut absolument la transmission de secousses ou de chocs du stéthoscope au microphone,



qui ne peut donc être frappé que par des ondes provenant de vibrations de l'air.

Sur les planches XII et XIII sont reproduits un certain nombre de photogrammes de bruits du cœur, obtenus à l'aide du galvanomètre à corde [1]). Le fil de quartz dont nous avons fait usage, le n°. 15, n'était pas aussi léger que le n°. 20, mais il était toujours fortement tendu et satisfaisait suffisamment aux conditions exigées. Comme d'ordinaire nous projetions, pendant l'enregistrement des courbes fournies par le galvanomètre à corde, suivant la méthode de GARTEN [2]) un réseau de milli-

[1] Nous sommes tout disposés à envoyer des reproductions de nos négatifs à tous ceux qui nous en exprimeront le désir.

[2]) Dr. SIEGFRIED GARTEN, *Abhandl. der K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig*, Mathem.-phys. Kl., 26, n°. 5, 1901.

mètres carrés sur la plaque sensible, ce qui facilitait considérablement, dans la suite, la mesure des bruits enregistrés.

La vitesse de rotation du disque à rayons était fort constante et correspondait toujours exactement à la valeur fixée d'avance. Les écarts étaient inférieurs à 1 : 1000, de sorte que les distances entre les ordonnées fournissent une bonne mesure du temps, sauf à certains endroits, régulièrement espacés, qui correspondent à des rayons qui ont été déplacés fortuitement.

Mais la vitesse de déplacement de la plaque sensible a été le plus souvent trop grande pendant les expériences, ce qui fait que les distances entre les ordonnées sont plus grandes que 1 mm. Bien que cette circonstance soit sans influence sur la précision des mesures de temps, les appareils ont été modifiés depuis, en vue de nouvelles expériences, de telle sorte que la vitesse de déplacement de la plaque sensible pût être mieux réglée.

En faisant les photogrammes reproduits à la suite de ce travail, nous avons donné à la plaque deux vitesses:

Dans les figures 1 et 2 de la planche XII et 8 et 9 de la planche XIII 1 mm. en abscisse correspond à 0,04 sec., tandis que dans les autres figures 1 mm. en abscisse a une valeur de 0,02 sec.

On aurait pu donner à la plaque sensible des vitesses plus grandes encore, p. ex. jusqu'à 1000 mm. p. sec. [1]). Mais, si l'on applique ces grandes vitesses à l'étude de la forme des ondes sonores, on perd l'avantage de reproduire un grand nombre de bruits du cœur sur une petite étendue.

Les différences entre les courbes reproduites dans ce travail et celles obtenues auparavant à l'aide de l'électromètre capillaire sautent aux yeux. Nous n'avons pas à y insister et il suffit que nous fassions remarquer la symétrie presque parfaite par rapport à la ligne zéro, qui caractérise les courbes actuelles.

Les figures 1, 2, 3 et 4 représentent les bruits de la pointe du cœur chez quatre personnes différentes. On reconnaît aisément quelles sont les vibrations de la corde qui correspondent au bruit systolique et quelles autres correspondent au bruit diastolique Je les ai d'ailleurs distinguées par les chiffres 1 et 2, et j'ai indiqué la durée de la systole

---

[1]) Voir p. ex. les figg. 12 et 13 dans ces *Archives*, (2), 11, 249 et 250, 1906.

par une accolade qui s'étend du commencement du premier bruit jusqu'au commencement du second.

Si l'on examine les photogrammes de plus près, on remarque en premier lieu quelques particularités communes aux divers tracés. On voit que chez tous les sujets le premier bruit est plus intense et de plus longue durée que le deuxième. Il est impossible d'attribuer une hauteur à ces bruits, parce qu'ils sont irréguliers, et sont comparables à de courtes secousses plutôt qu'à des sons musicaux. Mais, quelque irréguliers que soient ces bruits, ils sont caractéristiques pour chaque personne. Si l'on compare p. ex. les premiers bruits des diverses révolutions cardiaques de la fig. 1, on constate une identité tellement grande, qu'on dirait que ce sont toutes copies d'un seul et même modèle. Il en est de même des bruits diastoliques, et, bien qu'il y ait des différences entre les figures relatives à diverses personnes, à chaque figure en particulier s'applique la même remarque qu'à la fig. 1.

Pour bien juger des différences présentées par les quatre figures entr'elles, on doit tenir compte de deux circonstances. En premier lieu j'ai déjà dit que la vitesse de la plaque sensible était deux fois plus grande pendant l'obtention des épreuves 3 et 4 que pour les épreuves 1 et 2. En second lieu les courants électriques qui sont conduits vers le galvanomètre n'ont pas été affaiblis au même degré pour les quatre photogrammes. Il s'ensuit que de la différence d'amplitude des vibrations de la corde dans ces quatre photogrammes on ne peut pas conclure à une différence d'intensité des bruits du cœur. L'installation galvanométrique était tellement sensible, que l'image de la corde aurait été lancée hors du champ si l'on avait voulu enregistrer les bruits du cœur avec leur intensité propre. Dans tous les photogrammes il a donc fallu réduire plus ou moins l'amplitude des mouvements de la corde. C'est surtout chez des sujets jeunes et maigres, dont la paroi thoracique est mince, de sorte que les bruits sont forts, comme dans le cas *Mo* fig. 3, et puis encore dans certains cas pathologiques, que l'on est obligé de réduire notablement les mouvements de la corde.

Cette réduction peut s'effectuer de plusieurs manières et il ne serait pas difficile d'employer dans cette réduction des mesures déterminées, de manière à pouvoir déduire des dimensions des courbes obtenues et du degré de réduction les intensités réelles. Mais pour le moment nous n'avons pas encore fait de pareils calculs et nous nous sommes contentés

de diminuer le courant dans le microphone de manière à obtenir des écarts convenables dans les mouvements de la corde.

Mais *un même photogramme* permet de déduire immédiatement les rapports d'intensité des divers sons de la fréquence et de l'amplitude des vibrations de la corde; l'intensité de chaque son est notamment proportionnelle au produit du carré de la fréquence et du carré de l'amplitude.

Pour pénétrer plus loin dans l'étude des différences entre les bruits de la pointe du cœur chez les quatre sujets examinés, il faudra porter son attention, non seulement sur la fréquence et la forme générale des vibrations sonores, mais encore sur le rapport des amplitudes des vibrations du premier et du deuxième bruit, sur la durée de chacun des deux bruits en particulier, et sur la durée de la systole et de la diastole.

Les figures 5 (pl. XII) et 6 (pl. XIII) reproduisent les bruits de l'artère pulmonaire de deux personnes, tels qu'on les observe près du sternum dans le deuxième espace intercostal de gauche. On remarque nettement la différence avec les bruits de la pointe. Le premier bruit a une durée plus courte, tant pour ce qui regarde la valeur absolue qu'en comparaison avec la durée du 2e bruit. C'est surtout cette dernière circonstance qui saute immédiatement aux yeux.

Dans la fig. 5 la phase entre le premier et le deuxième bruit n'est pas absolument tranquille, bien que l'auscultation n'eût révélé chez le sujet *Ba*, un jeune homme sain et dont le cœur fonctionnait normalement, aucun souffle systolique à l'orifice de l'artère pulmonaire. Les vibrations entre le premier bruit et le deuxième sont d'autant plus remarquables que le fil de quartz revient presque complètement au repos à chaque grand silence.

Dans la fig. 6 appartenant au sujet *Ou* on voit, contrairement à ce que présentait la fig. 5, que le deuxième bruit est nettement plus fort que le premier, et que dans l'intervalle entre le 1er et le 2e bruit il y a tout aussi peu de vibrations que pendant le grand silence.

Je finirai cette note en indiquant simplement les figg. 7, 8, 9 et 10 de la planche XIII. Elles représentent les bruits et les souffles du cœur de trois malades de l'hôpital de l'université de Leyden. Pendant que les malades restaient à l'hôpital, leurs bruits cardiaques étaient enregistrés, à l'aide du galvanomètre à corde, au laboratoire de physiologie, distant d'à peu près 1,5 km. J'ai décrit dernièrement, dans une note sur le

télécardiogramme [1]), la façon dont les deux établissements sont reliés à l'aide de fils électriques, jusqu'à quel point la précision des images graphiques est influencée par l'emploi des câbles de raccordement, et jusqu'à combien de kilomètres on peut porter la distance du malade à l'appareil enregistreur, avant que les résultats soient notablement contrariés. Nous n'y reviendrons plus maintenant et nous passerons directement à l'examen des photogrammes.

La fig. 7 nous donne à voir les bruits de l'artère pulmonaire d'un malade dont le cœur fait nettement entendre un souffle systolique. Dans le photogramme le premier bruit passe graduellement à un souffle; il n'y a pas de limite bien marquée entre le premier ton et le souffle, tandis que le deuxième ton, plus fort que le premier, est nettement séparé du souffle, de sorte que l'instant où la diastole commence peut être indiqué avec une assez grande précision. Remarquons encore que pendant le grand silence on ne constate presque pas la moindre vibration de la corde.

La fig. 8 représente les bruits que l'on entend à la pointe du cœur d'une malade atteinte de sténose et d'insuffisance mitrale. Chez cette malade la main ressent à la pointe du cœur un frémissement présystolique, et le stéthoscope révèle un souffle présystolique et un souffle systolique. Sur le photogramme, où ces deux bruits de souffle sont nettement accusés, le premier est indiqué par *a*.

La fig. 9 reproduit les bruits de l'artère pulmonaire de la même malade. On voit qu'ici les souffles présystolique et systolique n'existent plus, ou sont à peine sensibles; de plus on constate que le deuxième bruit est faible par rapport au premier. La question de savoir si le deuxième ton de l'artère pulmonaire, — qui est important au point de vue clinique —, est renforcé ne se résout souvent que difficilement par l'examen au stéthoscope, et dans le cas spécial dont il s'agit la réponse était restée douteuse. Il va de soi que, vu les rapports anatomiques variables du thorax, on ne prendra pas la peine de déterminer l'intensité absolue du son, mais qu'on se contentera de comparer les intensités relatives des bruits, et d'estimer p. ex. le rapport d'intensité du 2e bruit de l'artère pulmonaire et du 1er bruit de la même artère ou du 2e bruit de l'artère pulmonaire et du 2e bruit de l'orifice aortique. Mais même ces comparaisons-là

---

[1]) Ces *Archives*, (2), 11, 239, 1906.

ne sont pas sans difficulté pour l'oreille, surtout parce qu'on a affaire à des bruits dont la durée et le caractère sont différents [1]).

Dans ces circonstances il est permis d'attendre de bons résultats de l'enregistrement des bruits cardiaques. Si l'on met la fig. 9 de notre malade à côté des figg. 5 et 6, qui reproduisent les bruits de l'artère pulmonaire de deux jeunes gens bien sains, dont le cœur fonctionne normalement, on est en droit de conclure sans réserve que le deuxième ton de l'artère pulmonaire de la malade n'est pas renforcé, du moins en comparaison du premier bruit de la même artère.

Pour les figures dont nous nous sommes occupés jusqu'ici il était aisé de mettre les tracés en rapport avec les observations d'auscultation à l'aide du stéthoscope; mais l'explication de la fig. 10, dont nous allons nous occuper pour finir, présente de grandes difficultés. Cette figure donne les bruits que l'on entend à la pointe du cœur d'un jeune homme atteint d'insuffisance de la valvule mitrale, accompagnée d'une forte dilatation et hypertrophie des deux moitiés du cœur. Au stéthoscope on perçoit à la pointe un souffle systolique prolongé, assez égal, dont il n'est pas bien possible de saisir le commencement, mais qui finit brusquement en passant au bruit diastolique, un peu étouffé il est vrai, mais pas faible. Entre le bruit diastolique et le commencement du souffle systolique consécutif il y a nettement un silence.

Cette description ne s'accorde pas avec la forme de la courbe reproduite fig. 10. Cette figure accuse pour chaque révolution cardiaque, en dehors du grand silence, cinq bruits parfaitement distincts, qui ont été indiqués par a, s_1, s_2 et s_3 et 2. Quelle est la signification de ces bruits et quel est leur ordre de succession dans la révolution, voilà ce que nous n'avons pas pu déterminer avec certitude. Pour cela notre expérience est encore insuffisante, mais nous ne doutons pas qu'un examen poursuivi nous permettra bientôt d'expliquer d'une façon satisfaisante les „cardiophonogrammes", comme on peut appeler nos tracés.

---

[1]) Selon M. Max Wien, Pflüger's *Arch.*, 97, 1, 1903, des sons bas de 50 vibrations par seconde doivent être objectivement plusieurs millions de fois plus forts que des sons élevés de 2000 vibrations p. sec., pour produire une sensative auditive également intense. Dans Engelmann's *Arch. f. Physiol.* 1904, p. 25, MM. H. Zwaardemaker et F. H. Quix font connaître des différences qui s'accordent en principe avec les précédentes quant à la forme, mais dont la valeur est d'un autre ordre de grandeur.

Pour le moment nous ne faisons qu'avancer provisoirement l'hypothèse explicative suivante:

a = souffle présystolique;
s_1, s_2, s_3 = trois phases du souffle systolique;
2 = bruit diastolique;
p = grand silence;

et l'accolade dans la figure est supposée limiter une révolution cardiaque.

Une des difficultés de l'explication de la figure réside dans la durée du grand silence. A l'examen au stéthoscope ce temps paraît être assez long, tandis que sur le photogramme il apparaît avec une très courte durée. Si l'on voulait attribuer le défaut de concordance entre les deux méthodes d'observation à des erreurs d'enregistrement, il faudrait admettre qu'un bruit fortuit a mis en mouvement la corde enregistrante précisément dans le temps silencieux du fonctionnement du cœur. Mais une pareille supposition est fort peu probable, puisqu'il y a plus de 7 révolutions consécutives qui ont été tracées sur le photogramme, et que ces révolutions ne laissent à désirer que fort peu au point de vue de la similitude.

A notre avis c'est l'imperfection de notre oreille qui en est la cause. La raison pour laquelle on entend aussi régulièrement un silence est probablement celle-ci, que notre oreille qui vient d'être frappée par le bruit relativement fort du ton diastolique est temporairement fatiguée. Le calme que l'on observe serait donc comparable au silence qui semble se produire après une forte détonation, bien qu'il y ait encore de faibles bruits.

J'ai déjà fait remarquer que l'oreille est un guide peu sûr, quand il s'agit d'estimer l'intensité d'un son, et il n'est pas nécessaire de rappeler d'autres défauts encore de cet organe pour être persuadé qu'un observateur pourra tirer profit de la méthode d'enregistrement des bruits du cœur. Nous ne voulons pas dire par là que l'auscultation ordinaire d'un malade doive être remplacée par la méthode d'enregistretion, mais uniquement ceci, que la dernière méthode peut être appliquée avec succès pour compléter ce qui manque à la première.

L'enregistrement des bruits cardiaques deviendra-t-elle jamais une méthode clinique, ou bien est-il déjà permis maintenant de la considérer comme telle? Cela dépend des exigences que l'on croit devoir poser à une méthode clinique. Ici s'appliquent les mêmes considérations que celles que j'ai faites à la fin de l'article sur le télécardiogramme.

Le galvanomètre à corde est un instrument assez compliqué et très coûteux, il exige une installation particulière et ne peut être employé que moyennant le concours d'assistants exercés, de sorte que pour le moment le clinicien, assis au chevet du malade, ne s'en servira pas encore. Mais on peut opposer à cela qu'on ne doit demander à l'observateur que la connaissance de l'instrument dont il se sert, et qu'il n'a pas besoin de posséder une habileté particulière; de plus, on peut dire que presque chaque épreuve photographique réussit et est faite en quelques minutes.

Les instruments nécessaires pour l'enregistrement ne sauraient trouver place dans la chambre des malades, mais un raccordement convenable par des fils électriques lève cette difficulté. Bien que la communication entre le laboratoire de physiologie et l'hôpital de l'université de Leyden fonctionne depuis plus de deux ans, il ne s'est jamais présenté le moindre accroc, et là où il sera possible d'obtenir la collaboration du physiologiste et du clinicien, rien ne s'oppose à l'application clinique de l'enregistrement des bruits du cœur.

UNE REMARQUE RELATIVE À LA THÉORIE DE LA SURFACE ψ POUR DES MÉLANGES BINAIRES,

PAR

J. D. VAN DER WAALS.

Puisque l'expérience surprenante de M. KAMERLINGH ONNES [1]), où un gaz s'enfonçait dans un liquide, a fixé plus que jamais l'attention sur la direction de la tangente au point de plissement d'un mélange binaire, je désire faire une remarque d'une portée générale, qui est en relation étroite avec cette expérience, tout en laissant à M. KAMERLINGH ONNES et ses collaborateurs le soin d'établir par leurs recherches les conditions particulières nécessaires pour réaliser un pareil mélange.

Dans ma Théorie Moléculaire, et plus tard plus en détail dans Cont. II, j'ai examiné les circonstances dans lesquelles la tangente au point de plissement est parallèle à l'axe des v, c. à d. où $\left(\frac{dv}{dx}\right) = \infty$. Les problèmes qui s'y rattachent peuvent être ramenés au nombre de trois. Tous trois se rapportent à l'intersection des deux courbes $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{xT} = 0$ et $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{vT} = 0$.

Comme premier problème je considère le problème proprement dit, celui où $\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v} = 0$, de sorte que le point considéré est situé sur la ligne spinodale; en même temps la courbe $\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = 0$ a, pour une valeur constante de x, deux racines égales, de sorte qu'on a aussi $\frac{\partial^3 \psi}{\partial v^3} = 0$. Le point considéré est alors le point critique du mélange

[1]) Voir *Versl. Kon. Akad. Amsterdam*, 24 novembre 1906. *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 96. Ce travail sera prochainement publié dans ces *Archives*.

considéré comme se comportant à la façon d'une substance simple. La valeur de T est celle de T_k relative à ce mélange, et, si l'on applique l'équation d'état approchée avec b constant, la valeur de x est donnée par:

$$\frac{\frac{1}{a}\frac{da}{dx}}{\frac{1}{b}\frac{db}{dx}} = \frac{2}{3}.$$

Cette valeur devient $^6/_7$ si l'on abandonne l'indépendance de b du volume.

Dans ce cas la ligne $\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v} = 0$ coupe encore la ligne $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$ en deux points. L'un est le point susmentionné, l'autre correspond à une valeur de x plus petite et une valeur de v plus grande. Il est donc plus rapproché du composant ayant la plus petite valeur de b.

Si l'on élève la température les deux points d'intersection de ces courbes se rapprochent l'un de l'autre, et l'on pourrait se poser comme deuxième problème d'examiner les circonstances dans lesquelles les deux points d'intersection de ces courbes coïncident. Les trois équations qui déterminent la condition de cette coïncidence sont $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v} = 0$ et une troisième encore exprimant que ces deux courbes se touchent, savoir:

$$\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial v^2 \partial x}\right)^2 = \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2 \partial v}\,\frac{\partial^3\psi}{\partial v^3}$$

ou

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial v}\right)^2 = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}.$$

Au-dessus de la température à laquelle ces conditions sont remplies les courbes $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$ et $\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial v} = 0$ ne s'entrecoupent plus, et il disparaît une complication dans l'allure des isobares, savoir qu'il y en a une qui se coupe elle-même.

Quant au troisième problème, il est en quelque sorte isolé, mais je voudrais pourtant l'ajouter aux deux premiers; il s'agit notamment de trouver quand la ligne $\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} = 0$ présente un point double, c. à d. quand on a à la fois $\frac{\partial^3\psi}{\partial v^3} = 0$ et $\frac{\partial^3\psi}{\partial x \partial v^2} = 0$. S'il y a un minimum de T_k pour

les mélanges supposés homogènes, un pareil point est un véritable point double. S'il y avait un maximum de T_k, ce serait un point isolé. On trouve alors de nouveau $v = v_k$, $T = T_k$ et la valeur de x est celle pour laquelle T_k est un minimum ou un maximum. Si nous représentons par x_1, x_2 et x_3 les trois valeurs de x fournies par les 3 problèmes, nous avons:

$$x_2 < x_1 < x_3$$
$$T_2 > T_1 > T_3.$$

Or, ce que je veux faire observer dans cette courte note, c'est qu'il y a encore trois autres problèmes que l'on peut considérer comme faisant pendant aux trois précédents.

Si nous remplaçons dans les problèmes susmentionnés v par x et x par v, de sorte que $\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}$ devient $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ tandis que $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v}$ ne change pas, les courbes $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v} = 0$ donneront lieu, par leur intersection, à trois problèmes tout aussi importants pour la théorie des mélanges binaires que les trois précédents, qui se rapportent à l'intersection de $\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v} = 0$.

En premier lieu les points où les deux courbes $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v} = 0$ se coupent appartiennent à la ligne spinodale, ainsi qu'il résulte de la relation $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v}\right)^2$.

En second lieu les points d'intersection auront pour l'allure des courbes $\frac{\partial \psi}{\partial x} = q = \text{Cte.}$ la même signification que les points d'intersection des courbes $\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v} = 0$ pour l'allure des courbes $\frac{\partial \psi}{\partial v} = -p = \text{Cte.}$ L'un des points d'intersection sera un point où les lignes q se coupent elles-mêmes en formant une boucle, et l'autre se présentera comme centre de portions détachées des lignes q.

En troisième lieu il y aura une température limite pour l'existence du lieu géométrique $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$. A mesure que T s'élève cette courbe

se contracte en un point isolé, tout comme cela se produit pour $\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = 0$ lorsqu'il y a un maximum de T_k, ou tout comme la courbe $\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = 0$ forme une boucle dans le cas d'un minimum de T_k.

En quatrième lieu il y a une température où les courbes $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v}$ ne font plus que se toucher, de sorte que les deux points d'intersection coïncident.

Enfin, et c'est ce qu'il y a de plus important, il y a une température à laquelle l'intersection de ces courbes se produit de telle façon qu'on peut mener à $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$, en un des points d'intersection, une tangente pour laquelle $\frac{dv}{dx} = 0$.

Cette circonstance est déterminée par les trois équations $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v} = 0$ et $\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0$, et l'on voit que ce problème est le pendant de celui dont nous avons parlé ci-dessus, où nous avions $\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v} = 0$ et $\frac{\partial^3 \psi}{\partial v^3} = 0$. Si nous avions tantôt $\frac{dv}{dx} = \infty$, nous avons maintenant $\frac{dx}{dv} = \infty$ ou $\frac{dv}{dx} = 0$.

Si donc les 3 équations $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v} = 0$ et $\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0$ présentent une solution, il doit être possible de réaliser les circonstances où la tangente au point de plissement est parallèle à l'axe des x. Si l'on néglige la variabilité de b avec v, on peut mettre les trois équations sous la forme:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{MRT}{x(1-x)} + \frac{MRT\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{(v-b)^2} - \frac{\frac{d^2 a}{dx^2}}{v} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = -\frac{MRT(1-2x)}{x^2(1-x)^2} + 2\frac{MRT\left(\frac{db}{dx}\right)^2}{(v-b)^3} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial v} = \frac{MRT\frac{db}{dx}}{(v-b)^2} - \frac{\frac{da}{dx}}{v^2} = 0. \qquad (3)$$

Si l'on pose $a = A + 2Ex + Cx^2$ et $b = b_1 + x\beta = b_1 + x(b_2 - b_1)$, x est déterminé par l'équation

$$\sqrt[3]{\frac{2x}{1-3x+2x^2}} = \frac{1}{2}\frac{Cx}{B+Cx}\left\{1 \pm \sqrt{\left[1 + \frac{4(B+Cx)(Cb_1-\beta B)}{C^2x\beta(1-x)}\right]}\right\}.$$

Si $B = a_{12} - a_1$ était petit par rapport à $(a_1 + a_2 - 2a_{12})x = Cx$, on aurait approximativement $x = {}^1/_3$, du moins si $\frac{b_1}{\beta}$ aussi était petit.

On trouve alors pour x, comme pour T et v, des valeurs réelles; mais il se pourrait que la valeur de T fût dans beaucoup de cas inférieure au point de fusion, et par conséquent inobservable.

Mais je ne m'occuperai pas du reste de la discussion. Tout ce que je veux faire remarquer, c'est que pour des valeurs convenables de T la courbe $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$ représente une courbe fermée, qui se contracte à mesure que T s'élève et peut se réduire à un point.

Dans le problème où $\frac{dv}{dx} = \infty$ au point de plissement, ce cas est transitoire entre $\frac{dv}{dx}$ positif ou négatif. De même, dans le problème où $\frac{dx}{dv} = 0$ au point de plissement, c'est un cas transitoire entre $\frac{dv}{dx}$ positif ou négatif. Il n'est donc pas impossible qu'il y ait des cas où, du côté des petits volumes, la grandeur $\frac{dv}{dx}$ aurait, au point de plissement, un autre signe que le signe habituel.

Si l'on examine l'allure des lignes $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial v} = 0$ et $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$, on voit que pour que le cas soit réalisable il faut que, si $\frac{db}{dx}$ est positif, $\frac{da}{dx}$ et $\frac{d^2a}{dx^2}$ le soient aussi; et la température cherchée doit être au-dessus du T_k du 1er composant si l'on veut appliquer le résultat à la coexistence d'une phase gazeuse et d'une phase liquide.

Au sommet nous avons le cas limite de deux phases coexistantes. Si

la tangente est parallèle à l'axe des x, le volume moléculaire reste le même et la densité sera proportionnelle à $m_1(1-x)+m_2x$.

Soient

$$d=\frac{m_1(1-x)+m_2x}{v} \text{ et } d'=\frac{m_1(1-x')+m_2x'}{v};$$

alors

$$d'-d=\frac{(m_2-m_1)(x'-x)}{v}.$$

Si (m_2-m_1) et $(x'-x)$ ont le même signe, $d'-d$ est positif. Or, si c'est le premier composant qui a la plus petite molécule, $x'-x$ est négatif, de sorte que m_2-m_1 doit être également négatif; cette condition est remplie dans le cas des mélanges d'hélium et d'hydrogène.

D'ailleurs, nous pouvons représenter par $\frac{m}{b}$ la densité limite d'une substance, et nous avons cette règle: Si la substance la plus volatile a la plus grande densité limite, la phase gazeuse sera spécifiquement plus lourde que la phase liquide. Pour l'hélium la densité limite est probablement égale à celle des métaux lourds. Cela résulte déjà avec quelque probabilité de cette supposition que c'est un produit de dissociation de métaux lourds.

LA FORME DE L'ISOTHERME EMPIRIQUE DANS LA CONDENSATION D'UN MÉLANGE BINAIRE,

PAR

J. D. VAN DER WAALS.

Considérons une molécule-gramme d'un mélange binaire, dont le poids est donc $m_1(1-x)+m_2 x$, à une température et sous un volume donnés, et supposons qu'une partie soit à l'état de phase liquide, le reste à l'état de vapeur. Nommons y la fraction qui est à l'état de vapeur. Le point représentant l'état de ce mélange est sur une ligne nodale, reposant sur la courbe binodale. J'indiquerai par l'indice 1 l'extrémité de la ligne nodale qui repose sur la branche liquide et par l'indice 2 l'autre extrémité. Soient encore v_1 le volume moléculaire à l'extrémité 1 et v_2 le volume moléculaire à l'autre extrémité: si v est le volume de la masse qui est à l'état d'équilibre hétérogène,

$$v = v_1(1-y) + v_2 y,$$

et la valeur constante de x est représentée par

$$x = x_1(1-y) + x_2 y.$$

Nous déduisons de là

$$dv = (v_2 - v_1)\,dy + (1-y)\,dv_1 + y\,dv_2$$

et

$$0 = (x_2 - x_1)\,dy + (1-y)\,dx_1 + y\,dx_2.$$

En éliminant dy nous obtenons l'équation:

$$-dv = \frac{v_2 - v_1}{x_2 - x_1}\left\{(1-y)\,dx_1 + y\,dx_2\right\} - (1-y)\,dv_1 - y\,dv_2.$$

Or, nous avons en général $dv = \left(\frac{dv}{dx}\right)_p dx + \left(\frac{dv}{dp}\right)_x dp$. Appliquons cette équation aux points 1 et 2 de la ligne binodale et choisissons le chemin pour aller de v_1 à $v_1 + dv_1$ et de v_2 à $v_2 + dv_2$ sur la surface des phases homogènes. Alors

$$dv_1 = \left(\frac{dv_1}{dx_1}\right)_p dx_1 + \left(\frac{dv_1}{dp}\right)_{hom} dp$$

et

$$dv_2 = \left(\frac{dv_2}{dx_2}\right)_p dx_2 + \left(\frac{dv_2}{dp}\right)_{hom} dp.$$

Les grandeurs $\left(\frac{dv_1}{dx_1}\right)_p$ et $\left(\frac{dv_2}{dx_2}\right)_p$ doivent être prises suivant une isobare.

Si nous substituons les valeurs de dv_1 et dv_2 dans l'équation donnant dv, celle-ci devient

$$-dv = (1-y)\left\{\left[\frac{v_2-v_1}{x_2-x_1} - \left(\frac{dv_1}{dx_1}\right)_p\right] dx_1 - \left(\frac{dv_1}{dp}\right)_{hom} dp\right\} +$$
$$+ \quad y \quad \left\{\left[\frac{v_2-v_1}{x_2-x_1} - \left(\frac{dv_2}{dx_2}\right)_p\right] dx_2 - \left(\frac{dv_2}{dp}\right)_{hom} dp\right\},$$

ou

$$-\left(\frac{dv}{dp}\right)_{hét} = (1-y)\left\{\left[\frac{v_2-v_1}{x_2-x_1} - \left(\frac{dv_1}{dx_1}\right)_p\right]\left(\frac{dx_1}{dp}\right)_{bin} - \left(\frac{dv_1}{dp}\right)_{hom}\right\} +$$
$$+ \quad y \quad \left\{\left[\frac{v_2-v_1}{x_2-x_1} - \left(\frac{dv_2}{dx_2}\right)_p\right]\left(\frac{dx_2}{dp}\right)_{bin} - \left(\frac{dv_2}{dp}\right)_{hom}\right\}.$$

Comme le coefficient de $\left(\frac{dx_1}{dp}\right)_{bin}$ est égal à $\frac{v_{21}}{x_2-x_1} = \left(\frac{d^2\zeta}{dx_1{}^2}\right)_{p,T}\left(\frac{dx_1}{dp}\right)_{bin}$, nous trouvons

$$-\left(\frac{dv}{dp}\right)_{hét} = (1-y)\left\{\left(\frac{d^2\zeta}{dx_1{}^2}\right)_{p,T}\left(\frac{dx_1}{dp}\right)^2_{bin} - \left(\frac{dv_1}{dp}\right)_{hom}\right\} +$$
$$+ \quad y \quad \left\{\left(\frac{d^2\zeta}{dx_2{}^2}\right)_{p,T}\left(\frac{dx_2}{dp}\right)^2_{bin} - \left(\frac{dv_2}{dp}\right)_{hom}\right\}. \qquad (1)$$

Considérons le commencement de la condensation, de sorte que $y = 1$; alors l'équation précédente devient:

$$-\left(\frac{dv}{dp}\right)_{hét} = \left(\frac{d^2\zeta}{dx_2{}^2}\right)_{p,T}\left(\frac{dx_2}{dp}\right)^2_{bin} - \left(\frac{dv}{dp}\right)_{hom},$$

où l'on doit prendre $v_2 = v$ et $x_2 = x$. Il résulte de cette équation que jamais $\left(\frac{dv}{dp}\right)_{hét}$ n'est égal à $-\left(\frac{dv}{dp}\right)_{hom}$, et qu'il y a donc une discontinuité dans la valeur de $-\frac{dv}{dp}$ ou de $-\frac{dp}{dv}$, au commencement de la condensation, à moins qu'il n'y ait des cas où $\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)_{p,T}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2_{bin} = 0$. Or, le seul point où cela a lieu c'est le point de contact critique, car en ce point $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{bin} = \infty$ donc $\left(\frac{dx}{dp}\right)_{bin} = 0$. Mais en ce point il n'y a plus à proprement parler de condensation et l'isotherme empirique y a disparu. Peut-être pourrait on songer à un point de plissement, puisqu'en ce point $\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)_{p,T} = 0$; mais en ce point on a $\left(\frac{dp}{dx}\right)_{bin} = 0$, donc $\left(\frac{dx}{dp}\right)_{bin} = \infty$, et, si l'on cherche la valeur limite de $\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)_{p,T}\left(\frac{dx}{dp}\right)^2_{bin}$ ou de $\frac{\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)_{p,T}}{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2_{bin}}$, on trouve, en différentiant le numérateur et le dénominateur deux fois par rapport à x:

$$\frac{\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)_{pT}}{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2_{bin}} = \frac{\left(\frac{d^3\zeta}{dx^3}\right)_{pT}}{2\left(\frac{dp}{dx}\right)_{bin}\left(\frac{d^2p}{dx}\right)_{bin}} = \frac{\left(\frac{d^4\zeta}{dx^4}\right)_{p,T}}{2\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)^2_{bin}}.$$

Au point de plissement on a non seulement $\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)_{p,T} = 0$, mais encore $\left(\frac{d^3\zeta}{dx^3}\right)_{p,T} = 0$; mais $\left(\frac{d^4\zeta}{dx^4}\right)_{p,T}$ diffère de zéro, de sorte qu'au point de plissement aussi il y a une discontinuité dans les valeurs de $-\frac{dv}{dp}$.

Comme $-\left(\frac{dv}{dp}\right)_{hom}$ doit toujours être positif, $-\left(\frac{dv}{dp}\right)_{hét}$ sera aussi toujours positif, et plus grand que $-\left(\frac{dv}{dp}\right)_{hom}$, c. à d. $-\left(\frac{dp}{dv}\right)_{hom} > -\left(\frac{dp}{dv}\right)_{hét}$.

Au commencement de la condensation une diminution de volume

produit donc une élévation moins rapide de la courbe empirique que de la courbe des phases homogènes.

Il y a des cas où $-\left(\frac{dv}{dp}\right)_{hét} = \infty$, ou $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{hét} = 0$. Cela a lieu notamment: 1°. aux bords, c. à d. pour $x = 0$ et $x = 1$. Là $\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)_{p,T}$ est infiniment grand et contient comme terme principal $\frac{MRT}{x(1-x)}$; 2°. si $\frac{dx}{dp} = \infty$ ou $\frac{dp}{dx} = 0$ sur la ligne binodale; cela se présente pour ces mélanges-là qui se comportent comme une substance simple.

En posant dans l'équation (1) $y = 0$, $v_1 = v$ et $x_1 = x$, nous arrivons aux mêmes conclusions pour la fin de la condensation.

La relation entre $-\left(\frac{dp}{dv}\right)_{hét}$ et $-\left(\frac{dp}{dv}\right)_{hom}$ au commencement et à la fin de la condensation peut être déduite immédiatement de l'équation:

$$dv = \left(\frac{dv}{dp}\right)_x dp + \left(\frac{dv}{dx}\right)_p dx,$$

en l'appliquant tantôt à la surface des phases homogènes, tantôt à celle des phases hétérogènes. Si nous remarquons que sur la surface hétérogène $\left(\frac{dv}{dx}\right)_p$ est égal à $\frac{v_2 - v_1}{x_2 - x_1}$, nous trouvons

$$\frac{v_2 - v_1}{x_2 - x_1} dx + \left(\frac{dv}{dp}\right)_{hét} dp = \left(\frac{dv}{dx}\right)_p dx + \left(\frac{dv}{dp}\right)_{hom} dp,$$

d'où résulte la relation ci-dessus.

On reconnaît à la forme générale de $-\left(\frac{dv}{dp}\right)_{hét}$, donc pas seulement au commencement et à la fin de la condensation, que l'isotherme empirique ne peut avoir un élément horizontal que dans le cas où elle coupe une ligne nodale à l'une ou l'autre extrémité de laquelle $\left(\frac{dx}{dp}\right)_{bin} = \infty$. Mais, comme l'isotherme empirique ne peut couper ni les bords ni la nodale parallele à l'axe des x, il en résulterait que l'isotherme empirique n'est jamais horizontale en aucun de ses éléments. Il y a cependant des cas d'exception à cette règle. D'abord si l'on veut

étendre l'acception d'isotherme empirique, et entendre par là l'intersection d'un plan parallèle à l'axe v avec la surface dérivée de la surface ψ dans le cas d'un pli composé. Alors il y a des lignes nodales passant par des points où la binodale coupe la spinodale, et où l'on a donc $\left(\frac{dx}{dp}\right)_{bin} = \infty$. Mais, comme de pareils équilibres sont des équilibres cachés, ils ne sauraient être réalisés. Ils sont remplacés par une intersection rectiligne du plan parallèle à l'axe des v et du triangle des trois phases, et sur cette partie évidemment on a de nouveau $\left(\frac{dv}{dp}\right)_{hét} = \infty$. Mais il y a un second cas qui pourrait bien être réalisé; il y a notamment un point de la binodale où $\left(\frac{dx}{dp}\right)_{bin} = \infty$, savoir un point de plissement qui deviendra un point de plissement caché par élévation ou abaissement de température. C'est là une forme limite du cas, mentionné en premier lieu, où le triangle des trois phases était coupé. Le triangle des trois phases s'est notamment réduit à une seule ligne et la petite ligne droite susmentionnée s'est réduite à un point. En ce point l'isotherme empirique présente alors évidemment une inflexion. Aux grands volumes elle a une courbure négative, aux petits une courbure positive.

CONTRIBUTIONS À LA CONNAISSANCE DE LA SURFACE ψ DE VAN DER WAALS.

PAR

H. KAMERLINGH ONNES et ses collaborateurs.

(*Suite*) [1]).

IX.

Les conditions de coexistence des phases liquide et vapeur d'un mélange binaire

PAR

H. KAMERLINGH ONNES et **C. ZAKRZEWSKI.**

A. Les conditions de coexistence de mélanges binaires de substances normales suivant la loi des états correspondants [2]).

1. *L'examen graphique des conditions de coexistence.* Dans ce travail, qui sert à illustrer la théorie des mélanges de VAN DER WAALS, comme dans les précédents, la loi des états correspondants est prise comme base.

Les données nécessaires pour le calcul des surfaces ψ de VAN DER WAALS pour toutes les températures, on peut les définir comme suit au point de vue de cette loi:

1°. On doit disposer d'une équation d'état, conforme à la réalité, pour une seule substance normale dans toute l'étendue des températures et des pressions accessibles (voir § 2).

2°. Pour les divers mélanges des deux substances que l'on considère, ainsi que pour ces substances elles-mêmes, on doit connaître les écarts de la loi des états correspondants (voir § 3).

3°. On doit connaître la température critique $T_{cr.}$ et la pression

[1]) Voir ces *Archives*, (2), 11, 358, 1906; (2), 12, 1 et 191, 1907.

[2]) *Versl. Kon. Akad. Amsterdam*, 27 févr. 1904; *Comm. phys. lab. Leiden*, suppl. n° 8.

$p_{cr.}$ de chaque mélange, considéré comme homogène [1]), avec une teneur moléculaire x en une des deux composantes, déduites de la loi des états correspondants, comme fonction des éléments critiques des composantes et de x (§ 4).

Quand on dispose de ces données, la théorie de VAN DER WAALS fait connaître tous les cas possibles de coexistence de deux phases, par le roulement de plans tangents sur les surfaces ψ relatives à chaque couple de substances pour diverses températures.

Dans le traitement des problèmes relatifs aux conditions de coexistence, qui ont déjà été résolus d'une manière générale par M. VAN DER WAALS, les simplifications suivantes ont été introduites:

1°. au lieu de l'équation d'état réelle, il a été fait usage de la forme à deux constantes a et b, que M. VAN DER WAALS a donnée primitivement à l'équation d'état;

2°. on a supposé que l'équation d'état d'un mélange quelconque, de composition x, a la même forme, avec deux constantes a_x et b_x, ce qui implique évidemment que la loi des états correspondants est rigoureusement satisfaite;

3°. les grandeurs critiques, déterminées par a_x et b_x, sont liées à celles des substances simples, déterminées par a_{11} et b_{11}, a_{22} et b_{22}, par les relations

$$a_x = a_{11}(1-x)^2 + 2a_{12}x(1-x) + a_{22}x^2$$
$$b_x = b_{11}(1-x)^2 + 2b_{12}x(1-x) + b_{22}x^2,$$

ce qui fait que la façon dont se comportent les mélanges de deux substances connues est déterminée par les deux nouvelles constantes a_{12} et b_{12};

et 4°. il a été souvent admis que la phase vapeur satisfait aux lois des gaz parfaits.

M. VAN DER WAALS est arrivé de cette manière à des formules d'approximation importantes. Bien que ces formules ne s'accordent pas toujours avec la réalité, pour ce qui regarde les valeurs numériques, elles fournissent pourtant l'explication de la plupart des particularités des conditions de coexistence [2]).

---

[1]) Chaque fois que nous parlerons de température critique, de tension maxima de vapeur etc. d'un mélange, sans plus, nous sous-entendrons toujours „supposé homogène".

[2]) VAN DER WAALS, Die Continuität etc. II, p. 52.

Si dans l'examen de ces questions on veut faire usage d'équations d'état qui rendent bien les observations dans toute l'étendue des températures et des pressions examinées, c. à d. si l'on ne désire pas introduire les simplifications indiquées par les 1°, 2° et 3°, et que l'on se propose en outre de considérer d'autres vapeurs que des vapeurs peu denses, de sorte qu'il n'est plus permis de négliger, comme dans le 4°, les écarts de la loi de MARIOTTE-GAY-LUSSAC-AVOGADRO, il n'est plus possible de chercher en général les conditions de coexistence.

On rencontre par exemple de pareilles questions quand on veut déduire les conditions de coexistence pour des mélanges d'oxygène et d'azote (état critique de l'air et relations entre la composition et la pression pendant l'ébullition de l'air liquide) d'équations d'état qui expriment exactement la compressibilité de ces substances, et de leurs mélanges, à la température ordinaire aussi bien qu'à ces basses températures. Un exemple d'un tout autre genre est fourni par le groupe suivant de questions: soit à déterminer, à la température ordinaire, l'absorption d'hydrogène dans l'éther et les écarts de la loi de HENRY pour ces deux substances, à examiner la variation de cette absorption par suite d'une petite variation de la température, et à trouver enfin, pour cette même température, la pression que M. KUNDT aurait dû atteindre, dans ses expériences [1]) relatives à la diminution de l'ascension capillaire d'un liquide sous l'influence de la pression d'un gaz, pour faire disparaître le ménisque de l'éther par la pression de l'hydrogène: ainsi qu'il est observé dans la dissertation de M. VAN ELDIK, p. 7, cela revient à déterminer la pression de plissement du mélange d'éther et d'hydrogène, dont le point de plissement correspond à cette température [2]).

Dans de pareils cas, la solution ne peut être trouvée que par la méthode graphique exposée au chapitre I de ces Contributions [3]). Il est vrai que cette méthode n'a pas la généralité des solutions approchées citées tantôt, mais elle permet d'obtenir, dans chaque cas particulier, un accord numériquement exact [4]). Et en choisissant convenablement

[1]) Répétées par M. VAN ELDIK (*Comm. Phys. Lab. Leiden*, n°. 39; Dissertation, Leyden, 1898) pour hydrogène-éther et éthylène-chlorure de méthyle.

[2]) Voir aussi VAN DER WAALS, Continuität etc. II, p. 136.

[3]) Ces *Archives*, (2), 11, 358, 1906.

[4]) C'est ainsi que l'on trouve au chap. II une représentation, numériquement assez approchée, de la condensation rétrograde, observée par M. KUENEN pour des mélanges de chlorure de méthyle et d'anhydride carbonique; cette représentation a été déduite des isothermes observées à d'autres températures.

les cas particuliers, il est même possible de déduire des données relatives à la nature des phénomènes [1]).

Aussi longtemps que l'on n'a en vue que de pareils résultats qualitatifs, on peut simplifier le traitement graphique, tout aussi bien que le traitement analytique, en introduisant, d'après la nature du problème, diverses approximations, et il est naturel qu'on y peut emprunter à des formules empiriques, dans une mesure plus large que dans le traitement analytique, des données expérimentales qui manquent ou des résultats d'opérations. Ainsi p. ex. tout ce qui a été négligé dans le traitement analytique, on peut le négliger aussi dans le traitement graphique. Mais il n'y a lieu d'employer ce moyen que quand on a à traiter une question que la méthode analytique ne permet pas de résoudre, même qualitativement.

Si l'on ne veut pas négliger autant que dans le traitement analytique, on peut du moins s'en tenir à la simplification, qui a été introduite au chap. I et que l'on retrouve dans tous les autres, et qui consiste à négliger les écarts que les diverses substances normales et leurs mélanges présentent à la loi des états correspondants.

Quant aux simplifications qui proviennent de ce que l'une des phases coexistantes a une densité qui est très faible par rapport à l'autre, nous nous en occuperons aux §§ 7 et 8.

2. *Equation d'état empirique réduite.* Pour ce qui regarde la supposition nommée au 1°. du § 1, nous nous trouvons en ce moment dans des conditions bien plus avantageuses qu'à l'époque où fut écrit le chapitre I de ces Contributions.

La beauté de la théorie de VAN DER WAALS réside surtout en ceci, qu'elle place sous un même point de vue des phénomènes qui sont répartis dans un domaine étendu de températures et de densités. Voilà pourquoi un bon exposé de cette théorie exige en premier lieu une équation d'état qui soit valable pour de larges limites de température et de densité. Or la plupart des équations d'état, — M. D. BERTHELOT y a spécialement attiré l'attention —, ne s'appliquent qu'à un domaine fort

[1]) Telles que le caractère de la condensation rétrograde (voir note 2, p. 425), et aussi la particularité dans les conditions de coexistence, pour des mélanges dont la température critique varie à peu près linéairement avec la composition, bien au-dessous de la température critique. Voir chap. I § 8 fin et chap. III, ces *Archives*, (2), 5, 640, 1900.

restreint. Pour des considérations comme celles dont nous nous occupons, on ne peut se servir que d'une équation d'état qui, développée en séries, est mise d'accord avec les observations dans un vaste domaine. On a obtenu de pareilles équations d'état [1]), dont la forme se prête fort bien au calcul, en mettant d'accord, aussi bien que possible, les portions connues d'équations d'état réduites de substances à température critique différente. Et puisque nous négligeons les écarts de la loi des états correspondants, pour les substances simples comme pour leurs mélanges, nous pouvons immédiatement prendre une pareille équation d'état empirique réduite comme base de nos considérations.

Nous avons fait usage d'une forme qui ne diffère pas considérablement de celle donnée provisoirement dans la Comm. n°. 74, et qui a été indiquée par V 2. Elle fut obtenue par la combinaison des observations relatives à l'hydrogène 0° [2]), l'oxygène et l'azote 0° (toutes de M. Amagat), et de celles relatives à l'éther 0°, 100°, 195° (Amagat et Ramsay et Young). Ce polynome, qui embrasse p. ex. toutes les températures réduites que l'on trouve sur la surface ψ pour l'éther et l'hydrogène à 0°, nous le représenterons par VI 1. Tout comme dans les Comm. n°s. 71 et 74, nous écrivons

$$pv = A + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \frac{D}{v^4} + \frac{E}{v^6} + \frac{F}{v^8} \tag{1}$$

pour une substance à température critique T_k et pression critique p_k; v est le volume normal théorique, et à une température t au-dessus du point de fusion de la glace:

$$A = 1 + 0{,}0036625\, t.$$

$$B = \frac{T_k^{\,2}}{p_k}\mathfrak{B},\quad C = \frac{T_k^{\,3}}{p_k^{\,2}}\mathfrak{C},\quad D = \frac{T_k^{\,5}}{p_k^{\,4}}\mathfrak{D},\quad E = \frac{T_k^{\,7}}{p_k^{\,6}}\mathfrak{E},\quad F = \frac{T_k^{\,9}}{p_k^{\,8}}\mathfrak{F}\ ^{3)}$$

et les coefficients réduits du viriel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, avec $\mathfrak{t} = \frac{T}{T_k}$, sont déterminés par:

---

[1]) *Comm. phys. lab. Leiden*, n°s. 71 et 74. Ces *Archives*, (2), 6, 874, 1901.

[2]) Pour les calculs relatifs à l'hydrogène, on s'est encore toujours servi des grandeurs critiques données par M. Olszewski.

[3]) Voir Comm. n°. 71, form. (10).

Coefficients réduits du viriel VI.1 [1]).

$10^{8}\ \mathfrak{B}$	$189{,}523\,t - 465{,}197 - 21{,}291\,\frac{1}{t} - 184{,}410\,\frac{1}{t^3}$
$10^{11}\ \mathfrak{C}$	$58{,}598\,t + 23{,}55 - 14{,}451\,\frac{1}{t} + 159{,}936\,\frac{1}{t^3} + 21{,}692\,\frac{1}{t^5}$
$10^{16}\ \mathfrak{D}$	$482{,}544\,t - 379{,}527 - 562{,}94\,\frac{1}{t} + 203{,}384\,\frac{1}{t^3} - 158{,}215\,\frac{1}{t^5}$
$10^{25}\ \mathfrak{E}$	$-1910{,}43\,t + 6797{,}37 - 5322\,\frac{1}{t} + 1143{,}47\,\frac{1}{t^3}$
$10^{32}\ \mathfrak{F}$	$2052{,}16\,t - 7742{,}41 + 7204{,}66\,\frac{1}{t} - 1843{,}03\,\frac{1}{t^3} + 192{,}55\,\frac{1}{t^5}$

Les calculs servant à déterminer les écarts systématiques que différentes substances normales présentent avec une pareille équation d'état sont déjà fort avancés [2]).

3. *Degré d'exactitude de la loi des états correspondants pour des mélanges.* A présent nous pouvons juger beaucoup mieux de ce degré

[1]) Pour les coefficients VI.2 voir p. 451.

[2]) On a calculé depuis un système VII.1 de coefficients (voir *Comm.* n°. 97*a*, p. 24), en prenant pour la température absolue du zéro centrigrade la valeur plus exacte 273°,09, et en corrigeant aussi les données critiques. Ce système a été obtenu en combinant les observations relatives à l'hydrogène, l'oxygène, l'azote et l'éther de M. Amagat avec celles relatives à l'éther de MM. Ramsay et Young et celles relatives à l'isopentane de M. Young.

Coefficients réduits du viriel VII.1

$10^{8}\ \mathfrak{B}$	$157{,}9500\,t - 305{,}7713 - 231{,}8247\,\frac{1}{t} - 97{,}5686\,\frac{1}{t^3} - 4{,}2530\,\frac{1}{t^5}$
$10^{11}\ \mathfrak{C}$	$66{,}5702\,t - 66{,}6723 + 145{,}2913\,\frac{1}{t} + 79{,}0260\,\frac{1}{t^3} + 25{,}0946\,\frac{1}{t^5}$
$10^{16}\ \mathfrak{D}$	$434{,}680\,t - 131{,}462 - 903{,}004\,\frac{1}{t} + 367{,}7055\,\frac{1}{t^3} - 178{,}5625\,\frac{1}{t^5}$
$10^{25}\ \mathfrak{E}$	$-1588{,}948\,t + 5725{,}652 - 4331{,}720\,\frac{1}{t} + 864{,}610\,\frac{1}{t^3} + 40{,}449\,\frac{1}{t^5}$
$10^{32}\ \mathfrak{F}$	$1685{,}000\,t - 6477{,}876 + 6019{,}629\,\frac{1}{t} - 1512{,}028\,\frac{1}{t^3} + 144{,}537\,\frac{1}{t^5}$

d'exactitude qu'à l'époque où fut écrit le chap. I. Les diverses applications qui ont été faites dans cette série de contributions à la connaissance de la surface ψ semblent prouver que les écarts présentés par des mélanges de substances normales ne sont pas beaucoup plus grands que ceux que les substances normales offrent entr'elles.

Cela paraît assez remarquable, surtout quand on cherche la raison de la loi des états correspondants dans la similitude mécanique des mouvements, puisque, déjà à un point de vue géométrique, un mélange n'est pas du tout semblable à une substance simple. Il semble en résulter que la grandeur linéaire, qui détermine l'échelle géométrique de la similitude, est une moyenne d'un grand nombre de grandeurs linéaires fort différentes, qui interviennent dans les divers chocs. On devrait attribuer ainsi au „volume d'une molécule", non une signification physique, mais plutôt la signification géométrique d'une sphère décrite avec cette grandeur linéaire comme rayon.

Il ne sera pas bien possible d'établir une relation systématique entre les écarts que les mélanges de substances normales présentent à la loi des états correspondants, avant que cette relation ait été établie pour les substances normales elles-mêmes. Cela n'empêche pas pourtant qu'on s'occupe déjà de calculs qui ont pour but de représenter ces écarts.

4. *Détermination des grandeurs critiques des mélanges considérés comme homogènes.* Puisque nous négligeons les écarts de la loi des états correspondants, ces grandeurs (situées dans la région labile et par conséquent inaccessibles à l'observation) peuvent être déduites de n'importe quelle partie de l'équation d'état d'un mélange.

Le moyen le plus naturel est la superposition de deux diagrammes logarithmiques ou partiellement invariants d'isothermes dans le domaine voisin du point critique. Dans le chap. II cette méthode a été appliquée à des diagrammes $\frac{pv}{T}$ - $\log v$; dans les chaps. IV et VIII à des diagrammes $\log p$ - $\log v$, et dans le chap. V/VI à des diagrammes $\log \frac{pv}{T}$ - $\log p$ et $\log \frac{pv}{T}$ - $\log v$. Mais nous pouvons nous figurer que nous disposions d'un nombre d'observations suffisant dans un tout autre domaine. Pour donner un exemple bien simple, nous pouvons trouver la température critique d'un mélange si nous connaissons la température à laquelle

il ne s'écarte pas de la loi de MARIOTTE, sous des pressions relativement faibles. Et il n'est pas impossible que l'on puisse emprunter les données à certaines conditions de coexistence observées.

Une fois que l'on a trouvé les grandeurs critiques pour quelques mélanges, dans une résolution graphique on préférera représenter graphiquement T_{xk} et p_{xk} comme fonctions de x. Car les expériences de M. KUENEN nous donnent le droit de douter s'il est permis en général de faire l'hypothèse mentionnée sous 3°., et ce doute a été rendu plus fort par les expériences de M. KEESOM.

Si l'on se borne d'autre part à des recherches qualitatives relatives à des mélanges au sujet desquels toute donnée expérimentale fait encore défaut, les hypothèses $a_{12} = \sqrt{a_{11} a_{22}}$ [1]) et $b_{12} = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22})$ se présentent les premières à l'esprit.

5. *Les lignes ψ réduites.* Il a été exposé brièvement au chap. I comment les diverses lignes ψ peuvent être calculées au moyen de celles, qui ont été calculées une fois pour toutes pour une substance simple. Si nous représentons par v_1 un volume tellement grand que le mélange satisfait, sous ce volume, aux lois des gaz parfaits, nous pouvons écrire, en négligeant une fonction linéaire de x,

$$\psi_{xv} = -\int_{v_1}^{v} p dv + RT\left\{x \log x + (1-x) \log (1-x)\right\}.$$

Posant

$$\frac{p_k v_k}{RT_k} = \frac{1}{C_4}, \quad \mathfrak{p} = \frac{p}{p_k}, \quad \mathfrak{v} = \frac{v}{v_k},$$

il vient, si u est un grand nombre et que nous négligions d'autres fonctions de la température,

$$\frac{\psi_{xv}}{RT} = -\frac{1}{C_4}\frac{1}{\mathfrak{t}}\int_{u}^{\mathfrak{v}} \mathfrak{p}_{\mathfrak{t}} d\mathfrak{v} + \log \frac{p_{xk}}{T_{xk}} + x \log x + (1-x) \log (1-x). \quad (1)$$

La courbe représentée par l'expression $\int_{u}^{\mathfrak{v}} \mathfrak{p}_{\mathfrak{t}} d\mathfrak{v}$, considérée comme fonction de $\mathfrak{v}$, nous l'appellerons pour simplifier *la courbe de l'énergie libre réduite.* Pour construire une surface ψ déterminée, nous avons

[1]) GALITZINE et D. BERTHELOT.

besoin du groupe de courbes ψ réduites qui sont situées entre les valeurs extrêmes de la température réduite, se présentant sur cette surface.

Dans les plans $x = 0$ et $x = 1$ du modèle ψ on peut tracer les courbes ψ correspondant à la température la plus élevée et à la température la plus basse. Quand on passe à une surface ψ relative à une température plus élevée, les lignes ψ se déplacent (du moins dans le cas ordinaire) du côté où la température réduite est la plus élevée vers celui où elle est la plus basse; en même temps les dimensions linéaires dans les deux directions ψ et v subissent un certain changement.

6. *La surface ψ relative à des mélanges de chlorure de méthyle et d'anhydride carbonique à — 25°.* Pour donner un exemple de l'application de la méthode graphique et de l'équation d'état empirique réduite, nous nous sommes proposé de prédire la composition des phases coexistantes ainsi que la pression de coexistence pour des mélanges de chlorure de méthyle et d'anhydride carbonique à — 25°.

Ce choix a été fixé par les considérations suivantes:

1°. Les grandeurs critiques peuvent être déduites des expériences de M. Kuenen [1]); elles sont assez bien différentes les unes des autres et ont déjà été données au chap. II; d'ailleurs, M. Hartman a déjà construit un modèle pour + 9°,5.

2°. La température de — 25° est, pour le chlorure de méthyle, la température réduite la plus basse pour laquelle l'équation d'état empirique réduite ait été calculée.

3°. Aucune autre équation d'état, appropriée aux calculs, ne permet d'aller aussi bas.

4°. M. van der Waals a déjà déduit analytiquement les particularités des phénomènes de condensation pour des circonstances analogues à celles qui se présentent sur cette surface (Contin. II, pp. 146 et suivv.); il est d'ailleurs probable que l'accord de ses résultats avec les observations de M. Hartman sur des mélanges d'anhydride carbonique

[1]) Nous avons pris les grandeurs critiques suivantes (voir chap. II de ces Contributions; ces *Archives*, (2), 11, 383, 1906)

	x	T_{xk}	P_{xk}
anhydride carbonique	0	303	72,2
	$^1/_4$	336	73
	$^1/_2$	363	71,8
	$^3/_4$	391	68,9
chlorure de méthyle	1	416	64,8.

et de chlorure de méthyle, déjà trouvé en partie pour + 9°,5, sera plus clair encore à — 25°.

5°. Nous comptons communiquer ci-après (B) les résultats d'une détermination expérimentale de ces conditions de coexistence, dont M. VAN DER WAALS a déjà fait remarquer l'intérêt (Contin. II, p. 154).

L'accord numérique est rendu moins exact par le fait que l'équation d'état empirique réduite est mise d'accord avec les observations relatives à l'éther, pour la température réduite que présente le chlorure de méthyle sur cette surface ψ, alors que le chlorure de méthyle n'est pas semblable à l'éther; tel est bien le cas pour l'anhydride carbonique à la température réduite qu'il a sur cette surface. Une équation d'état empirique réduite, mise d'accord avec le chlorure de méthyle à — 25°, pour une température réduite de 0,6, et avec l'anhydride carbonique à — 25° pour la température réduite 0,8, aurait été plus avantageuse pour obtenir un accord numérique exact.

Le modèle ainsi obtenu, construit en plâtre, est représenté fig. 1 (pl. XIV); il est long de 0,7 m. (axe des v), haut de 0,4 m. (axe ψ) et large de 0,3 (axe des x). La forte dimension en longueur était rendue nécessaire par la grande différence de densité entre les phases vapeur de CO^2 et CH^3Cl.

La courbe binodale et les cordes de contact qui joignent deux phases coexistantes ont été obtenues par le roulement d'une plaque de verre à glaces. La fig. 2 (pl. XV) fait voir la courbe binodale avec les cordes de contact, ainsi que quelques sections v = Cte, projetées sur le plan $x\psi$; la fig. 3 donne la projection sur le plan xv; la fig. 4 fait connaître les valeurs de la pression, considérée comme fonction de la composition des phases coexistantes.

On remarque:

1°. La crête liquide, c. à d. la portion de la surface située du côté des petits volumes, devient très mince quand on ne donne pas des dimensions particulièrement grandes à la surface; pratiquement la construction n'est possible qu'en se servant d'une plaque d'épaisseur uniforme (p. ex. une plaque de fer-blanc).

2°. Pendant le roulement du plan tangent sur la crête de la nappe liquide et sur la surface vapeur convexe, vu la variation rapide de direction de la crête dans le voisinage du chlorure de méthyle pur, le point de contact sur la branche vapeur de la courbe binodale doit parcourir un chemin considérable pendant que le nœud sur la branche

liquide ne subit qu'un faible déplacement. Cela a pour conséquence que l'allure en double éventail des cordes de contact est nettement accusée.

3°. La branche vapeur de la projection de la courbe binodale est à peu près rectiligne; il résulte de là, d'après M. VAN DER WAALS, que la loi de HENRY est applicable dans tout le domaine des variations de composition; par contre, la branche liquide dans le diagramme px est encore une fois une hyperbole.

7. *Simplification de la détermination des conditions de coexistence, quand la phase liquide est à une température bien inférieure à sa* [1]) *température critique.* Pour déterminer la courbe binodale du pli transversal il suffit de connaître deux zones de part et d'autre du pli. Si nous appelons *courbe limite des mélanges homogènes* la ligne qui, sur la surface ψ, joint toutes les phases gazeuses et liquides qui représenteraient des états d'équilibre si le mélange de composition x restait homogène, la ligne binodale cherchée tombe en dehors [2]) de cette courbe limite, et ne la rencontre qu'aux teneurs 0 et 1.

La zone que nous aurons à calculer du côté de la vapeur est donc en quelque sorte indiquée.

Si la zone du côté du liquide est réduite à une lamelle, comme dans le cas du chlorure de méthyle et de l'anhydride carbonique à $-25°$ (ou de l'éther et hydrogène à la température ordinaire, côté éther), il suffit de connaître une ligne du côté du liquide. En effet, le point de contact est alors tellement rapproché de la ligne de crête, — pour laquelle ψ est un minimum —, que la surface ψ peut être remplacée par cette ligne. Faisant usage de la relation $\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_x = -p = 0$, il est aisé de tirer de l'équation d'état la valeur de v qui, sur cette ligne, correspond à un x déterminé. On trouve alors par intégration la valeur de $\psi_{p=0}$ que correspond au $v_{p=0}$ ou $\mathfrak{v}_{p=0}$, et l'on peut ensuite mener d'une façon graphique, par le point $\psi_{p=0}$, $v_{p=0}$, la tangente à la courbe ψ_x dans la région de la vapeur, suivant la méthode qui a été exposée au § 5 de la Comm. n°. 66 [3]); ce qui permet de trouver la tension de vapeur du mélange homogène.

Si l'on se propose uniquement de déterminer la pression et la com-

[1]) Voir la note 1 à la page 424.

[2]) VAN DER WAALS, Cont. II, p. 100.

[3]) Ces *Archives*, (2), 5, 665, 1900.

position des phases coexistantes, on peut obtenir une approximation suffisante en posant $v_{liq.x} = v_{liq.1}\,x + v_{liq.2}\,(1 - x)$; ce qui consiste à admettre que la crête est située dans un plan; et dans plus d'un cas on pourra même supposer que ce plan coïncide avec le plan ψx.

Pour trouver les conditions de coexistence, on fera donc rouler un plan (une plaque de verre) sur le bord d'une plaque mince, découpée suivant la ligne de crête calculée $\left(\text{de préférence la ligne de crête pour } \frac{\psi}{RT}\right)$, et sur un modèle (en plâtre p. ex.) de la surface vapeur, qui est toujours le même si l'on prend comme ordonnée $\frac{\psi}{RT}$ et si l'on néglige les écarts de la loi de Mariotte.

Au lieu d'effectuer cette opération sur un modèle, en appliquant immédiatement la théorie de van der Waals, on peut l'effectuer entièrement par des tracés dans un plan, ainsi que cela a été exposé au chap. I § 6. Cette construction graphique aussi se simplifie quand on néglige l'épaisseur de la crête. On trace alors dans la fig. 2 la ligne de crête de la plaque figuratrice du liquide, ainsi que les diverses sections $v =$ Cte. Puis on joint les points où les sections ont la même valeur de $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ (ou s; voir chap. I, § 8) que certains points de la crête, pour former les *lignes de substitution* (chap. I, § 5) appartenant donc toujours au point de la crête ayant la valeur de $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ (ou s) considérée (pour des mélanges gazeux parfaits les lignes de substitution sont, en projection ψx, des droites perpendiculaires à l'axe des x); on raccorde le point de la crête à divers points de la ligne de substitution dans la zone vapeur, et on rabat sur le plan ψv la section par un plan perpendiculaire au plan xv et passant par la ligne de jonction. Le point où la section touche la ligne de jonction fait connaître la phase cherchée, en équilibre avec la première.

La construction devient plus simple encore si l'on peut négliger la distance de la crête au plan $v = 0$. Alors on n'a qu'à abaisser, dans la fig. 2, les sections $v =$ Cte de la quantité $A + \frac{B}{v_{vap.}} + \ldots$, et à tracer une tangente commune à la ligne de crête et à chacune des lignes ainsi transportées, pour trouver $x_{vap.}$ et $x_{liq.}$

Enfin, si l'on néglige les écarts de la loi de Mariotte, les sections $v =$ Cte de la phase vapeur dans la fig. 2 n'ont qu'à être abaissées en

entier et sans modification pour fournir le système de lignes, dont nous venons de parler, et auxquelles on doit tracer des tangentes touchant en même temps la crête, pour trouver x_{vap} et x_{liq}.

8. *Application de la loi empirique de la tension de vapeur réduite des substances pures aux phénomènes de coexistence des mélanges.* Au § 7 nous avons fait remarquer que l'on obtient la branche liquide de la courbe binodale avec une précision suffisante en remplaçant les points où $\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)_x = -p_{x\,coex}$ par la ligne de crête, le lieu des points où $\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)_x = 0$; on pourrait du reste les remplacer par les points de la courbe limite où $\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)_x = -p_{x\,max}$, $p_{x\,max}$ représentant la tension de vapeur maxima du mélange x, ce que M. VAN DER WAALS a appelé la pression de coïncidence.

D'après l'équation (1), on obtient la branche liquide de la binodale $\frac{\psi}{RT}$, comme fonction de x, sous forme d'une somme de trois termes.

Le premier terme

$$\varphi_{\alpha x} = x \log x + (1 - x) \log (1 - x) \tag{2}$$

est uniquement déterminé par la composition moléculaire.

Le second terme se déduit de la fonction

$$\varphi_{\beta \mathfrak{t}} = -\left[\frac{1}{\mathfrak{t} C_4} \int_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}} \mathfrak{p}\, d\mathfrak{v}\right]_{\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_{liq}\,\mathfrak{t}} \tag{3}$$

en prenant comme limite supérieure de l'intégrale le volume liquide réduit $\mathfrak{v}_{liq}$ d'une substance simple, à la température réduite $\mathfrak{t}$. Nous nous figurons que la fonction $\varphi_{\beta \mathfrak{t}}$ soit représentée graphiquement une fois pour toutes, comme fonction de $\mathfrak{t}$.

Les propriétés des mélanges de deux substances déterminées sont données par

$$\varphi_{\gamma x} = \log \frac{p_{xk}}{T_{xk}} \tag{4}$$

comme fonction de x et par $\frac{1}{T_{xk}}$ comme fonction de x. En combinant la représentation graphique de la dernière fonction avec celle de $\varphi_{\beta \mathfrak{t}}$, on obtient $\varphi_{\beta x}$, la représentation graphique de la valeur que prend la grandeur φ_β, pour la valeur de $\mathfrak{t}$ qui correspond à x. Alors la branche

liquide de la courbe connodale, donc aussi, avec une précision suffisante, la ligne de crête et la ligne limite, sont données par

$$\Phi_{\alpha x} + \Phi_{\gamma x} + \Phi_{\beta x} = \frac{\psi}{RT}. \tag{5}$$

La grandeur μ qui joue un si grand rôle dans la théorie de VAN DER WAALS, pour ce qui regarde les phases coexistantes, est déterminée par $\Phi_{\beta x} + \Phi_{\gamma x} = \frac{\mu}{RT}$, si l'on néglige pv pour la phase liquide, et le ζ de VAN DER WAALS se réduit à ψ moyennant la même omission, pour laquelle on peut d'ailleurs aisément apporter une correction.

Les considérations que nous venons de donner, ainsi que les constructions et figures, semblent donc bien convenir pour illustrer cette partie de la théorie de VAN DER WAALS. Dans le cas des mélanges d'anhydride carbonique et de chlorure de méthyle, $\frac{\mu}{RT}$ est une ligne légèrement courbée vers le bas. La fig. 5 (pl. XV) montre comment la branche liquide de la courbe binodale (la ligne de crête de la lamelle du liquide), $\frac{\psi}{RT}$ (voir aussi les autres figures), est issue des courbes $\frac{\mu}{RT}$ et $\Phi_{\alpha x}$.

Pour ce qui regarde le calcul de $\Phi_{\beta \mathfrak{t}}$, on doit remarquer que la loi de la tension de vapeur fait connaître $\mathfrak{p}_{max}$ comme fonction de $\mathfrak{t}$, et donne donc aussi $\mathfrak{v}_{vap}$ par l'équation d'état empirique; on sait aussi que

$$\int_{\mathfrak{v}_{liq}}^{v} \mathfrak{p}\, d\mathfrak{v} = \int_{\mathfrak{v}_{vap}}^{v} \mathfrak{p}\, d\mathfrak{v} + \mathfrak{p}_{max}(\mathfrak{v}_{vap} - \mathfrak{v}_{liq}).$$

Surtout si $\mathfrak{v}_{liq}$ est petit, donc $\mathfrak{v}_{vap}$ bien grand (de sorte que le terme $\frac{B}{v}$ est le seul qui doive être pris en considération pour l'écart des lois des gaz parfaits), on arrive ainsi à abréger considérablement les calculs, en négligeant en même temps $\mathfrak{v}_{liq}$.

Si l'on ne tient aucun compte des écarts de la phase vapeur de l'état gazeux idéal et si l'on admet que pour une substance simple $log\, \mathfrak{p}_{max} = -f\frac{1-\mathfrak{t}}{\mathfrak{t}}$, on retrouve les développements que M. VAN DER WAALS a donnés dans sa théorie des mélanges ternaires [1]), où il traite d'ailleurs plusieurs questions relatives aux mélanges binaires.

[1]) Ces *Archives*, (2), 7, 343, 1902.

B. La détermination des conditions de coexistence des phases gazeuse et liquide de mélanges de deux gaz à basse température [1]).

1. *Introduction.* On sait qu'on peut décrire comme suit les deux méthodes de détermination des compositions moléculaires x_l et x_v des deux phases coexistantes liquide et vapeur, d'un mélange de deux substances qui sont gazeuses dans les conditions normales. Dans la première méthode on isole de petites quantités des deux phases pour toute une série de pressions de coexistence, et on détermine la composition de ces deux quantités par voie chimique ou physique.

Soient a et b les points qui représentent ces deux phases sur la projection v, x de la courbe binodale du pli transversal de la surface ψxv de van der Waals pour une température déterminée (fig. 6), et aussi sur la projection px de cette courbe binodale (fig. 7). Par la détermination de quelques couples de valeurs ab, $a'b'$ etc., on obtient l'allure de p, x et v pour tout le pli transversal relatif à T.

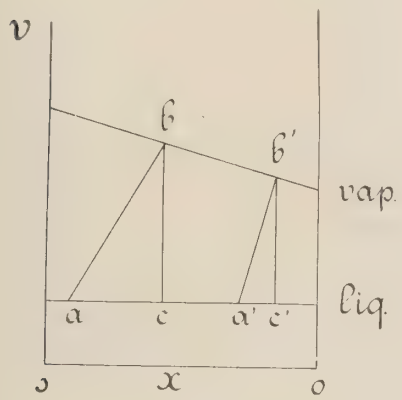


Fig. 6.

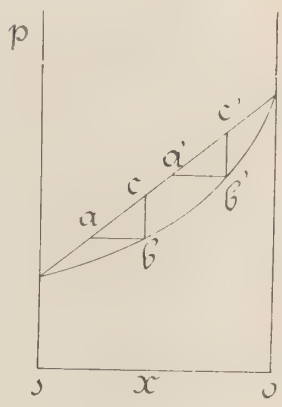


Fig. 7.

Suivant la seconde méthode on observe, pour une série de mélanges de compositions connues, le commencement et la fin de condensation, et on détermine p et v dans ces circonstances, c. à d. qu'on détermine $p_{l,x,T}$ et $p_{v,x,T}$ et $v_{l,x,T}$ et $v_{v,x,T}$. Cette détermination fait connaître chaque fois deux phases représentées par b et c dans les figg. 6 et 7. En joignant tous les points b et tous les points c on retrouve la courbe binodale,

[1]) *Versl. Kon. Akad. Amsterdam*, 25 juin 1904; *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 92.

de sorte qu'on peut déduire de nouveau x_{lpT}, x_{vpT}, v_{lpT} et v_{vpT}. C'est l'application de cette dernière méthode à de basses températures, particulièrement sous despressions pas très élevées, qui constitue l'objet de ce travail.

Aux basses températures on peut suivre du reste la première méthode, de la façon qu'elle a été appliquée par M. Hartman (chap. III des Contributions à la connaissance de la surface ψ) aux températures ordinaires. Mais en général l'analyse d'un mélange gazeux est bien plus difficile que la préparation d'un mélange de composition déterminée (par exemple à l'aide de l'appareil de mélange décrit au chap. V)[1], et il est difficile de s'assurer si les quantités de vapeur et de liquide soutirées ont réellement la même composition que les phases qui ont été mises en équilibre par l'agitation.

Voilà pourquoi il est de toute importance de résoudre la difficulté inhérente à la seconde méthode aux températures inférieures à — 43° (le point de fusion du mercure). Dans notre première tentative dans cette direction nous ne nous proposions pas d'atteindre un haut degré de précision. Pour donner la réponse à plusieurs questions la précision est suffisante, et elle suffit amplement au calcul des corrections nécessaires pour des déterminations plus précises.

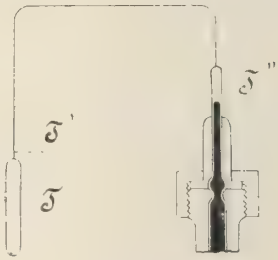


Fig. 8.

Dans nos mesures nous avons fait usage de l'appareil qui est représenté schématiquement fig. 8. C'est en principe un tube de Cailletet recourbé deux fois, dont une extrémité est plongée dans le cryostat de température T et contient une quantité connue d'un mélange de composition déterminée x, que l'on condense en refoulant le mercure à la température ordinaire (ou plus élevée) T''.

Le mélange, dont on connaît la quantité et la composition x, n'est alors contenu qu'en partie dans le réservoir T à la température de l'épreuve. Il s'en trouve une autre partie dans un tube qui est rélié au réservoir par un tube capillaire, et qui est à la température ordinaire T'' où à une température plus élevée. Il en résulte des complications, non en ce qui concerne la mesure de la pression p_{cx} où le mélange de composition x commence à se condenser, — car, aussi longtemps que

[1]) Ces *Archives*, (2), 12, 1, 1907.

n'apparaît pas encore la première trace de liquide, avec lequel le vapeur est en équilibre, la composition de la phase vapeur dans l'espace à basse température est restée ce qu'elle était d'abord, de sorte que la composition de la phase vapeur dans l'état d'équilibre est parfaitement connue —, mais pour ce qui regarde la détermination de la pression p_{Lx}, à la fin de la condensation du mélange de composition x. En effet, on ne saurait condenser à basse température la totalité du mélange. Il s'ensuit que la composition de la phase liquide à la température T, au-dessus de laquelle il y a une phase vapeur dont la composition est en général différente, et différente aussi de la composition primitive, n'est plus égale à cette dernière et est par conséquent inconnue.

Il y a cependant moyen de trouver cette composition en faisant subir une correction à la composition initiale x, et cette correction est assez petite aussi longtemps que la phase vapeur n'occupe qu'un petit volume et n'est soumise qu'à une pression médiocre (voir § 5).

2. *Installations générales pour les mesures.*

Une représentation schématique générale de l'appareil de mesure est donnée sur la planche XVI, fig. 1. Les lettres sont les mêmes que celles des planches auxquelles nous renvoyons.

Le voluménomètre E (avec manomètre M, voir chap. V, pl. I, figg. 1 et 2) contient le mélange gazeux, qui y a été préparé au moyen de l'appareil relié en r_6 et r_3 (chap. V). Par le robinet r_9, le capillaire en acier g_1'', et le robinet à trois voies en acier k (voir *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 84, pl. I, fig. 2) le mélange gazeux est conduit vers le tube de compression b à tige graduée (voir *Comm.* n°. 69, pl. II), placé dans le cylindre de compression $\mathfrak{A}_1'$ (voir *Comm.* n°. 84, pl. I), pour y être comprimé à l'aide du mercure venant du réservoir de compression C_1' (voir n°. 84). De là on peut le faire passer sous pression, à travers le robinet à trois voies k et le capillaire en acier g''_1, dans un des deux appareils $\mathfrak{D}$ ou $\mathfrak{P}$. Provisoirement nous avons fixé le capillaire g_1'', au moyen de cire à cacheter, soit au capillaire de $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}b_2$, soit à celui de $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}p_2$, suivant que nous désirions déterminer la pression initiale p_{exT} ou finale p_{lxT} de la condensation.

Le mercure du cylindre de compression est mis ici en communication par le tube u (pl. XVI, fig. 1) avec celui d'un manomètre pour la détermination de la pression dans $\mathfrak{D}$ ou $\mathfrak{P}$; il n'en était pas ainsi dans l'appareil de la *Comm.* n°. 84, pl. I, fig. 1.

L'appareil $\mathfrak{D}$ ou $\mathfrak{P}$ peut être raccordé directement au voluménomètre par l'intermédiaire du robinet à trois voies k; la pression est alors mesurée au moyen de M.

Les appareils $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{P}$ sont représentés en détail dans les figg. 2 et 3 de la pl. XVI, et décrits au §§ 4 et 5. Dans tous deux le tube de verre où le mélange à examiner est conduit par le capillaire g_1'', p pour $\mathfrak{P}$ et a pour $\mathfrak{D}$, est plongé dans un cryostat, où l'on entretient la température voulue de la façon qui a été décrite dans la *Comm.* n°. 83.

Le réglage de la température s'effectue pour $\mathfrak{P}$ par l'intermédiaire du tube d'exhaustion T_{12} et pour $\mathfrak{D}$ par les tubes f_4 et m_2. Dans nos mesures nous introduisions du chlorure de méthyle liquide dans le cryostat, et nous réglions les températures d'après les indications d'un thermomètre à alcool.

Le voluménomètre E communique, par le robinet r_3, non seulement avec les réservoirs à gaz, mais encore avec la pompe à mercure, de sorte que le tube de compression et le piézomètre en $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{P}$ peuvent être évacués. Nous ne nous étendrons pas ici sur les manipulations nécessaires pour remplir les appareils d'une quantité déterminée du mélange à examiner et pour mesurer des quantités de gaz qu'on en laisse s'échapper. Du reste, pour ce qui regarde le voluménomètre et l'appareil de mélange nous renvoyons au chap. V, pour le cylindre de compression avec ses annexes aux *Comm.* n°s. 69 et 84, et pour le cryostat aux §§ 4 et 5 ainsi qu'à la *Comm.* n°. 83.

3. *Détermination du volume moléculaire des phases coexistantes.* Comme nous ne nous proposions pas de faire des mesures très précises, quelques remarques suffiront. Pour ce qui regarde la phase liquide on peut, moyennant des restrictions et des conditions dont il sera question au § 5, isoler par condensation d'une partie du mélange gazeux dans l'appareil $\mathfrak{P}$, que nous appellerons simplement le piézomètre, une phase liquide dont la teneur peut être déduite de la composition x du mélange initial par une correction, ainsi que nous l'avons dit au § 1. Les mesures au voluménomètre fournissent le volume que la phase liquide occupe à l'état de gaz; et on lit le volume de la phase liquide même sur les divisions p_5 et p_6 (pl. XVI, fig. 3). Quant à la phase gazeuse, son volume moléculaire se déduit le mieux de la pression de coexistence et d'isothermes que l'on peut déterminer, suivant la méthode de la *Comm.* n°. 78, pour des pressions pas trop faibles, p. ex. avec l'appareil de

condensation $\mathfrak{D}$ même. (Si la pression n'est pas très élevée, la correction pour l'écart de la loi de MARIOTTE-GAY-LUSSAC AVOGADRO pourra déjà être apportée au moyen de l'équation d'état empirique réduite (*Comm.* n°. 71), suivant la loi des états correspondants.

4. *Commencement de la condensation.* Pour déterminer le point de rosée nous avons appliqué le principe de l'hygromètre de REGNAULT [1]). Avec cet appareil on observe le premier dépôt de rosée qui se forme à un endroit dont la température est un peu plus basse que celle du mélange ambiant, lorsque ce mélange a atteint la pression à laquelle la condensation commence. Afin que la moindre trace de rosée pût être observée, l'endroit de basse température est un miroir luisant, à côté duquel s'en trouve un autre qui n'est pas refroidi.

L'appareil a été soufflé d'une seule pièce à la façon d'un calorimètre à glace de BUNSEN. L'espace extérieur a a une capacité d'environ 20 cm³., et est muni d'un capillaire auquel peut être soudé, au moyen de cire, le capillaire en acier qui sert à amener le mélange gazeux. Un des miroirs d est soudé au fond. Le tube intérieur c_2 porte en c_1 la deuxième surface miroitante et sert en même temps de cryostat pour maintenir cette surface à une température un peu plus basse que celle du mélange gazeux.

A cet effet le cryostat intérieur, tout comme le cryostat extérieur, porte un couvercle m_1 qui ferme hermétiquement le tube c_5, un petit agitateur h_1, dont la tige h_2 passe par un petit tube en caoutchouc comme dans la *Comm.* n°. 83, et un thermomètre i, fixé à m_1 au moyen de cire à cacheter; la vapeur du gaz liquéfié est enlevée à c_2 par m_6.

Le tube c porte en c_4 la cloche de verre f_1, qui laisse passer en f_2, au moyen d'un petit bouchon en caoutchouc, le capillaire relié à c, et qui constitue le couvercle du grand cryostat. Par là l'appareil est très solide et très facile à manier. Le capillaire b_1 est protégé contre le contact de l'agitateur par un petit cadre en métal n.

Le couvercle est traversé en f_3 par les fils qui portent l'agitateur. Les vapeurs du bain de gaz liquéfié sont enlevées par f_4.

Les surfaces de d et c_1 sont rendues miroitantes par une couche de

[1]) M. BATTELLI (*Ann. de Chim. et de Phys.*, (6), 25, 59, 1892) a trouvé que pour des substances pures le dépôt de liquide sur un miroir non refroidi, placé dans la vapeur, constitue une méthode convenable de détermination du point de rosée.

platine, déposée en chauffant au rouge du chlorure de platine mélangé à de l'huile de camomille. La surface de platine n'est pas aussi luisante, il est vrai, qu'un miroir d'argent, mais les avantages du platine à cet égard sont évidents.

Le réglage de la température dans les deux cryostats s'obtient à l'aide de la même pompe aspirante qui entretient une pression constante, au moyen d'un régulateur de pression (suivant le principe de la *Comm.* n°. 87 § 3), dans un tube principal qui se partage en deux conduites d'aspiration, chacune fermée par un robinet.

En ouvrant convenablement les robinets, on peut faire en sorte que la température dans le cryostat intérieur soit un peu plus basse que dans le cryostat extérieur. La différence de température qu'il est possible de maintenir constante dépend de la température elle même et du gaz liquéfié.

Dans les mesures dont nous allons parler dans la suite de ce travail, la température du grand cryostat était — 25°,0, celle du petit — 25°,1. L'abaissement de pression nécessaire dans le tube d'aspiration principal (le point d'ébullition normal du chlorure de méthyle est — 23°) pouvait être aisément entretenu à l'aide d'une petite trompe à eau.

Le régulateur de pression était installé approximativement sur la pression correspondant à — 25°. Un assistant qui agissait sur les robinets de réglage, conformément aux indications qu'un autre lui donnait d'après les lectures du thermomètre, pouvait faire en sorte que les températures, donc aussi leur différence, restaient constantes à moins de 0°,05.

La précision que comporte la détermination du point de rosée au moyen de notre appareil dépend en premier lieu de la différence de température des deux cryostats. Elle est évidemment d'autant plus faible que le coefficient de température de la pression initiale est plus grand. Pour une différence de température donnée elle est d'autant plus grande que la différence des pressions pour lesquelles le dépôt se forme et disparaît est plus petite. La grandeur de cette différence est d'ailleurs déterminée par l'éclairage, or celui-ci est fortement gêné par la double paroi du cryostat. Dans nos expériences nous avons reconnu que l'observation à l'oeil nu avec un éclairage oblique du miroir était la plus convenable. La différence variait entre des limites qui atteignaient 2 % de la pression. Il est certain que la partie optique de la méthode peut être notablement perfectionnée. Mais dans maint cas la précision atteinte sera déjà suffisante.

Il va de soi que l'on doit éviter des variations de pression adiabatiques. Mais les mêmes difficultés se présentent dans des déterminations à la température ordinaire. Vu les grandes dimensions de l'espace a occupé par la vapeur, nous avons cru ne pas devoir y introduire d'agitateur, et nous avons tâché d'éviter par des observations de longue durée les inconvénients qui pouvaient en résulter.

5. *Détermination de la pression finale.* Pour faire cette détermination, on ramène vers le voluménomètre le mélange qui a servi à déterminer la pression initiale; puis on détache l'appareil pour l'observation du point de rosée du capillaire d'acier, et on le remplace par le piézomètre p de $\mathfrak{P}$ (pl. XVI, figg. 1 et 3), que l'on fixe au capillaire d'acier y_1''. Le piézomètre se compose d'un tube en verre assez large p_5 (pl. XVI, fig. 3) portant une tige capillaire; le tube et sa tige sont divisés et calibrés. Les dimensions ont été choisies conformément aux quantités de gaz sur lesquelles on se propose d'opérer. Ces dimensions une fois établies, on doit déterminer par une expérience préliminaire, pour chaque détermination, la quantité exacte de gaz liquide qui remplit le piézomètre jusque tout près de l'embouchure du capillaire, pour une position convenable du ménisque mercuriel dans le tube de compression b.

L'équilibre des phases dans p_5 s'obtient au moyen d'un agitateur électromagnétique q, mis en mouvement par la bobine S. L'action directe de cette bobine ne suffisant pas à entraîner l'agitateur avec force à travers le ménisque liquide, un tube en fer doux z_1, avec une fente pour permettre les lectures sur p_6, accompagne la bobine dans son mouvement.

A la rigueur, ce mouvement devrait être indépendant de celui de l'agitateur dans le cryostat; mais, comme nous ne prétendions pas à une grande précision dans nos expériences, nous avons pris, pour plus de simplicité, le tube en fer z comme raccordement entre les pièces supérieure et inférieure, z_{02} et z_{01}, de l'agitateur annulaire à soupape (voir *Comm.* n°. 83), qui est mû tantôt mécaniquement, tantôt à la main, tantôt pour remuer le bain liquide, tantôt pour bien mélanger le liquide et la vapeur dans le piézomètre, moyennant le mouvement simultané de la bobine magnétisante S.

La différence essentielle entre la détermination de la pression finale de condensation par notre méthode et dans un tube de Cailletet ne réside pas précisément en ceci, que la quantité totale de gaz n'est pas

réduite en liquide, mais plutôt en ceci que, comme il a déjà été remarqué au § 1, la température n'est pas la même pour les diverses parties du mélange gazeux. La partie qui est à la température d'observation T (voir fig. 8. § 1) est séparée de celle qui est à la température ordinaire T'' (plus élevée) par une série de couches (dans le capillaire) dont les températures ont toutes les valeurs comprises entre T'' et T. Nommons T' une de ces températures.

Cet état de choses entraîne certaines restrictions et certaines conditions à remplir dans l'application de la méthode.

Pour qu'il soit possible de faire des mesures pour toutes les compositions x, il faut que la température T'' soit prise ou soit élevée suffisamment au-dessus de T, pour que dans le diagramme p, x (fig. 9) la branche vapeur de la binodale correspondant à T'' ne coupe pas la branche liquide relative à T. On n'a pas à craindre alors un commencement de condensation à la température T'', pendant la condensation effectuée par le transport du mélange du tube de compression (éventuellement le voluménomètre) vers le piézomètre. A la température T'' on conserve alors un mélange gazeux de la composition initiale. Si au contraire ces courbes s'entrecoupent, ainsi que la fig. 9 l'indique pour T', on ne peut faire de mesures que pour des compositions situées en quelque sorte en dehors des points d et e.

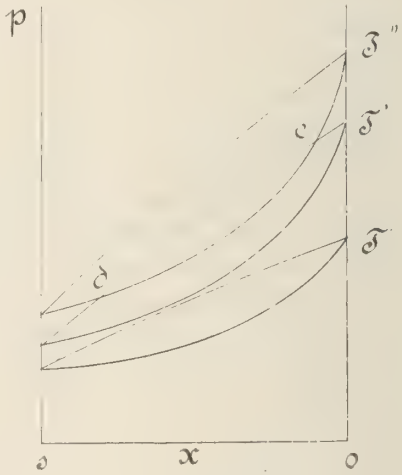


Fig. 9.

Si le mélange gazeux peut être refoulé dans le piézomètre sans qu'il se produise de condensation dans l'appareil de compression (ou le voluménomètre), la partie du capillaire où s'effectue le passage de T'' à T donne lieu à une seconde difficulté du même genre. Dans cette partie on rencontre nécessairement des températures T''' pour lesquelles la branche vapeur de la binodale est coupée par la branche liquide de celle relative à T. S'il se forme des gouttelettes à la température T''',

on ne saurait plus dire quelle est la teneur x_{lpT} du liquide qui appartient à la pression de coexistence observée. Le liquide ainsi formé découle ou disparaît par distillation isothermique. Ce dernier processus a un intérêt particulier lorsque des gouttelettes se réunissent pour former une petite colonne liquide, qui obture le capillaire et est soutenu par les forces capillaires. Afin d'éviter que ces colonnes, si elles se forment momentanément, ne passent dans le capillaire g_1'', et faire en sorte que la composition dans ce capillaire et dans l'espace de température T'' reste égale à la composition initiale, il est recommandable de veiller à ce que le gaz ne fasse que couler dans le piézomètre et ne s'en échappe jamais, ce que l'on peut faire en agissant sur le robinet k (pl. XVI, fig. 1) et en réglant convenablement la pression dans b (pl. XVI, fig. 1), jusqu'à ce qu'enfin, laissant le robinet k ouvert, on établit l'équilibre en agitant, et le capillaire ne contient plus que de la vapeur.

Pour activer la distillation et favoriser la disparition du liquide qui se forme dans le capillaire où la température passe de T à T'', il est recommandable de ne pas prendre ce capillaire très étroit. Il est entouré d'ailleurs d'un manteau à air p_4, formé d'un tube de verre bien fermé au moyen d'anneaux en caoutchouc p_6 et de gélatine. Pour éviter une diffusion on doit prendre pour g_1'' un capillaire très étroit.

Si l'on a déterminé x_{vpT} par des mesures préliminaires à l'aide de l'appareil pour l'observation du point de rosée (en première approximation on pourra parfois se servir d'un modèle de surface ψ comme celui qui a été décrit dans la partie A de ce chapitre), il est aisé d'apporter la correction nécessaire pour déduire de x_1, la teneur initiale, la teneur de la phase liquide examinée à la température T. On lit sur les divisions du piézomètre le volume de la vapeur. Soit V_v ce volume, réduit aux conditions normales et corrigé pour le deuxième coefficient du viriel B (voir la partie suivante C de ce chapitre). Soit de plus V le volume total occupé par la vapeur et le liquide, mesuré et corrigé de la même façon, de sorte que $V_l = V - V_v$ est le volume de gaz, mesuré dans les mêmes circonstances, qui formerait la phase liquide. Il s'ensuit :

$$x_{lpT} = \frac{x_1 V - x_{vpT} V_v}{V - V_v} = x_1 + \frac{V_v}{V}(x_1 - x_{vpT}) + \ldots$$

Si l'on opère à des pressions médiocres, la correction sera toujours faible et il sera toujours possible de l'évaluer avec une précision suffisante, même si l'on ne connaît pas très exactement x_{vpT}.

C. L'EXACTITUDE DE LA LOI DES ÉTATS CORRESPONDANTS POUR DES MÉLANGES DE CHLORURE DE MÉTHYLE ET D'ANHYDRIDE CARBONIQUE [1]).

1. *Introduction.* Dans la 1ère partie (A) de ce chapitre nous avons exprimé l'espoir de donner une contribution expérimentale à l'étude des mélanges coexistants de chlorure de méthyle et d'anhydride carbonique, à des températures basses, et de nous servir des données qu'elle aurait fournies pour soumettre à l'épreuve l'application de la loi des états correspondants aux mélanges, une loi dont le contrôle constitue depuis plusieurs années un sujet d'études au laboratoire de Leyden. Du champ étendu d'états réduits que les mélanges d'anhydride carbonique et de chlorure de méthyle offrent aux mesures, de part et d'autre de l'état critique (c'est précisément parce que ce champ est si étendu que ces mélanges-là ont été choisis vers 1890 pour faire les premières recherches concernant la surface $\mathfrak{S}$), une notable portion, voisine de l'état critique, fut examinée dès le commencement par M. KUENEN [2]).

M. HARTMAN y ajouta le domaine des phases coexistantes à 9°,5 [3]). Nous avons étendu encore le champ dans deux directions, mais seulement à titre d'essai, par quelques expériences.

Les résultats de quelques-unes de ces dernières mesures, parmi lesquelles il y en a de provisoires, et qui avaient surtout pour but d'établir une méthode de recherches, ne sont peut être pas sans intérêt, puisque pour le moment nous sayons encore si peu du degré d'approximation auquel la loi des états correspondants est applicable dans les divers champs d'états réduits $\left(\mathfrak{v} = \frac{v}{v_k},\ \mathfrak{t} = \frac{T}{T_k}\right)$.

Nos mesures se rapportent en premier lieu à des mélanges gazeux dans des conditions à peu près normales, en second lieu à des phases coexistantes à basse température.

Pour les phases gazeuses normales nous avons trouvé que la loi des états correspondants était vérifiée avec un haut degré d'approximation. Le coefficient du viriel B, qui détermine la façon dont les mélanges de

[1]) *Versl. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam*, 25 juin 1904 et 29 octobre 1904. *Comm. phys. lab. Leiden*, n°. 92.

[2]) Ces *Archives*, (26), 354, 1893. Cette étude fut reprise en 1904 par M. BRINKMAN, Dissertation, Amsterdam.

[3]) Chap. III de ces Contributions; ces *Archives*, (5), 11, 387, 1906.

chlorure de méthyle et d'anhydride carbonique s'écartent de la loi de MARIOTTE aux faibles densités, peut-être calculé d'une manière satisfaisante à l'aide de la loi des états correspondants, bien qu'il semble que pour un des mélanges l'écart soit un peu plus grand que pour les composantes pures.

Nous avons trouvé des écarts plus grands dans l'examen des phases coexistantes à basse température. Au moyen de l'appareil pour les points de rosée, décrit dans la deuxième partie (B), nous avons déterminé la pression de condensation pour le mélange $x = {}^1/_2$ à $-25°$, la température pour laquelle nous avons construit la surface ψ décrite dans la première partie A. Les écarts observés sont assez considérables; ils indiquent que les écarts présentés par les mélanges à la loi des états correspondants augmentent quand la température devient plus basse et que l'on considère des états liquides. La détermination de la pression finale de condensation, pour le même mélange $x = {}^1/_2$ à $-25°$, au moyen du piézomètre décrit dans la 2e partie, aurait entraîné certaines complications (voir B. § 5). Pour avoir une idée de la façon dont la branche liquide de la binodale pour $x = {}^1/_2$ s'écarte de celle que l'on calcule par la loi des états correspondants, nous avons déterminé la pression de condensation pour $x = {}^1/_2$ à une température plus basse encore, savoir $-38°,5$. Le résultat obtenu par l'examen de la phase vapeur à $-25°$ fut ainsi vérifié.

I. LA COMPRESSIBILITÉ DANS LE VOISINAGE DE L'ÉTAT NORMAL.

2. *Détermination du deuxième coefficient du viriel.* Les mélanges ont été préparés et la compressibilité déterminée dans l'appareil de mélange et le voluménomètre décrits au chap. V (ces *Archives*, (2), 12, 16, 1907). Les méthodes d'observation et de calcul sont traitées en détail dans le même chapitre.

Les gaz ont été préparés par distillation, d'abord dans de la glace, puis dans l'anhydride carbonique solide. On a déjà pu voir par les communications antérieures que l'on obtient de cette façon de l'anhydride carbonique pur. Pour le chlorure de méthyle nous en fournirons tantôt la preuve (§ 8).

Les valeurs de la pression p, du volume V et de la teneur moléculaire x en chlorure de méthyle, à la température t, sont consignées dans le tableau I.

Tableau I.

Compressibilité des mélanges d'anhydride carbonique et de chlorure de méthyle.

N°.	p en mm.	V en cm³.	t
	$x = 1$ (CH^3Cl)		
I.	1137,33	537,67	20,05
II.	593,69	1043,51	20,07
III.	479,23	1296,33	20,07
	$x = 0,6945$		
I.	1200,32	537,49	20,09
II.	624,45	1043,50	20,10
III.	503,49	1297,01	20,08
	$x = 0,5030$		
I.	1173,08	537,73	19,97
II.	608,87	1043,66	19,87
III.	490,88	1296,30	19,87

Les valeurs pour $x = 0$ peuvent être empruntées au chap. V (p. 51).

Pour soumettre les observations au calcul nous ferons usage de l'équation d'état empirique réduite (*Comm.* n°. 71), qui se prête particulièrement bien à l'étude du degré d'exactitude de la loi des états correspondants; nous la prendrons sous la forme donnée au § 4, et qui diffère peu de celle employée dans la première partie (A) de ce chapitre.

En premier lieu les pressions observées doivent être réduites à la même température A cet effet nous avons calculé les coefficients de pression réels pour CO^2 (0,003460) et CH^3Cl (0,003586) au moyen de l'équation d'état en question et du coefficient de pression pour les gaz

parfaits, que l'on trouvera plus loin; pour les mélanges nous avons obtenu les coefficients de pression par interpolation linéaire.

Vu les petites différences de température, les erreurs faites de ce chef restent inférieures à celles de l'observation.

Si v est le volume exprimé en unités normales théoriques [1]), on a approximativement:

$$pv = A + \frac{B}{v}, \text{ où } A = 1 + \alpha_\infty t,$$

α_∞ étant le coefficient de pression d'un gaz parfait. Un des avantages de l'équation d'état empirique réduite, c'est qu'elle fait connaître le degré de précision que l'on atteint en négligeant les termes en $\frac{1}{v}$.

Pour calculer le deuxième coefficient du viriel nous avons donc, en première approximation, si B^2 est négligé aussi (pour les approximations prochaines voir § 5):

$$\frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} - 1 = \frac{B}{A^2}(p_1 - p_2),$$

et le tableau I donne, avec $\alpha_\infty = 0{,}00366195$ (au lieu de 0,0036625 comme dans *Comm.* n°. 71):

Tableau II.

Deuxième coefficient du viriel pour des mélanges d'anhydride carbonique ($x = 0$) et de chlorure de méthyle ($x = 1$) en première approximation.

Teneur	$\frac{B}{A^2}$ déduit de I et II	$\frac{B}{A^2}$ déduit de I et III	$\frac{B}{A^2}$ moyen	B
$x = 1$	— 0,01797	— 0,01800	— 0,01798	— 0,02071
0,6945	— 0,01302	— 0,01319	— 0,01310	— 0,01509
0,5030	— 0,01034	— 0,01005	— 0,01019	— 0,01175
0	KEESOM. Chap. V.			— 0,00654

[1]) Voir chap. I de ces Contributions, p. 359.

2. *Le coefficient du viriel B comme fonction quadratique de la composition moléculaire x.* D'après l'équation d'état de VAN DER WAALS on a $B = RTb_{VDW} - a_{VDW}$, où a_{VDW} et b_{VDW} représentent les grandeurs de VAN DER WAALS, mesurées au moyen du volume normal théorique. En première approximation on a donc, pour le mélage de composition moléculaire x:

$$\underset{x}{\overset{(ClMe.CO^2)}{B}} = \overset{(ClMe)}{B}x^2 + 2\underset{(12)}{\overset{(ClMe.CO^2)}{B}}x(1-x) + \overset{(CO^2)}{B}(1-x)^2.$$

La méthode des moindres carrés nous a donné [1])

$$\overset{(ClMe)}{B_{20^0}} = -0{,}020772$$

$$\underset{(12)}{\overset{(ClMe.CO^2)}{B_{20^0}}} = -0{,}010067$$

$$\overset{(CO^2)}{B_{20^0}} = -0{,}006515.$$

Le bon accord est prouvé par le tableau suivant:

x	B observé	B calculé	$O-C$
1	— 0,02071	— 0,02077	+ 0,00006
0,6945	— 0,01509	— 0,01490	— 0,00019
0,5030	— 0,01175	— 0,01190	+ 0,00016
0	— 0,00654	— 0,00652	— 0,00002

Les écarts sont plus petits que 2 %, donc plus petits aussi que les écarts entre les valeurs individuelles de $\frac{B}{A^2}$.

Par là l'accord avec la formule du 2d degré était suffisamment prouvé, et il n'était plus nécessaire pour le moment de faire, pour les autres mélanges, des mesures n'ayant pas une plus grande précision.

4. *Exactitude de la loi des états correspondants pour le coefficient du viriel B.* D'après la loi des états correspondants, les coefficients du viriel se déduisent des coefficients de l'équation d'état réduite par multiplication par des fonctions de T_k et p_k (voir *Comm.* n°. 71. et ce chapitre, A, les 4 premiers §§.

Les éléments critiques des mélanges d'anhydride carbonique et de

[1]) Les coefficients que nous donnons ici ont été dérivés de valeurs de B qui ne sont pas essentiellement différentes de celles qui sont données dans le tableau I.

chlorure de méthyle ayant été déduits au chap. II [1]) des expériences de M. KUENEN, on peut déterminer B pour une certaine température, p. ex. 20°, en posant

$$B_{20} = \frac{T_k^2}{p_k} \mathfrak{B}_t,$$

où $\mathfrak{B}_t$ est la valeur de la fonction $\mathfrak{B}$ de la température réduite correspondant à $t = \frac{293,01}{T_k}$.

Nous avons pris pour $\mathfrak{B}$ une fonction d'une forme un peu différente de la forme appelée VI. 1, employée dans la première partie (A) de ce chapitre. La forme VI. 1 avait été calculée de façon à s'accorder non seulement avec l'hydrogène, l'oxygène et l'azote, mais encore avec l'éther, tandis que la forme VI. 2 que nous avons employée ici, au lieu d'être calculée de manière à s'accorder avec l'éther, s'accordait de la même façon que VI.1 avec une moyenne entre l'éther et l'isopentane. Cette forme VI. 2 est

$$10^8 . \mathfrak{B} = + 179,883\, t - 374,487 - 181,324 \frac{1}{t} - 110,267 \frac{1}{t^3}.$$

Le degré de correspondance résulte du tableau suivant, où la première colonne contient les valeurs calculées d'après la dernière formule et la seconde celles déduites de la formule du second degré du § 3.

	ét. corr.	form. quadr.	différence
1	— 0,021920	— 0,020772	— 0,001148
$^3/_4$	— 0,016502	— 0,015866	— 0,000636
$^1/_2$	— 0,012179	— 0,011855	— 0,000324
0	— 0,006485	— 0,006515	+ 0,000030.

Les écarts du côté du chlorure de méthyle sont plus grands que ceux résultant des erreurs d'observation et ceux de la formule quadratique. Il s'ensuit que le chlorure de méthyle ne s'accorde pas aussi bien que l'anhydride carbonique avec l'éther et l'isopentane. On arrive au même résultat d'une autre façon encore. Mais on voit en même temps que pour les mélanges les écarts ne sont pas plus grands que pour le chlorure de méthyle lui-même.

[1]) Ces *Archives*, (2), 11, 375, 1906.

5. *Nouvelles approximations.* En faisant intervenir B^2 on trouve en deuxième approximation:

$$\frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} - 1 = \frac{B}{A^2}(p_1 - p_2) - \frac{B^2}{A^4}(p_1 - p_2)(p_1 + 2p_2). \qquad (2)$$

Mais si l'on fait intervenir B^2 il est rationnel de tenir compte aussi de C, et il vient alors:

$$\frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} - 1 = \frac{B}{A^2}(p_1 - p_2) - \frac{B^2}{A^4}(p_1 - p_2)\left\{p_2 + \left(1 - \frac{CA}{B^2}\right)(p_1 + p_2)\right\}. \qquad (3)$$

D'après l'équation d'état réduite, $\frac{CA}{B^2}$ est environ égal à $^1/_5$ pour le chlorure de méthyle à 20°.

En reprenant les calculs du § 2 nous trouvons maintenant:

Tableau III.

Deuxièmes coefficients du viriel pour des mélanges d'anhydride carbonique ($x = 0$) et de chlorure de méthyle ($x = 1$), en 2e et 3e approximation.

appr.	teneur x	$\frac{B}{A^2}$ de I et II	$\frac{B}{A^2}$ de I et III	$\frac{B}{A^2}$ moyen	$B_{20°}$
2e	1	— 0,01698	— 0,01710	— 0,01704	
3e		— 0,01711	— 0,01723	— 0,01717	— 0,01978
2e	0,6945	— 0,01246	— 0,01269	— 0,01258	
3e		— 0,01260	— 0,01282	— 0,01271	— 0,01464
2e	0,5030	— 0,01001	— 0,00976	— 0,00988	
3e		— 0,01009	— 0,00983	— 0,00996	— 0,01147
2e	0 [1]	— 0,00572	— 0,00545	— 0,00558	
3e		— 0,00575	— 0,00547	— 0,00561	— 0,00646

[1]) Ici nous avons calculé suivant (2) et (3) deux déterminations de M. Keesom (chap. V) correspondant à I et II, et I et III.

La reprise des calculs des §§ 3 et 4 avec ces valeurs corrigées donne:

$$B_{20^0}^{(ClMe)} = -0{,}01983$$

$$B_{20^0}^{(ClMe,CO^2)} = -0{,}01005$$

$$B_{20^0}^{(CO^2)} = -0{,}00644.$$

La comparaison des valeurs trouvées avec la formule quadratique et avec la loi des états correspondants (en faisant usage des données critiques de M. Brinkman [1])) donne:

Tableau IV.

Ecarts des seconds coefficients du viriel, pour des mélanges d'anhydride carbonique ($x = 0$) et de chlorure de méthyle ($x = 1$), de la formule quadratique et de la correspondance.

x	B d'après la loi des états corr.	B form. quadr. — B ét. corr.	B observ. — B quadrat.	B observ. — B ét. corr.
1	— 0,02156	+ 0,00173	+ 0,00005	+ 0,00178
0,6945	— 0,01470	+ 0,00027	— 0,00021	— 0,00006
0,5030	— 0,01135	— 0,00029	+ 0,00016	— 0,00013
0	— 0,00650	+ 0,00006	— 0,00002	+ 0,00004

Ces nouvelles approximations n'ont pas apporté de modification dans les conclusions des §§ 3 et 4. Mais il est bien remarquable que maintenant il n'y a d'écart que pour le chlorure de méthyle.

6. *Comparaison des résultats avec ceux de* MM. Leduc *et* Chappuis. La compressibilité du chlorure de méthyle aux petites densités a été examinée par M. Leduc [2]), en collaboration avec M. Sacerdote. Ces

[1]) Brinkman, Diss. Amsterdam 1904.

[2]) Recherches sur les gaz, p. 82.

auteurs n'ont pas communiqué leurs observations, mais ils en ont déduit pour 16° la grandeur suivante:

$$\pi A_\pi = -\pi \frac{1}{pv} \frac{\partial (pv)}{\partial p} \text{ pour } \pi = 73 \text{ cm.}$$

D'après l'équation d'état empirique de M. KAMERLINGH ONNES, on a

$$\left(\frac{1}{pv} \frac{\partial (pv)}{\partial p}\right)_p = -\frac{B}{A^2} + \frac{3\,B^2}{A^4}\left\{1 - \frac{2\,CA}{3\,B^2}\right\} p.$$

Pour passer de notre $\overset{(Cl\,Me.)}{B_{20^0}}$ à $\overset{(Cl\,Me.)}{B_{16^0}}$ nous avons calculé $\overset{(Cl\,Me.)}{\frac{\partial B}{\partial t}}$ d'après la formule donnée au § 4 pour la valeur réduite $\mathfrak{B}$ de B, et nous avons trouvé $\overset{(Cl\,Me.)}{\frac{\partial B}{\partial t}} = 0{,}0001194$, de sorte que $\overset{(Cl\,Me.)}{B_{16^0}} = 0{,}02026$; d'ailleurs $A_{16^0} = 1 + 16\,\alpha_\infty$. Nous déduisons de là

$$\pi A_\pi = 0{,}01814 \text{ (K. O. et Z.)}$$

tandis que M. LEDUC trouva

$$\pi A_\pi = 0{,}0195 \text{ (L.).}$$

L'incertitude de la valeur de $\frac{\partial B}{\partial t}$ ne contribue probablement que fort peu à cette différence.

Il est bien remarquable que, contrairement à ce que nous avons trouvé, la valeur de B déduite des observations de M. LEDUC: $\overset{(Cl\,Me.)}{B_{20^0}} = -0{,}0215$, s'accorde parfaitement avec celle déduite de la loi des états correspondants: $-0{,}0216$.

Des mesures relatives à la compressibilité de CO^2 ont été faites par M. CHAPPUIS [1]) à 20°. Il trouva (comme moyenne de quelques déterminations à des pressions sensiblement les mêmes):

I	$p = 1260{,}670$ mm.	$pv = 1312485$
II	1117,228 „	1313826
III	992,911 „	1314981.

En troisième approximation on déduit de

[1]) Trav. et Mém. du Bureau Intern. des Poids et Mesures, t. 13, 1903.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I et II:} & \dfrac{B_{20^0}^{(CO^2)}}{A_{20^0}^{2}} = & -0{,}005309 \\ \text{II et III} & \quad ,, & -0{,}005282 \\ \text{I et III} & \quad ,, & -0{,}005297 \end{array}\right\} \text{moy. admise} \quad 0{,}005296,$$

d'où $B_{20^0}^{(CO^2)} = -0{,}006100$. M. Keesom trouva $B_{20^0}^{(CO^2)} = -0{,}00646$

Des observations de M. Leduc M. Keesom déduisit $B_{20^0}^{(CO^2)} = 0{,}0059$.

II. Conditions de coexistence à basse température.

7. *Détermination de la pression initiale de condensation à — 25°.* La détermination de la pression initiale de condensation à — 25°, mentionnée dans l'introduction et servant de contrôle aux résultats obtenus à l'aide de la surface ψ, eut lieu au moyen d'un mélange dont la teneur en chlorure de méthyle était $x = 0{,}5042$.

Le dépôt sur le miroir de l'appareil de rosée (voir § 1 et B, § 4) se montrait à une pression de 157,4 cm. de mercure et disparaissait à 154,6 cm. Comme moyenne nous pouvons prendre 156,0 cm., et la précision peut être considérée comme étant de 1 %.

8. *Détermination de la pression finale de la condensation.* Au moyen du petit piézomètre (B, § 5) nous avons déterminé en premier lieu la pression de condensation (tension de vapeur) du chlorure de méthyle pur. A — 25° nous avons trouvé 72,9 cm. lorsque le piézomètre était rempli jusqu'au capillaire, 72,8 cm. lorsque le liquide était presque complètement évaporé. Dans les deux cas nous avons agité dans le piézomètre. La bonne correspondance de ces valeurs est un gage de la pureté du chlorure de méthyle. A — 37°,4 nous avons trouvé 42,7 cm. pour la tension de vapeur.

Pour pouvoir déterminer la pression finale de condensation pour le mélange $x = 0{,}5042$, la température du piézomètre à dû être abaissée jusqu'à — 38°,5; à des températures plus élevées il se produisait une condensation en d'autres endroits de l'appareil (voir § 5 de la deuxième partie; remarquons d'ailleurs qu'il n'y avait pas d'installation pour chauffer le tube de compression ou le capillaire au-dessus de la température ordinaire). Pour la détermination des conditions de coexistence (voir le § 5 susnommé) nous avons besoin: en premier lieu de la pres-

sion finale observée, pour laquelle nous avons trouvé 6,13 atm. Puis du volume V_v de la vapeur de composition x_{vTp}. Cette vapeur occupait un volume de 0,188 cm³. sous une pression de 6,13 atm. à — 38°,5. Enfin du volume V que les phases vapeur et liquide occupent ensemble dans des conditions normales; en laissant la substance se détendre dans le voluménomètre nous avons trouvé 317,7 cm³. à 20° et 760 mm. (les réductions étant faites conformément aux lois de MARIOTTE et de GAY-LUSSAC). La composition x_{vTp} a été trouvée à l'aide de la formule hyperbolique de VAN DER WAALS, qui donne $x_{vpT} = 0{,}0375$. Il résulte de ces données (voir le § 5 susnommé):

$$x_{lpT} = 0{,}5084, \qquad p_{lxT} = 6{,}13, \qquad t = -38°{,}5.$$

Les circonstances n'étaient pas favorables à une détermination exacte de la correction. Mais elle est si faible que l'on peut admettre, en toute sécurité, que cette composition x_{lpT} est exacte à 1 % près.

9. *Comparaison des conditions de coexistence avec la théorie.* Pour faire cette comparaison nous devons connaître en premier lieu la tension de vapeur du chlorure de méthyle et de l'anhydride carbonique à — 25° et à — 38°,5. A moyen de la valeur trouvée par M. HARTMAN (3,18 atm. à 9°,5) [1]) et des deux valeurs que nous avons trouvées nous-mêmes (§ 8), nous avons déterminé, pour le chlorure de méthyle, les coefficients de la formule de DUPRÉ et RANKINE: $\log p = A - \frac{B}{T} - C \log T$. Une extrapolation jusqu'à — 38°,5 donne 0,53 atm. Pour l'anhydride carbonique il résulte des observations de M. KUENEN qu'à — 25° $p_{max} = 16{,}5$ atm., et à — 38°,5 $p_{max} = 10{,}4$ atm.

Notre modèle pour — 25° (voir première partie) donne pour le chlorure de méthyle à — 25° $p_{max} = 0{,}59$ atm. et pour l'anhydride carbonique $p_{max} = 16$ atm. (au lieu de 0,96 et 16,5). D'après ce modèle la pression au commencement de la condensation du mélange $x = 0{,}5084$ est de 1,30 atm., au lieu de 2,05 atm. comme l'a fourni l'observation.

Le manque d'accord du côté du chlorure de méthyle prouve encore une fois que pour le chlorure de méthyle et l'éther la similitude nécessaire pour l'application de la loi des états correspondants laisse beaucoup à désirer.

[1]) Voir chap. III des Contributions à la connaissance de la surface ψ.

Pour pouvoir juger du degré dont les mélanges s'écartent de cette loi, nous devons d'abord nous affranchir autant que possible des écarts présentés par les composantes elles-mêmes. C'est ce que nous avons tâché de faire en relevant de 0,4 atm. tout le diagramme p_x des lignes limites. On trouve alors pour le chlorure de méthyle $p_{max} = 0,99$ atm., pour l'anhydride carbonique $p_{max} = 16,4$ atm. et pour le mélange considéré $p_{max} = 1,7$ atm. Une partie de la différence restante avec la valeur observée $p_{max} = 2,05$ atm. doit certainement être attribuée au fait que la surface n'avait pas encore été construite avec un soin suffisant pour permettre d'établir avec une certitude suffisante, par le roulement d'une plaque de verre sur la crête et sur la portion convexe, la situation des points de contact. On devrait calculer un nombre de points plus grand pour rendre le modèle suffisamment précis pour une détermination exacte.

Cette incertitude dans le roulement fait qu'il est permis de douter qu'un modèle parfait, construit conformément à la loi des états correspondants, donnât une ligne droite pour la branche liquide de la ligne limite dans le diagramme p, x, comme on le déduit de notre modèle. Nous avons reçu l'impression que nous aurions dû trouver aussi une courbe présentant le même caractère que celle que M. Hartman a déduite de ses expériences et de son modèle; mais notre modèle (voir première partie) ne nous fournissait pas assez de données pour établir l'écart de la ligne droite, de sorte que nous avons admis la rectilinéarité comme approximation la plus simple.

Ainsi que nous l'avons dit, avec notre appareil et avec le mélange examiné nous n'avons pas pu prouver expérimentalement que la branche liquide de la ligne limite dans le diagramme p, x à $-25°$ n'est pas une ligne droite. Mais les mesures à $-38°,5$ prouvent de façon certaine que la ligne en question n'est pas une droite à $-38°,5$; elles prouvent que pour la plus grande partie elle tourne sa convexité vers l'axe des x. Suivant la ligne droite p_{lx} serait de 5,38 atm. pour $x = 0,5084$, au lieu de la valeur trouvée de 6,13 atm. Cette différence est beaucoup trop grande pour pouvoir trouver son explication dans des erreurs d'observation ou faites sur la valeur de la composition. Il n'y a donc pas à douter que la branche liquide ne soit courbée dans le même sens à $-25°$. Le fait que la pression au commencement de la condensation, à cette température, ne s'accorde pas avec la formule

[1]) *Phil. Mag.*, janvier 1902.

hyperbolique pour la teneur (VAN DER WAALS, Cont. II, 154) est d'accord avec un tel écart. En effet, d'après cette formule, cette pression serait de 1,78 atm. au lieu de 2,05 atm., comme nous l'avons trouvé plus haut (§ 6).

Il résulte de tout ceci que *les conditions de coexistence indiquent*, pour les isothermes des mélanges de chlorure de méthyle et d'anhydride carbonique, *des écarts de la loi des états correspondants* qui deviennent très sensibles *aux densités liquides et à basse température.*

La comparaison des conditions de coexistence, déduites de la loi des états correspondants à l'aide de la surface ⊥, avec les conditions réellement observées, constitue une *méthode indirecte* pour juger des écarts présentés à cette loi par les isothermes des mélanges. C'était notre but de donner un exemple de l'application de cette méthode à basse température.

Pour établir la grandeur exacte de ces écarts de nouvelles mesures seront nécessaires, et il faudra commencer par construire une surface ⊥, pour la température d'observation, avec plus de soin que cela n'a été fait dans la première partie (A), pour donner une illustration préliminaire et en vue de pouvoir apporter des corrections.

LA DISTRIBUTION VARIABLE DE LA LUMIÈRE DANS LES BANDES DE DISPERSION ET SA SIGNIFICATION POUR LA SPECTROSCOPIE ET L'ASTROPHYSIQUE,

PAR

W. H. JULIUS. [1])

En spectroscopie expérimentale, aussi bien que dans l'application de ses résultats aux problèmes d'astrophysique, on a l'habitude de tirer, de l'aspect et des changements que présentent les lignes spectrales, des conclusions relatives à la température, la densité, la pression et le mouvement des gaz dans la source lumineuse ou dans son voisinage. Dans plus d'un cas on doit arriver à des conclusions complètement fausses, si l'on cherche la cause des raies sombres uniquement dans une absorption, et celle des raies lumineuses exclusivement dans une émission sélective, sans tenir compte du fait que la distribution de la lumière dans le spectre dépend aussi de la dispersion anomale des rayons dans le milieu absorbant.

Ce n'est pas seulement dans des cas exceptionnels que cette influence se fait sentir. On sait déjà que les vapeurs de plusieurs métaux font subir la dispersion anomale aux radiations voisines d'un certain nombre de leurs raies d'absorption [2]). Dans tous ces cas l'aspect des raies d'absorption doit être plus ou moins modifié par l'influence susmentionnée, puisque jamais la masse de vapeur traversée par la lumière n'est homogène. Il est donc nécessaire d'examiner séparément l'effet de

---

[1]) Traduit de *Astrophysical Journal*, Vol. XXV, p. 95.

[2]) Après MM. Wood, Lummer et Pringsheim, et Ebert, c'est surtout M. Pucciani qui a étudié la dispersion anomale de diverses vapeurs métalliques. Dans *Nuovo Cimento*, (5), 9, 303, 1905, M. Pucciani décrit plus de cent raies présentant le phénomène.

la dispersion sur les raies spectrales; on doit tâcher de l'isoler complètement des phénomènes d'émission et d'absorption purs.

Les expériences à l'aide d'une longue flamme de sodium, que j'ai décrites antérieurement [1], et dans lesquelles un rayon de lumière blanche traversait alternativement la flamme suivant des voies différentes, constituaient une première tentative dans cette direction. Dans ces déplacements relatifs du rayon et de la flamme, les rayons de la lumière anomalement dispersée se courbaient beaucoup plus que les autres rayons du spectre, par suite de la distribution inégale de la vapeur de sodium; les changements dans l'absorption et l'émission étaient relativement faibles. Il en résultait que, dans le voisinage de D_1 et D_2, la distribution de la lumière pouvait être rendue fortement asymétrique, et cette asymétrie pouvait être aisément expliquée, dans tous les détails, comme résultat de la courbure des rayons. L'existence de „bandes de dispersion" était ainsi prouvée de façon incontestable.

Mais, dans ces expériences, le simple effet de l'émission et de l'absorption n'était pas absolument constant, et il n'était possible que de faire des conjectures au sujet de la densité de la vapeur de sodium dans les diverses parties de la flamme. De plus, le tourbillonnement que présentaient les gaz chauds en s'élevant avait pour conséquence que les rayons, même ceux qui ne subissaient pas la dispersion anomale, s'écartaient sensiblement d'une ligne droite; les phénomènes étaient donc trop compliqués et trop changeants pour permettre de séparer nettement les effets de la dispersion de ceux produits par l'émission et par l'absorption. Voilà pourquoi j'ai tâché d'obtenir une masse de vapeur aussi homogène que possible et, en outre, de construire un appareil qui permettrait de produire à volonté, dans cette vapeur, des différences locales de densité, de telle sorte que la densité moyenne ne fût pas sensiblement modifiée. Alors le pouvoir absorbant pourrait être regardé comme constant. Il était recommandable, en même temps, d'examiner la vapeur à une température relativement basse, afin de n'avoir pas à tenir compte du spectre d'émission.

Dans une série de belles recherches sur le pouvoir réfringent et la fluorescence de la vapeur de sodium, M. R. W. Wood laissait se développer la vapeur dans un tube à vide, chauffé par l'électricité. Il

[1]) Ces *Archives*, (2), 10, 90, 1905.

[2]) *Phil. Mag.*, (6), 3, 128; 6, 362, 1903.

reconnut la possibilité de maintenir parfaitement constante la densité de la vapeur, en réglant convenablement le courant. Profitant de cette expérience, j'ai réalisé le dispositif suivant pour l'étude des bandes de dispersion.

L'appareil.

NN' (fig. 1) est un tube en nickel de 60 cm. de longueur sur 5.5 cm. de diamètre et 0,07 cm. d'épaisseur. Sa partie moyenne, longue de 30 cm., est placée à l'intérieur d'un fourneau électrique de Heraeus

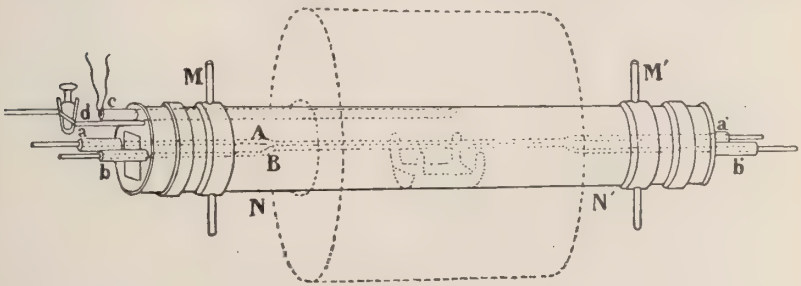


Fig. 1.

(modèle E_3). Ses extrémités portent des couvercles, dont les bords s'adaptent dans deux gouttières circulaires, soudées au tube; le tube est donc parfaitement étanche quand les gouttières sont remplies d'un mastic. En même temps que le fourneau est mis en action, un courant d'eau traversant les deux manchons *M* et *M'* refroidit les extrémités du tube. Chacun des deux couvercles porte une fenêtre à glace rectangulaire, et est percé, de part et d'autre de celle-ci, de deux ouvertures (*a* et *b*, *b'* et *a'*, fig. 1), diamétralement opposées l'une à l'autre et munies de petits tubes en laiton, dont on comprendra tantôt l'utilité. En outre, l'un des deux couvercles (voir aussi fig. 2) porte encore deux autres bouts de tube *c* et *d*; dans le tube *c* est mastiqué le tube en porcelaine d'un pyromètre de Le Chatelier, et dans *d* un robinet en verre avec obturation au mercure, conduisant à un manomètre et à une machine pneumatique de Geryk. Dès que le sodium (un morceau d'en-

viron 7 grammes, nettoyé avec soin) eût été introduit jusqu'au milieu du tube, au moyen d'une petite nacelle en nickel pourvue d'anneaux élastiques, le tube fut fermé et évacué.

Je vais décrire maintenant le dispositif qui permit de produire à volonté des inégalités dans la distribution de la densité au sein de la masse de vapeur. Il consiste en deux tubes de nickel *A* et *B*, de 0,5 cm. de diamètre, allant de *a* à *a'* et de *b* à *b'*; ces tubes sont courbés de telle façon que dans la partie moyenne, chauffée, du large tube ils sont parallèles sur une longueur de 30 cm., et distants de 0,8 cm. seulement. Ces tubes *A* et *B* sont fixés dans les quatre ouvertures des couvercles au moyen de caoutchouc. Tout en garantissant l'étanchéité, cette manière de fixer les tubes aux couvercles a l'avantage de leur laisser quelque liberté, de sorte qu'une différence de température entre le tube large et les tubes étroits n'entraîne pas de déformation de ces derniers par suite de tensions. De plus les bouchons de caoutchouc servent d'isolant électrique entre *A* et *B* d'une part et *NN'* d'autre part. Les quatre bouts des tubes étroits, qui sortent des couvercles, sont refroidis par des manchons où circule de l'eau (ces manchons ne sont pas représentés sur la figure).

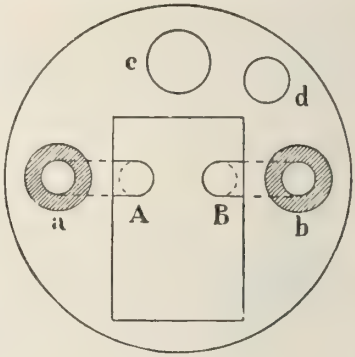


Fig. 2.

Dès qu'un courant électrique est lancé à travers *A* ou *B*, la température du tube s'élève un peu au-dessus de celle de son entourage; si on y lance un courant d'air, la température devient au contraire un peu plus basse. Dans l'un et l'autre cas, les intensités des courants, donc aussi les différences de température, peuvent être aisément réglées et maintenues longtemps constantes.

La fig. 3 est une esquisse du dispositif complet. La lumière du charbon positif *L* est concentrée, par la lentille *E*, sur un écran *Q*, muni d'une ouverture en forme de fente, dont la largeur peut être réglée. La lentille *F* forme une image nette du diaphragme *P* dans le plan de la fente *S* du spectrographe. L'axe optique des deux lentilles passe par le milieu du tube contenant la vapeur de sodium, exactement entre les deux tubes étroits *A* et *B*.

Si l'ouverture du diaphragme P a la forme d'une fente verticale étroite, et si son image tombe exactement sur la fente du spectrographe, on observe le spectre continu de l'arc avec grande clarté. Aussi longtemps que le tube NN' n'est pas chauffé, les raies D_1 et D_2 s'observent comme de petits traits noirs extrêmement fins; elles sont produites par une absorption due au sodium qui existe toujours dans le voisinage des charbons. Pour que ce phénomène fût toujours présent dans le champ du spectrographe, afin qu'on pût s'en servir comme spectre de comparaison, même quand le tube serait chauffé, j'ai placé un petit prisme à réflexion totale devant une partie de la fente; une partie du faisceau de lumière principal y était conduit par une simple combinaison de lentilles et de miroirs, sans passer par le fourneau électrique. Aussi peut-on voir le spectre de la source, non modifié, sur chacune des photographies qui furent prises.

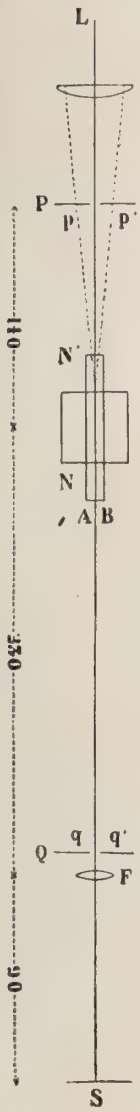


Fig. 3.

L'appareil spectral dont je me suis servi consistait en un réseau de diffraction plan de 10 cm. de diamètre (la surface striée était de 8 cm. sur 5), avec 14,436 traits par pouce, et deux miroirs argentés de Zeiss; le miroir collimateur avait une distance focale de 150 cm., l'autre de 250 cm. La plupart des observations ont été faites dans le spectre du second ordre.

Quand je chauffais le sodium pour la première fois, il s'en échappait une assez grande quantité de gaz (de l'hydrogène suivant M. Wood), qui fut évidemment enlevée à la pompe. Quand l'appareil eut servi deux ou trois fois, la pression dans le tube resta inférieure, pendant des semaines, à 1 mm. de mercure; il en fut de même pendant le chauffage. Dans les expériences que je vais décrire, je ne dépassai jamais 450°. Au bout de peu de temps, la paroi intérieure de NN' et les tubes étroits A et B se recouvrent d'une couche de sodium condensé, qui favorise l'homogénéité de la vapeur dans les chauffages suivants. Il est bien remarquable

qu'il ne se condensait que rarement du sodium dans les parties du tube sortant du fourneau, de sorte que les fenêtres restèrent parfaitement transparentes. La densité de la vapeur saturante de sodium a été déterminée expérimentalement par M. F. B. Jewett [1], entre 368° et 420°; cet auteur donne le tableau suivant:

Température	Densité	Température	Densité
368°	0,00000009	395°	0,00000270
373	0,00000020	400	0,00000350
376	0,00000035	406	0,00000480
380	0,00000043	408	0,00000543
385	0,00000103	412	0,00000590
387	0,00000135	418	0,00000714
390	0,00000160	420	0,00000750

Ces densités sont du même ordre de grandeur que celle de la vapeur de mercure entre 70° et 120°. A 387° la densité de la vapeur saturante de sodium est à peu près un millième de celle de l'air atmosphérique à 0° et 76 cm.

Les observations.

Si nous réglons maintenant l'intensité du courant dans le fourneau de telle sorte que le couple thermo-électrique indique une température constante (390° dans mainte expérience), la densité de la vapeur n'est pas partout la même dans le tube, car la température diminue à partir du milieu vers les extrémités; mais, comme pratiquement les surfaces d'égale température sont perpendiculaires au rayon de lumière, tous les rayons traversent la vapeur à peu près en ligne droite. Il s'ensuit que le spectre n'est pas notablement modifié; les deux raies *D* sont devenues un peu plus fortes, ce que nous attribuerons provisoirement à l'absorption de la vapeur de sodium dans le tube.

Je fais passer maintenant un faible courant d'air dans le tube *A*; ce

[1] „A New Method of Determining the Vapor-Density of Metallic Vapors, and an Experimental Application to the Cases of Sodium and Mercury", *Phil. Mag.*, (6), 4, 546, 1902.

tube est donc légèrement refroidi, de sorte que le sodium s'y condense et que la densité de vapeur diminue dans son voisinage. Nous voyons bientôt les raies du sodium s'élargir considérablement. Il est impossible que cela soit la conséquence d'une augmentation d'absorption, puisque la densité de vapeur moyenne a diminué un peu. La raison en est que les rayons de lumière à très grand indice de réfraction sont maintenant courbés vers q' (fig. 3), tandis que les rayons à petit indice sont courbés vers q; il en résulte que dans l'image de la fente P formée sur S les rayons appartenant aux régions situées de part et d'autre des raies D font défaut; mais cette image reste néanmoins parfaitement nette, puisque la marche de tous les autres rayons du spectre n'a pas été sensiblement modifiée. Si nous chauffons en même temps le tube B par un courant électrique, mettons de 20 ampères, qui augmente la chute de densité dans l'espace entre les tubes, la largeur des raies s'accroît encore visiblement. La chaleur engendrée dans le tube par le courant est d'environ 1 calorie par seconde; elle est toutefois conduite, pour la plus grande partie, vers les extrémités refroidies du tube, de sorte que l'élévation de température est nécessairement faible.

Il suffisait de renverser un commutateur et de tourner un robinet pour intervertir les rôles des tubes A et B, de sorte que A était chauffé et B refroidi. On voyait alors les bandes sombres se rétrécir, se transformer en des raies D fines et puis se dilater de nouveau jusqu'à ce qu'elles avaient repris leur largeur primitive, au bout de quelques minutes.

Au moment de la transition les raies ne sont fines et nettes que si la température du fourneau est fort constante. Si cette température s'élève ou s'abaisse, l'épaisseur minima n'est pas aussi faible. Or, dans ce cas, il existe certainement, dans la masse de vapeur, des courants qui produisent une irrégularité dans la distribution de la densité. Si donc on voit parfois les raies du sodium s'élargir faiblement, bien que A et B soient à la même température, il faut l'attribuer aussi à une réfraction dans ces irrégularités accidentelles.

La largeur que présentent certaines raies spectrales est communément attribuée soit au mouvement (dans la ligne de visée) des molécules qui émettent et absorbent la lumière, soit à des changements dans la période de vibration des électrons pendant les collisions des molécules. Nous trouvons ici une troisième cause, la dispersion anomale dans le milieu absorbant. Toute la série des phénomènes observés dans le tube à sodium confirme l'idée, que dans plus d'un cas cette dernière cause

doit être regardée comme de beaucoup la plus importante. Nous verrons que cette conclusion ne s'applique pas seulement à des raies spectrales sombres, mais aussi à des raies lumineuses.

Si la fente du diaphragme P est rendue beaucoup plus large du côté de p', cela n'a aucune influence sur le spectre, aussi longtemps que A et B sont à la température ambiante. Les raies D paraissent fines, comme en α (Pl. XVII). Si l'on refroidit maintenant A au-dessous de cette température, et que l'on élève celle de B, les raies sombres D ne s'élargissent que dans le sens des petites longueurs d'onde tandis que du côté des grandes longueurs d'onde l'intensité de la lumière est même augmentée. En effet, le manque de ces longues ondes, que nous avons constaté dans le cas de la fente *mince* en P, est maintenant plus que compensé par les rayons anormalement recourbés, provenant du large champ rayonnant p' et atteignant S par la fente Q. L'apparence qui en résulte est montrée en β sur la planche.

Le spectre β passe à l'état β' lorsque la différence de température entre A et B change de signe, ou bien si, la différence de température primitive étant conservée, la fente en P est fortement élargie du côté de p par rapport au côté de p'; en effet, dans l'un et l'autre cas, les rayons de longueur d'onde plus grande que D_1 et D_2 et ceux de longueur d'onde plus petite ne font que permuter leurs rôles.

Un léger déplacement du diaphragme P dans la direction de p' (en partant des conditions remplies dans le cas de l'épreuve β) amène l'image de l'écran p sur la fente S, et empêche ainsi la lumière qui n'est pas anomalement dispersée d'atteindre S. Ceci fait apparaître le spectre γ, qui donne l'impression d'un spectre d'émission du sodium, dont les raies sont faiblement déplacées, bien que en réalité cette apparence soit due à des rayons du champ p' qui ont subi la dispersion anomale dans la vapeur.

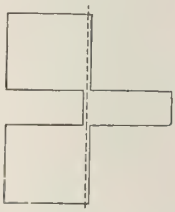


Fig. 4.

De la même façon le pseudo-spectre d'emission γ' a été obtenu en déplaçant tant soit peu le diaphragme, à partir des conditions qui fournissent β'.

Les cas β et β' peuvent être combinés en faisant usage d'un diaphragme P avec une ouverture de la forme donnée fig. 4. Si la fente S occupe la position de la ligne pointillée dans l'image de cette ouverture, nous obtenons, A étant refroidi, les circonstances β dans les portions supérieure et inférieure du spectre, et les circonstances β' dans la

portion moyenne. On peut se figurer aisément le résultat de la combinaison des spectres β et β'; je ne l'ai donc pas reproduit. Mais il n'est pas sans intérêt de faire remarquer l'aspect que prend la même combinaison, quand la variation de la densité est bien plus faible qu'elle ne l'était dans les cas β et β'; on obtient alors δ et, par renversement du sens de la variation de densité, δ'. Il est évident que le déplacement des raies, produit ici, n'a aucun rapport avec le principe de Doppler. Les deux photographies δ et δ' prouvent du reste que même ces raies étroites sont dues presque entièrement à une dispersion anomale, et non à une absorption; en effet, la véritable raie d'absorption, droite, doit être commune aux trois sections, et nous voyons qu'il y a à peine place pour elle.

(Sur quelques-unes des photographies on voit un petit nombre de lignes brillantes étroites; ce sont des raies d'émission de l'arc, appartenant à l'extrême violet du spectre du troisième ordre, et n'ont rien à voir dans le phénomène qui nous occupe. La raie qui est un peu à la droite de D_1, par exemple, est probablement la raie du calcium λ 3933,83, car $3933{,}83 \times {}^3/_2 = 5900{,}74$).

Revenons maintenant au diaphragme P avec une fente étroite placée sur l'axe optique. (Je me suis servi généralement d'un morceau de verre recouvert d'une feuille d'étain, dans laquelle j'avais coupé une fente). Le spectre présente alors de larges bandes, dès que la chute de densité entre A et B est suffisamment grande. Si l'on pratique une ouverture dans la feuille d'étain à côté de la fente, il y a tout un groupe de rayons de réfractivités déterminées (donc aussi de longueurs d'onde déterminées) qui ont l'occasion d'atteindre Q par S, et l'on voit apparaître dans la bande sombre une tache claire, dont la forme dépend de la forme de l'ouverture dans la feuille d'étain, mais n'est pas identique avec elle. Ainsi par exemple le spectre ε montre l'effet d'une série d'ouvertures rectangulaires dans les écrans p et p'.

La loi qui établit la relation entre la forme des plages lumineuses dans les bandes de dispersion et la forme des ouvertures dans l'écran n'est pas des plus simples, puisqu'elle dépend de la forme des surfaces d'égale densité dans l'espace compris entre les tubes A et B. On peut se faire quelque idée de cette relation en simplifiant le problème par l'hypothèse que ces surfaces sont des plans parallèles, perpendiculaires au plan contenant les axes de A et B. Supposons que ce dernier plan coupe la fente P au point O et la fente S en O'. Nous prendrons O pour origine

d'un système de coordonnées rectangulaires x (axe horizontal) et y (vertical), déterminant la situation des points dans les plans des écrans p et p'. Les points de l'image sur S seront déterminés par x' et y' par rapport à O'.

Pratiquons un trou d'épingle xy dans p'. La lumière qui vient de ce point sera concentrée par la lentille F en un point $x'y'$ à côté de la fente S, à condition qu'elle n'ait pas été déviée par la vapeur de sodium. Elle n'entre pas dans le spectrographe. Mais les rayons subissant la dispersion anomale seront étalés à peu près horizontalement; la lentille F les réunit en une série continue de points ayant à peu près le même y, mais des valeurs différentes de x'. Seuls les rayons pour lesquels $x' = 0$ entrent dans le spectrographe. Si nous appelons O'' le milieu d'une des raies du sodium dans le spectre, les coordonnées de la tache lumineuse, produite dans la bande de dispersion sombre par le rayon qui est entré, seront y'' (proportionnel à y') et z, l'abscisse z dépendant de la longueur d'onde λ de ce rayon.

La relation entre cette longueur d'onde et l'abcisse x du trou est donnée par la courbe de dispersion de la vapeur de sodium. En effet, il est facile de prouver que x est proportionnel à $n - 1$, le coefficient ne dépendant que des dimensions linéaires de l'appareil et de la chute de densité de la vapeur [1]). Ainsi, pour une valeur donnée de x, n peut être calculé; la valeur correspondante de λ est déduite de la courbe de dispersion, et nous avons dans le spectre $z = \lambda - \lambda_D$. L'ordonnée y'' est déduite de y par la seule introduction des distances focales. Nous aurons donc exprimé ainsi les coordonnées de la tache lumineuse dans la bande sombre en fonction des coordonnées du trou d'épingle.

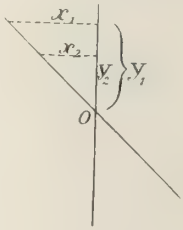


Fig. 5.

L'exemple suivant servira à bien faire comprendre, sans calculs, la relation qui existe entre des figures correspondantes dans le plan P et dans le spectre.

Au lieu du trou d'épingle je pratique dans le diaphragme une seconde fente rectiligne, coupant la première obliquement en O (fig. 5). Toutes les valeurs positives et négatives de x, donc aussi de $n - 1$, sont représentées, chacune d'elles

[1]) Il résulte immédiatement des équations (1) et (2) aux pages 471 et 472 que

$$x = a l R \frac{d\Delta}{ds} = a l \frac{d\Delta}{ds} \cdot \frac{1}{\Delta} (n - 1).$$

correspondant à une valeur particulière de y, à laquelle elle est proportionnelle:

$$y_1 : y_2 = x_1 : x_2 = (n_1 - 1) : (n_2 - 1).$$

Comme les ordonnées y'' dans le spectre sont proportionnelles à n, nous avons également:

$$y_1'' : y''_2 = (n_1 - 1) : (n_2 - 1).$$

En même temps:

$$z_1 : z_2 = (\lambda_1 - \lambda_D) : (\lambda_2 - \lambda_D).$$

La courbe lumineuse dans le spectre est donc la courbe de dispersion elle-même; le point $n = 1$, $\lambda = \lambda_D$ est pris comme origine des coordonnées.

Le spectre ζ_1 de la planche XVII représente ce cas. Il a été obtenu en employant un diaphragme avec une ouverture de la forme donnée par la fig. 6. La fente oblique s'élargissait vers les extrémités, afin d'augmenter la clarté des branches ascendante et descendante de la courbe. Si l'on diminue le courant électrique et le courant d'air à travers les tubes, la figure se réduit à ζ_2; si ces courants cessent, on retrouve α; un renversement de la chute de densité conduit à ζ_4 en passant par ζ_3.

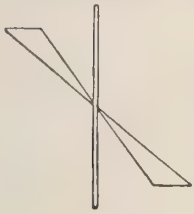


Fig. 6.

Ayant ainsi trouvé expérimentalement la relation entre les deux figures dans un cas simple, il n'est pas difficile de dessiner la forme que l'on doit donner à l'ouverture du diaphragme pour obtenir une distribution voulue de la lumière. C'est ainsi que la fleur η exige un diaphragme représenté par la fig. 7; par renversement l'image η se transforme en η'.

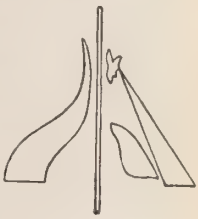


Fig. 7.

Nous possédons donc le moyen de réaliser à volonté toutes les formes dans lesquelles se présentent des raies spectrales lumineuses ou obscures; renforcement, étalement, renversement, déplacement, dédoublement, ramification; et il semble qu'il soit possible de reproduire fidèlement tous les phénomènes observés à ce propos dans les spectres des taches solaires, des facules, des flocons et des protubérances. J'ai réuni sur la planche XVIII un certain nombre de distributions arbitraires de la lumière. Toutes ont été produites par de la vapeur de de sodium de 390° en moyenne. Dans δ on voit sur la bande de disper-

sion D_2 une double raie claire, rappelant le spectre des flocons de calcium décrit par M. HALE. Dans le même négatif D_1 montre aussi une fine raie double, qui est malheureusement invisible sur la reproduction. Le spectre ι ressemble assez bien à celui d'une protubérance, pris à l'aide d'une fente tangentielle; $\varkappa$ rappelle certains spectres d'étoiles; etc. Les photographies π, ρ, σ imitent le développement du spectre d'une protubérance et d'une tache solaire; π représente le spectre du bord tranquille du soleil, avec une fente radiale; en ρ on voit apparaître une protubérance et une tache avec des phénomènes de renversement; σ fait voir tout ceci à un degré plus fort. Si l'on vient à faire changer le signe de la chute de densité, l'image commence par se réduire de nouveau à π, puis elle s'étend jusqu'à donner τ, qui est à un certain point de vue l'inverse de σ.

Le spectacle frappant de ces phénomènes, dont il est possible de contrôler parfaitement les changements graduels, n'est reproduit que médiocrement par les photographies.

La planche XIX reproduit à une échelle un peu plus grande quelques photographies faites dans le troisième spectre, avec de la vapeur de sodium de 320° seulement. La densité de la vapeur saturante à cette température est inconnue. Si l'on prolonge au-delà des observations la courbe température-densité trouvée par M. JEWETT, de telle façon qu'elle reste en harmonie avec la forme de la courbe mieux connue du mercure, on trouve qu'à 320° la densité est probablement inférieure à 0,00000003. La chute de densité produite par l'échauffement ou le refroidissement des tubes aura donc eu, dans ces expériences, l'ordre de grandeur 0,00000001. Le diaphragme que j'ai employé était le même que celui qui servit aux épreuves δ et δ'. En photographiant υ et ϕ, la fente S occupait la position de la ligne pointillée dans l'image de l'ouverture, fig. 4; pour χ la fente était un peu à gauche, pour ψ et ω quelque peu à droite [1]). On voit d'après ces photographies [2]) que les véritables raies d'absorption de la vapeur de sodium doivent avoir été excessivement étroites; il est même douteux qu'elles puissent être distinguées, et la distribution de lumière paraît être régie totalement par la dispersion anomale.

---

[1]) J'ai réussi récemment à obtenir des phénomènes semblables avec les raies du strontium et du calcium.

[2]) Mon assistant, M. F. L. BERGANSIUS, m'a rendu de grands services en rendant ces photographies bonnes pour être reproduites.

La relation entre la courbure des rayons et la chute de densité.

La question se pose maintenant de savoir s'il est *probable* que des circonstances ressemblant un peu à celles réalisées dans nos expériences se rencontrent également dans la nature, ou dans les recherches spectroscopiques ordinaires, entreprises dans un but complètement différent.

Nous remarquons en premier lieu que des diaphragmes à ouverture de forme singulière ne sont pas absolument nécessaires pour la production de phénomènes tels que ceux qui viennent d'être décrits. Si, par exemple, notre source de lumière avait eu une forme invariable, mettons circulaire; si, d'autre part, la direction et la grandeur de la chute de densité dans notre tube n'avaient pas été aussi régulières, mais fort différentes d'un endroit à un autre du champ reproduit par la lentille F, les raies D auraient également montré toutes espèces d'excroissances, alors déterminées par le mode de répartition des densités plutôt que par la forme du diaphragme.

En second lieu, nous allons tâcher de nous faire une idée des relations quantitatives.

Le rayon de courbure ρ de la trajectoire des rayons les plus fortement déviés, qui se rencontrent dans nos photographies, peut s'évaluer aisément au moyen de la distance a du diaphragme au milieu du fourneau, de la distance x de l'une des ouvertures du diaphragme les plus éloignées à l'axe optique, et de la longueur l de l'espace dans lequel la courbure des rayons est produite. On a en effet:

$$\rho : l = a : x. \tag{1}$$

Posant $x = 1$ cm., $a = 110$ cm., $l = 27$ cm., on trouve $\rho = 3000$ cm. La densité moyenne Δ de la vapeur de sodium était dans ce cas environ un millième de celle de l'air atmosphérique.

Voyons maintenant comment ρ varie avec la chute de densité. Nous avons toujours

$$\rho = \frac{n}{n'},$$

n étant l'indice de réfraction local du milieu pour le rayon considéré et $n' = \frac{dn}{ds}$, c. à d. la variation de cet indice par centimètre, dans la direction du centre de courbure. Or, pour une espèce déterminée de lumière nous avons approximativement:

$$\frac{n-1}{\Delta} = \text{Cte} = R,$$

$$n = R\Delta + 1$$

$$n' = \frac{dn}{ds} = R\frac{d\Delta}{ds}.$$

Il s'ensuit que

$$\rho = \frac{R\Delta + 1}{R\frac{d\Delta}{ds}};$$

mais, comme pour des gaz raréfiés n diffère fort peu de l'unité, même pour les rayons anomalement dispersés que nous considérons ici, $R\Delta$ peut être négligé par rapport à 1 et nous pouvons écrire:

$$\rho = \frac{1}{R\frac{d\Delta}{ds}} \tag{2}$$

Pour chaque espèce de lumière ρ est donc inversement proportionnel à la chute de densité de la vapeur dans une direction perpendiculaire à celle de la propagation.

Nous pouvons arriver de deux manières à une estimation de la grandeur de la chute de densité existant entre A et B dans nos expériences. Elle peut notamment être déduite de la différence de température, ou de la formule (2). Il eût été assez facile de déterminer par voie thermo-électrique la différence de température entre A et B; mais pour le moment je n'ai pas eu l'occasion de préparer le dispositif nécessaire. D'ailleurs, la relation entre la distribution des densités dans l'espace traversé par les rayons et les températures de A et B ne peut pas être très simple, du moment que nous avons affaire, non à deux plans parallèles, mais à deux tubes, d'autant plus qu'à ces tubes sont suspendues plusieurs gouttelettes de sodium liquide.

La seconde méthode nous donne immédiatement une valeur moyenne de $\frac{d\Delta}{ds}$ pour l'espace traversé par les rayons. Elle exige la connaissance

de $R = \frac{n-1}{\Delta}$ pour une espèce de rayons dont nos expériences ont également fourni la valeur de ρ.

Or, M. Wood [1]) a donné un tableau des valeurs de n pour des rayons dans le voisinage immédiat des raies D. Il est vrai que ces données se rapportent à de la vapeur saturante de sodium à 644°, mais nous pouvons en déduire les valeurs de n pour de la vapeur à 390°, à l'aide de la table qu'il donne à la page 317 de son travail.

Car, en chauffant de 389° à 508°, le pouvoir réfringent de la vapeur (mesuré par le nombre de franges d'interférence de la lumière de l'hélium λ 5875 qui traversent le champ) devient $\frac{98}{9} = 11$ fois plus grand, et par un échauffement subséquent de 506° à 644° il s'agrandit encore $\frac{50}{4} = 12{,}5$ fois (cette détermination a été faite par une mesure d'interférence avec de la lumière du mercure $\lambda = 5461$). Ainsi donc, de 390° à 644°, le pouvoir réfringent augmente dans le rapport de 1 à $11 \times 12{,}5$ ou 137.

Comme pour des rayons situés à 0,4 d'unité Ångström des raies D [2]) $n - 1 = \pm 0{,}36$ (moyenne de trois valeurs prises de la table de M. Wood, à la page 319), nous devons avoir, pour de la vapeur de sodium à 390° et pour la même espèce de rayons,

$$n - 1 = \frac{0{,}36}{137} = 0{,}0026.$$

D'après M. Jewett la densité à 390° est $\Delta = 0{,}0000016$, de sorte que

$$R = \frac{n-1}{\Delta} = \frac{0{,}0026}{0{,}0000016} = 1600.$$

---

[1]) *Phil. Mag.*, (6), 8, 319, 1904.

[2]) Dans le spectre ζ_1 de la planche XVII les extrémités des pointes correspondent assez bien à de la lumière de cette longueur d'onde; car elles viennent jusqu'à une distance des raies D qui ne dépasse certainement pas le quinzième de la distance entre les deux raies D, et cette distance est de 6 unités Ångström. Pour ces rayons l'ouverture du diaphragme était distante de 1 cm. de l'axe optique.

Il résulte donc de la formule (2):

$$\frac{d\Delta}{ds} = \frac{1}{Rp} = \frac{1}{1600 \times 3000} = 0{,}0000002.$$

Bandes de dispersion dans les spectres de sources terrestres.

Il est fort probable qu'en évaporant des métaux dans l'arc électrique on trouve dans le voisinage des charbons des valeurs de la chute de densité plus de mille fois plus grandes que la faible chute de densité dans notre tube à vapeur de sodium raréfiée [1]).

Dans ces cas le rayon de courbure sera donc au moins mille fois plus petit que 30 mètres et n'atteindra que quelques millimètres. Alors un court trajet à travers la masse de vapeur suffit pour changer notablement la direction de certains rayons.

Supposons maintenant que l'on projette sur la fente d'un spectroscope l'image des pointes de charbon; cette image n'est pure que pour autant qu'elle soit formée par des rayons qui ont été imperceptiblement réfractés dans l'arc, mais les rayons qui ont subi la dispersion anomale ne contribuent pas à sa formation. De la lumière de cette dernière espèce, venant du cratère, peut faire défaut dans l'image de ce cratère, et, d'un autre côté, pénétrer dans la fente entre les images des deux pointes de charbon. Ainsi donc, dans les observations spectroscopiques ordinaires, un élargissement, non seulement des raies d'absorption, mais encore des raies d'émission, doit souvent être attribué dans une forte mesure à une dispersion anomale.

Si l'on tient compte de cette circonstance, il y a plusieurs phénomènes qui paraissaient mystérieux jusqu'ici et qui trouvent une explication facile. Ainsi par exemple le fait que MM. Liveing et Dewar [2]) observaient un fort élargissement des raies du sodium, chaque fois qu'il y avait un vif dégagement de vapeurs, par l'apport de nouvelles

[1]) Si nous posons par exemple égale à 0,001 la densité de vapeur du métal dans le cratère, où il bout, et la densité de la vapeur à une distance de 1 cm. du cratère égale à 0,00001, nous avons déjà une chute moyenne de densité 5000 fois plus grande que celle qui existait dans nos expériences.

[2]) „On the Reversal of the Lines of Metallic Vapors", *Proc. Roy. Soc.*, 27, 132—136; 28, 367—372, 1878—1879.

quantités de matière, mais les voyaient redevenir plus étroites quand la masse arrivait au repos, bien que la densité de la vapeur ne diminuât pas. Quand la pression était augmentée graduellement par une compression d'azote dans l'espace rempli de vapeurs, les raies restaient nettes, mais elles s'élargissaient quand la pression était subitement relâchée. Tout ceci devient clair dès qu'on voit dans les raies des bandes de dispersion, qui doivent être larges quand la densité de la vapeur absorbante est irrégulière, et fines, même pour une vapeur dense, du moment que cette vapeur est uniformément répartie à travers l'espace.

Voici un autre exemple. D'après les recherches de MM. Kayser et Runge, les raies appartenant à la deuxième série secondaire dans les spectres du magnésium, du calcium, du cadmium, du zinc, du mercure, sont toujours diffuses du côté du rouge et nettement limitées du côté du violet; tandis que des raies appartenant à la première série secondaire ou à d'autres séries sont souvent élargies plus distinctement du côté du violet. A propos du spectre du magnésium ils disent:

„Auffallend ist bei mehreren Linien, die wir nach Roth verbreitert „gefunden haben, dass sie im Rowland'schen Atlas ganz scharf sind. „und dann stets etwas kleinere Wellenlänge haben. So haben wir „4703,33, Rowland 4703.17; wir 5528,75, Rowland 5528,62. „Unschärfe nach Roth verleitet je leicht der Linie grössere Wellenlänge „zuzuschreiben; so gross kann aber der Fehler nicht sein, denn die „Rowland'sche Ablesung liegt ganz ausserhalb des Randes unserer „Linie. Wir wissen daher nicht, woher diese Differenz rührt." [1])

Plus tard M. Kayser [2]) a donné une explication de ce fait, basée sur une combinaison d'un renversement et d'un élargissement asymétrique. Mais, à mon avis, on obtient une solution plus probable du problème en regardant les raies élargies comme constituées en partie par des bandes d'absorption.

Si l'on admet qu'en allant du charbon positif, émettant le plus de lumière, au centre de l'arc, le nombre de particules associées à la seconde série secondaire va en décroissant, il faut que des rayons venant du cratère, dont la longueur d'onde est un peu plus grande que celle des raies en question, soient courbés de manière à tourner leur concavité vers la pointe de charbon. On suppose à tort que l'endroit de leur

---

[1]) Kayser und Runge, Über die Spektren der Elemente, 4, 13.

[2]) Kayser, Handbuch der Spectroskopie, 2, 366.

origine se trouve dans le prolongement de leur direction finale, de sorte qu'ils *semblent* venir de l'arc, et que l'on *croit* voir de la lumière émise par la vapeur, comprenant des longueurs d'onde, toutes plus grandes que la longueur d'onde exacte des raies de la série. D'après nous, au contraire, ces lignes déplacées de la deuxième série secondaire, que l'on observe, ne sont pas de vraies raies d'émission; elles sont comparables aux raies d'émission *apparentes* du spectre γ de la planche XVII; la lumière vient du charbon incandescent.

Dans cette explication j'ai représenté les choses comme si la lumière de ces séries de raies devait être attribuée *exclusivement* à une dispersion anomale. Mais il est probable que dans la majorité des cas l'émission contribuera d'une façon perceptible à la formation de la raie; le bord net doit alors se présenter à l'endroit exact qui correspond à la longueur d'onde particulière.

Comment expliquer maintenant que les raies des autres séries sont diffuses du côté opposé? Il est possible que ceci aussi puisse être considéré comme le résultat d'une dispersion anomale, si nous admettons que pour les centres d'émission de ces autres séries la densité *augmente* quand on s'éloigne de la pointe de charbon positive. Dans ces cas, en effet, les rayons partant du cratère, qui sont concaves du côté de la pointe de charbon et semblent donc venir de l'arc, possèdent une longueur d'onde plus courte que les raies des séries, ce qui fait que les raies des séries semblent élargies du côté du violet. Or, cette hypothèse n'est pas impossible. Car les ions atomiques positifs et négatifs qui, d'après la théorie de M. Stark, sont formés dans l'arc par le choc d'électrons négatifs, se déplacent en de sens opposés sous l'influence du champ électrique; la chute de densité n'aura donc pas le même signe pour les deux espèces. Des séries dont les raies sont diffuses du côté du rouge, et d'autres dont les raies ne sont pas nettement limitées du côté du violet appartiendraient donc, d'après notre manière de voir, à des ions de signes contraires, ou seraient produits par de tels ions, — une conclusion qui, dans tous les cas, mérite d'être examinée de plus près.

Les exemples que je viens de donner suffiront à prouver qu'il est nécessaire d'examiner systématiquement jusqu'à quel point les phénomènes spectraux connus jusqu'ici peuvent être l'effet d'une dispersion anomale. On trouve dans le traité de Kayser, 2, 292—298, 304, 306, 348—351, 359—361, 366, un certain nombre de cas ou le principe

de la courbure des rayons, négligé jusqu'ici, constituait sans aucun doute la base du phénomène.

Bandes de dispersion dans les spectres des corps célestes.

Puisqu'il est possible d'expliquer par la dispersion anomale presque toutes les particularités dans l'aspect des raies spectrales, pourvu que l'on puisse admettre l'existence d'une distribution convenable de la densité, dans l'application de ce principe à des phénomènes d'astrophysique nous avons à nous demander: les valeurs de la chute de densité dans les divers gaz absorbants des corps célestes peuvent elles réellement être telles, que la courbure des rayons soit suffisante pour exercer une influence aussi nette sur la distribution de la lumière dans le spectre?

J'ai déjà montré, dans des communications antérieures [1]), que le soleil par exemple peut être considéré comme une masse gazeuse, dont les éléments constituants sont intimement mélangés (les couches profondes contenant d'ailleurs une plus grande proportion des matériaux les plus lourds), puisque tous les phénomènes lumineux qui donnent l'impression d'une existence à part des substances présentes dans le soleil peuvent être présentés par un pareil mélange gazeux, en vertu de la dispersion anomale. Je vais maintenant essayer de démontrer que non seulement tel *peut* être le cas, mais qu'il *doit* en être ainsi par suite de la distribution la plus probable de la densité.

Mettons qu'à la surface de notre globe la densité de l'atmosphère soit 0,001293. A une hauteur de 1050 cm. elle a diminué de $\frac{1}{760}$ de sa valeur, de sorte que la chute de densité verticale est

$$\frac{0{,}001293}{1050 \times 760} = 16 \times 10^{-10}.$$

Les variations de densité existant dans le voisinage des dépressions

[1]) Voir, dans ces *Archives*, divers articles depuis 1901.

On trouvera une esquisse de la théorie solaire, où il a été tenu compte de la réfraction et de la dispersion, dans la *Revue générale des sciences*, 15, 480—495, 1904.

sont bien plus petites; même pendant les tempêtes elles ne sont que le millième à peu près de cette valeur [1]). Les chutes de densité plus rapides qui peuvent résulter d'un échauffement local, ou d'une autre cause fortuite, sont toujours peu étendues.

Mais de pareilles considérations, appliquées au soleil *mutatis mutandis*, ne permettent pas d'arriver à une évaluation quelque peu certaine de la variation des densités sur cet astre. Une des principales raisons pour lesquelles il est impossible pour le moment de faire une pareille estimation, c'est que nous ignorons absolument la grandeur de l'influence que la *pression de rayonnement* exerce sur la distribution de la matière dans le soleil. Si une pareille pression n'existait pas, nous pourrions admettre, comme on le fait toujours, qu'à la surface de la photosphère la pesanteur est 28 fois plus grande que sur terre; mais cette pesanteur est contrariée par la pression de rayonnement, à un degré qui dépend de la grosseur des particules; pour certaines particules cette pesanteur peut même être complètement contrebalancée. Il faut donc que la chute de densité radiale soit en tous cas beaucoup plus faible qu'on ne serait tenté de l'admettre, en basant ses calculs sur la gravitation seule.

Heureusement que nous connaissons un autre moyen de déterminer la chute de densité radiale à la limite de la photosphère, du moins pour ce qui regarde l'ordre de grandeur. D'après la théorie de M. Schmidt, la photosphère n'est qu'une sphère critique, dont le rayon est égal au rayon de courbure des rayons lumineux dont la trajectoire est horizontale en un point de la surface de la sphère. Ce rayon de courbure est donc $\rho = 7 \times 10^{10}$ cm., une valeur que nous pouvons introduire dans l'expression de la chute de densité:

$$\frac{d\Delta}{ds} = \frac{1}{R\rho}.$$

L'équivalent de réfraction R pour les rayons qui ne subissent pas la dispersion anomale varie, il est vrai, d'une substance à une autre, mais dans un calcul approché nous pouvons poser $R = 0{,}5$. Dans ces conditions nous trouvons, à la hauteur de la sphère critique:

$$\frac{d\Delta}{ds} = \frac{1}{0{,}5 \times 7 \times 10^{10}} = 0{,}29 \times 10^{-10},$$

[1]) Arrhenius, Lehrbuch der kosmischen Physik, p. 676.

(ce qui est 50 fois plus petit que la chute de densité dans notre atmosphère). Tous les arguments favorables à l'explication que M. SCHMIDT donne du bord solaire parlent en même temps en faveur de cette évaluation de la variation radiale de la densité dans le mélange gazeux. Remarquons d'autre part que, même en se plaçant à un autre point de vue que la théorie de SCHMIDT, cette chute de la densité ne semble pas du tout impossible. Or, une chute de cet ordre de grandeur doit produire une courbure des rayons amplement suffisante pour donner lieu à des phénomènes de dispersion fort apparents, ainsi que nous allons le voir. Si donc nous trouvons quelque raison pour admettre une chute de densité plus rapide encore, notre explication n'en sera que corroborée.

Considérons maintenant des rayons qui subissent la dispersion anomale. Pour qu'une lumière dont la longueur d'onde ne diffère que fort peu de celle d'une des raies du sodium semble venir de points situés à quelques secondes d'arc en dehors du bord solaire, le rayon de courbure de pareils rayons anomalement courbés ne doit être qu'un peu plus petit que 7×10^{10} cm. Posons par exemple

$$\rho' = 6 \times 10^{10} \text{ cm.}$$

Si nous admettons en outre que la longueur d'onde de l'espèce de lumière que nous considérons est plus grande de 0,4 Ångström que celle de D_1, nous avons pour cette espèce de lumière $R' = 1600$, ainsi qu'on peut le déduire des observations de M. WOOD et de M. JEWETT [1]; nous trouvons donc pour la chute de densité de la vapeur de sodium:

$$\frac{d\Delta'}{ds} = \frac{1}{R'\rho'} = \frac{1}{1600 \times 6 \times 10^{10}} = 0{,}0001 \times 10^{-10},$$

une quantité qui est 2900 fois plus petite que la chute de densité dans le mélange gazeux.

Il suffit donc que la trois-millième partie du mélange gazeux soit constituée par de la vapeur de sodium pour que, en vertu de la variation de densité radiale admise dans le mélange, la sphère critique (ou la photosphère) paraisse entourée d'une „chromosphère" dont la lumière aurait une ressemblance frappante avec celle du sodium. Cette espèce de lumière a, pour ainsi dire, sa propre sphère critique, plus grande que la sphère critique de la lumière qui n'est pas anomalement réfractée. Si

[1]) Voir p. 473.

la proportion de sodium était plus grande, la „chromosphère de sodium" paraîtrait plus élevée.

On a l'habitude de tirer, de la grandeur des croissants de la chromosphère et du flash, observés pendant une éclipse totale à l'aide de la chambre à prisme, des conclusions relatives à la hauteur à laquelle les diverses vapeurs se rencontrent dans l'atmosphère du soleil. A notre avis ces conclusions ne sont pas justifiées. Par contre, il sera possible de déduire de ces observations des données relatives à la proportion dans laquelle ces substances existent dans le mélange gazeux, à condition que des recherches préalables dans un laboratoire nous aient fait connaître les courbes de dispersion des vapeurs métalliques.

Jusqu'à présent nous n'avons parlé que de la variation radiale normale de la densité. Or, par convection et par les mouvements tourbillonnants il peut se produire des irrégularités dans la distribution de la densité, avec des chutes de diverses directions et grandeurs. Et comme, sur le soleil, la résultante de la pesanteur et de la pression de rayonnement est relativement faible, les chutes de densité irrégulières peuvent prendre des valeurs comparables avec la chute radiale, et même plus grandes (tandis que dans notre atmosphère terrestre c'est la variation radiale qui prédomine).

La courbure des rayons dans ces irrégularités doit produire des protubérances de forme capricieuse, dont la grandeur dépend, entre autres, de la proportion de vapeur de sodium dans le mélange gazeux.

C'est ainsi que les grandes protubérances de l'hydrogène et du calcium prouvent qu'il y a relativement beaucoup d'hydrogène et de vapeur de calcium dans les portions extérieures du soleil; mais il se peut que quelques pourcents seulement suffisent déjà pour rendre compte des phénomènes [1]).

La lumière des protubérances et de la chromosphère comprend les longueurs d' onde plus petites aussi bien que les longueurs d' onde plus grandes que celles des raies d'absorption, ce qui s'explique précisément par la réfraction dans les petites irrégularités.

Si nous avons eu raison de supposer que des chutes de densité non radiales se présentent souvent sur le soleil, et troublent la chute radiale

[1]) Ce résultat est d'accord avec une hypothèse de M. Schmidt (*Physik. Zeitschr.*, 4, 232 et 341), d'après laquelle l'élément constituant principal de l'atmosphère solaire serait un gaz très léger, inconnu jusqu'à présent.

moyenne bien plus que cela n'a lieu sur terre, alors il faut que non seulement des rayons de la région marginale, mais encore des rayons des autres parties du disque solaire soient notablement écartés de la ligne droite. Il est évident que cela concerne principalement les rayons qui subissent la dispersion anomale. *Chaque raie d'absorption du spectre solaire doit donc être enveloppée d'une bande de dispersion.*

Les raies d'absorption des éléments qui n'existent qu'à un état de raréfaction très élevé dans le mélange gazeux se présentent certainement comme des raies à peu près nettes, puisque pour ces substances toutes les chutes de densité sont bien plus petites que pour les éléments constituants principaux, de sorte que la courbure des rayons voisins de ces raies devient imperceptible. De même il y a des raies appartenant à des éléments bien représentés qui peuvent se montrer nettes, puisque toutes les raies d'un même élément ne produisent pas, pour une densité donnée, la dispersion anomale au même degré. Il se peut même qu'il y ait des raies d'absorption qui ne donnent lieu à ce phénomène dans aucune circonstance, mais cela n'est pas fort probable au point de vue de la théorie de la lumière.

Quoiqu'il en soit, les restrictions dont il vient d'être question n'invalident pas notre conclusion principale: que l'interprétation générale du spectre solaire doit être modifiée. Nous sommes forcés de voir dans les raies de FRAUNHOFER non simplement des raies d'absorption, comme le fait KIRCHHOFF, mais principalement des bandes de dispersion (ou des raies de dispersion). Et il n'y a pas à douter non plus que la réfraction ait aussi une influence prépondérante sur la distribution de la lumière dans les spectres des étoiles.

Nous devons nous familiariser avec cette idée, que dans le voisinage des corps célestes les rayons de lumière sont généralement courbés, et que par conséquent l'espace interstellaire tout entier est rempli de *champs de rayonnement non-homogènes* [1]), dont la structure est différente pour les diverses espèces de lumière.

---

[1]) „Das ungleichmässige Strahlungsfeld und die Dispersionsbanden", *Physik. Zeitschr.*, 6, 239—248, 1905.

Sur la polarisation des rayons Roentgen et des rayons secondaires.

par

H. HAGA. [1])

Dans ses expériences, communiquées en 1904 et 1905, M. Barkla [2]) a comparé, au moyen de deux électroscopes chargés, le pouvoir déchargeant des rayons X secondaires émis par le papier, l'aluminium et l'air, dans une direction perpendiculaire à celle des rayons incidents; il trouva une différence de 11 à 20 % entre des directions qui formaient entr'elles un angle de 90°; les endroits du maximum et du minimum de pouvoir déchargeant permutaient leurs places par une rotation du tube de Rœntgen de 90° autour de la direction du faisceau producteur des rayons secondaires. M. Barkla conclut de ces expériences que les rayons Rœntgen sont partiellement polarisés.

Dans un travail plus récent [3]), M. Barkla a montré que les rayons secondaires émis par une plaque de charbon sont totalement polarisés; ce résultat aussi il l'obtint avec des électroscopes, sur lesquels tombaient les rayons tertiaires provenant d'un deuxième morceau de charbon, frappé par les rayons secondaires.

Je n'ai pu m'assurer par la photographie que de l'exactitude du dernier de ces deux résultats. Mon dispositif expérimental est figuré dans

---

[1]) *Ann. der Phys.* (4), 23, 439, 1907.

[2]) C. G. Barkla, *Nature*, 17 mars 1904; 9 mars 1905. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 204, 467, 1905.

[3]) C. G. Barkla, *Proc. Roy. Soc. London*, 77, 247, 1906.

la fig. 1 (pl. XX), qui représente, à peu près à la moitié de la grandeur réelle, une section horizontale suivant l'axe.

La plaque de laiton *M*, épaisse de 4 mm. est assujettie par une pièce en équerre, en fer, à la face supérieure d'une poutrelle en fer; à cette plaque est fixé un tube en laiton *r*, long de 7 cm. et large de 1,5 cm., par l'intermédiaire d'un anneau muni d'un pas de vis et dans lequel il est soudé. A droite l'anneau porte un second pas de vis, sur lequel s'adapte un deuxième tube *R*, long de 7 cm et large de 2,5. L'une des extrémités, *a*, de ce tube est fermée par une rondelle de papier noir, et munie d'un diaphragme ayant une ouverture de 14 mm.; dans l'autre extrémité, *b*, s'adapte exactement un anneau en ébonite, portant en son milieu un bâton de charbon, long de 6 cm., épais de 14 mm., et terminé en une pointe conique, longue de 17 mm. Comme les deux tubes de laiton, l'anneau d'ébonite et le bâton de charbon ont été soigneusement travaillés au tour, leurs axes coïncident parfaitement. Un couvercle en laiton *D* peut être vissé sur l'extrémité de droite du tube *R*, de manière à empêcher complètement l'entrée de la lumière dans le tube; cela permet de glisser en chambre noire une pellicule sensible dans le tube *R* et de l'y fixer, au moyen d'une paire d'anneaux de laiton formant ressort, de manière à en tapisser complètement la paroi intérieure.

Dans le petit tube *r'*, soudé à la paroi du tube *R*, et qui peut être fermé au moyen d'un petit couvercle, il y a une petite baguette avec un canal suivant l'axe; par ce canal, et par une petite ouverture correspondante dans la paroi du tube *R*, on peut faire un trou dans la pellicule au moyen d'une aiguille. Dans les expériences le tube latéral était horizontal, de sorte que la génératrice passant par le trou faisait connaître la portion de la pellicule enroulée en cylindre qui se trouvait dans le plan horizontal.

Cet appareil fut placé devant la plaque de charbon *K*, de telle façon que les rayons secondaires émis par cette plaque passaient par le diaphragme *d*, large de 5 mm., et entraient dans le tube *R* par le diaphragme *d'*. Les dimensions de ces diaphragmes étaient choisies de telle sorte que seule la portion la plus éloignée de la pellicule sensible pouvait être frappée directement par les rayons secondaires, et non la portion placée vis à vis du cône; cette portion ne pouvait donc subir que l'action des rayons tertiaires, émis par le cône. Les rayons Rœntgen primaires tombaient, dans une direction horizontale *P*, sur la plaque

K, qui était placée aussi près que possible du tube de Rœntgen. D'épaisses plaques de plomb, d'une épaisseur totale de 1,5 cm., protégaient la pellicule du tube R contre une action directe des rayons primaires; le tube r était enveloppé d'un tube de plomb épais de 8 mm.

Pour produire les rayons Rœntgen, je me suis servi d'une bobine d'induction donnant des étincelles de 60 cm., à fil primaire en quatre parties, fournie par Siemens et Halske, d'un interrupteur de Wehnelt et d'une batterie d'accumulateurs de 65 à 110 volts; le courant était de 2 à 4 amp.; j'ai pris des tubes de Müller refroidis à l'eau.

Au bout de 60 heures on observait un noircissement net de la feuille sensible, et toujours il y avait deux maxima et deux minima; la distance entre les maxima ou entre les minima correspondait toujours au demi-contour de la section du tube R; le petit trou, dont il a été question tantôt, se trouvait dans un des maxima, de sorte que dans la disposition adoptée les rayons secondaires avaient leur plus grand effet dans le plan horizontal et le moindre effet dans le plan vertical. C'est précisément la même chose qu'on aurait obtenue dans une expérience correspondante faite à la lumière ordinaire; si p. ex. K avait été un miroir en verre noir recevant des rayons lumineux dans la direction P et C un cône de verre, on aurait obtenu sur la feuille sensible les maxima et les minima aux mêmes endroits.

Les rayons secondaires sont donc polarisés, et, comme le noircissement des minima est très faible, on peut les considérer provisoirement comme polarisés totalement.

Conformément à cette action, on peut considérer la plaque de charbon comme polariseur, le cône de charbon comme analyseur.

Ce n'est pas seulement le charbon qui peut faire fonction de polariseur; toutes les substances que j'ai examinées: cuivre, plomb, aluminium, agissaient de même, mais leur action n'était pas quantitativement la même. Alors qu'une plaque de cuivre donnait à peu près la même intensité des maxima que la plaque de charbon, le plomb et l'aluminium n'émettent les rayons secondaires qu'à un degré bien moindre, de sorte que les rayons tertiaires émis par le cône de charbon étaient très faibles. Pourtant les deux maxima et les deux minima étaient encore reconnaissables.

Au lieu du cône de charbon, j'ai pris aussi comme analyseur un cône de cuivre; en employant une plaque de cuivre comme polariseur, j'obtins le même résultat, mais très faible.

En tout j'ai fait les épreuves suivantes:

Polariseur	*Analyseur*	
Plaque de charbon	Cône de charbon	4
„ de cuivre	„ „	3
„ „	„ cuivre	1
„ d'aluminium	„ charbon	2
„ de plomb	„ „	1

Je dois encore faire remarquer, et il aisé de comprendre pourquoi, qu'il est de toute importance que le cône et les tubes r et R soient parfaitement centrés; dans mes expériences préliminaires [1]), j'obtins dans deux épreuves une différence notable d'intensité d'action entre les deux maxima.

On pourrait faire deux objections à mes expériences:

1. La portion de la plaque de charbon qui envoie les rayons secondaires à travers les diaphragmes est placée obliquement par rapport à l'axe du cône, et aussi par rapport à la direction des rayons primaires incidents; on pourrait se figurer que par là l'intensité du faisceau de rayons secondaires n'est pas la même en tous les points d'une section perpendiculaire à l'axe du cône, et que cette circonstance est la cause d'un noircissement inégal de la feuille sensible. Pour soumettre cette supposition à l'épreuve, j'ai remplacé le cône de charbon par une plaque photographique, placée perpendiculairement à l'axe du tube R; une durée d'exposition de 26 heures donna une image très nette, dans laquelle on ne distinguait aucune inégalité d'intensité; ce n'est qu'au bord qu'il y avait une pénombre.

2. Il se pourrait que, vu la longue durée des expériences, les rayons Rœntgen primaires eussent agi sur la pellicule sensible, à travers les plaques de plomb et le tube de laiton. A cette hypothèse s'oppose déjà le résultat expérimental mentionné plus haut, que, dans des conditions identiques au demeurant, le noircissement des feuilles est très faible quand on se sert comme polariseur d'une plaque d'aluminium ou de plomb, et en second lieu le fait qu'il n'y avait pas d'action *sous* les ressorts métalliques.

Puisque le cône de charbon dans le tube tapissé d'une feuille sensible

---

[1]) H. Haga, *Versl. Kon. Akad. Amsterdam*, 30 juin 1906.

peut donc servir d'analyseur, on pouvait aussi examiner si les rayons primaires sont polarisés. J'ai fait à ce sujet un très grand nombre d'expériences, avec des ampoules molles, dures, chauffées, et aussi avec un tube de MÜLLER n°. 20, qui ne donnait que des rayons mous; j'obtins toujours un noircissement uniforme de la feuille quand l'appareil était bien centré, c. à d. quand l'axe du faisceau incident coïncidait avec celui du cône. Nous verrons dans la note suivante qu'il y a un moyen bien simple de constater la coïncidence de ces axes. Mais si ces axes ne coïncident pas, soit qu'on les ait fait dévier avec intention, soit par un défaut dans l'installation, j'obtenais il est vrai une impression inégale, mais jamais deux maxima avec deux minima dans les quatre quadrants. Mes expériences prouvent donc *que les rayons Rœntgen primaires ne sont pas polarisés.*

Il est difficile de dire exactement quelle est la cause de cet écart avec le résultat de M. BARKLA; il me semble que, ce qu'il y a de plus probable, c'est qu'on doit appliquer au résultat de M. BARKLA ce que M. R. v. LIEBEN [1]) a dit de ses propres expériences sur la polarisation des rayons Rœntgen: „De nombreuses expériences de contrôle, faites avec mon nouveau dispositif et avec celui que j'avais décrit antérieurement, m'ont appris, que ma première façon d'opérer m'avait donné l'illusion d'une polarisation du rayonnement mou. Ce n'est pas seulement le foyer de l'anticathode qui émet des rayons Rœntgen actifs, mais il en vient aussi de la paroi du verre. Ce rayonnement n'est pas uniforme, mais il y a certaines parties de la paroi qui rayonnent plus que les autres et produisent ainsi une asymétrie. Or, dans le premier dispositif, le diaphragme en plomb était si large que la paroi du tube de Rœntgen, d'émission inégale, envoyait aussi ses rayons sur le miroir de métal. Ce rayonnement accessoire, non homogène, avait pour conséquence que par une rotation du tube (autour du faisceau de rayons comme axe) la forme de la surface réfléchissante illuminée aussi bien que l'intensité du rayonnement sur cette surface étaient modifiées."

Chez M. BARKLA, les diaphragmes en plomb avaient une ouverture de 5 × 5 cm.; dans ses premières expériences, M. v. LIEBEN se servit d'une ouverture ronde de 10 mm. de diamètre, dans ses dernières de 1 mm.

Comme dans mes expériences la polarisation se manifestait par l'exis-

---

[1]) R. v. LIEBEN, *Physik. Zeitschr.*, 5, 72, 1904.

tence de deux maxima et deux minima dans les quatre quadrants, la présence éventuelle de cette cause d'erreur ne pouvait me tromper.

Bien que les rayons Rœntgen primaires ne soient pas polarisés, il me semble que j'ai atteint le but principal de mes recherches, qui consistait à examiner si les rayons Rœntgen sont des ébranlements transversaux ou longitudinaux. Les rayons secondaires qui intervenaient dans mes expériences, — dans l'air ordinaire, et à une distance de quelques centimètres du corps qui émettait ces rayons —, avaient en effet identiquement le même caractère que les rayons primaires; ils ne traversaient pas seulement le papier noir en *a*, mais ils passaient même par le bâton de charbon long de 6 cm. et noircissaient une plaque photographique placée dans le couvercle *D*. Si donc les rayons Rœntgen primaires et secondaires sont de même nature, il faut, comme les rayons secondaires sont polarisés, considérer les rayons primaires comme un processus transversal.

Groningue, Institut de Physique de l'Université.
Le 1er mai 1907.

SUR UN CAS REMARQUABLE D'ABSORPTION SÉLECTIVE DES RAYONS RŒNTGEN.

PAR

H. HAGA. [1])

Dans mes expériences sur la polarisation des rayons Rœntgen (voir la note précédente) je faisais passer e. a. un faisceau de rayons axial par un tube en laiton, dans l'axe duquel un bâton de charbon, long de 4 cm. et épais de 1 cm., était fixé au moyen d'un anneau d'ébonite. Le faisceau était limité par des diaphragmes, de telle façon que son bord passait entre le bâton de charbon et la paroi interne. Pour donner à l'ampoule productrice des rayons la position convenable, je plaçais contre l'anneau d'ébonite un écran fluorescent, et je déplaçais l'ampoule, jusqu'à ce que l'ombre du charbon se montrait concentrique avec la section du faisceau, visible sur l'écran. On voyait alors que l'ombre du bâton était entourée d'un étroit anneau noir. En faisant une épreuve photographique, on obtenait évidemment un anneau clair autour de l'image du charbon (fig. 2, pl. XX). Voici comment on peut expliquer la formation de cet anneau clair. En opérant avec des rayons *mous*, on trouve que l'image du bâton est plus sombre que celle de l'anneau d'ébonite. Pour des rayons *durs*, au contraire, l'anneau est plus obscur que le centre. Cela veut donc dire que le bâton de charbon laisse passer une plus grande quantité de rayons *mous* que l'anneau d'ébonite; par contre, l'anneau d'ébonite transmet plus de rayons *durs* que le bâton de charbon. En d'autres termes: le bâton de charbon absorbe principalement les rayons *durs*, l'anneau d'ébonite surtout les rayons *mous*. Or, comme une ampoule de Rœntgen émet d'ordinaire un mélange de rayons durs et de rayons mous, parmi les rayons qui, comme *S* (fig. 3, pl. XX),

[1]) *Ann. der Physik*, 4, 23, 445, 1907.

forment un petit angle avec l'axe, les plus *durs* sont absorbés par le charbon, de sorte qu'en sortant de là le faisceau est essentiellement constitué par des rayons *mous*, qui précisément sont arrêtés par l'ébonite. Il résulte de là que tout autour de l'image du charbon il y a un petit espace où ne se produit pas d'action photographique.

C'est tout à fait comme si l'on avait fait tomber de la lumière blanche sur un bâton en verre rouge, entouré d'un anneau en verre vert.

L'explication que je viens de donner du phénomène permet de comprendre que l'anneau clair peut présenter une trace d'action, puisque cela dépend du mélange de rayons durs et mous émis par l'ampoule; j'ai cependant obtenu plus d'une épreuve, où l'anneau clair était à peu près intact.

Dans mes expériences sur la polarisation, j'ai toujours fait en même temps une épreuve perpendiculairement à l'axe, pour vérifier si les axes du faisceau incident et du bâton (ou du cône) de charbon coïncidaient parfaitement; ce n'est que quand l'anneau clair avait partout la même largeur que la coïncidence était parfaite.

Groningue, Institut de Physique de l'Université.
Le 1er mai 1907.

SIMON MARIUS.

RÉHABILITATION D'UN ASTRONOME CALOMNIÉ.

PAR

J. BOSSCHA.

(*Suite*).

IV. Les observations et les Tables de Simon Marius concernant les Satellites de Jupiter.

Simon Marius, en composant son *Mundus Jovialis*, s'était proposé, comme l'indique la Dédicace de son ouvrage, de donner des Tables du mouvement des Satellites de Jupiter dans le genre des *Tabulae Prutenicae* de Reinhold. Il n'avait pas pour objet de communiquer les observations, qui formaient la base de son travail, mais se réservait expressément de les publier dans un autre ouvrage, ensemble avec la description du procédé dont il s'était servi pour déterminer les dimensions des constellations observées. Dans sa *Praefatio ad Candidum Lectorem* il dit à ce sujet: „La manière de Galilée pour prendre les distances ne m'a pas réussi, mais j'ai gardé ma propre méthode, dont je m'étais déjà servi avant que le *Sidereus Nuncius* fut venu à ma connaissance et que j'expliquerai ailleurs dans la publication de mes principales observations". Marius n'a pas exécuté ce projet. A part quelques Almanachs lesquels, pour autant que nous les connaissons, ne contiennent pas ces observations, il n'a plus publié qu'un seul travail, un écrit d'une trentaine de pages [1]).

[1]) *Astronomische und Astrologische Beschreibung dess Cometen so im November und December dess* 1618 *Jahres ist gesehen worden. Genommen und Gestellt auss eygnen Observationibus dabey auch andere Sachen kurz*

Toutefois dans le cours de son *Mundus Jovialis*, pour illustrer par des exemples la manière de se servir de ses Tables ou pour montrer leur exactitude, il décrit plus ou moins complètement quelques constellations observées par lui à des dates et heures déterminées, et dont par conséquent il est possible de contrôler le degré de précision. Elles sont toutes de l'année 1613, lorsque MARIUS acheva son écrit.

En dehors des observations consignées dans le *Mundus Jovialis*, le hasard nous a conservé une autre de beaucoup antérieure, savoir du 30 décembre 1610, que MARIUS n'a pas publiée lui-même. Il l'avait communiquée à ODONTIUS dans une lettre dont la date nous est inconnue. Ce dernier transmit à KEPLER un extrait de la lettre de MARIUS. La lettre d'ODONTIUS contenant cet extrait a été publiée par HANSCHIUS, à la page 303 de son ouvrage bien connu: *Johannis Kepleri aliorumque epistolae mutuae.*

ODONTIUS (JOHANN KASPER ZAHN), lecteur de mathématiques au gymnase d'Altorf, avait en 1605 assisté KEPLER dans ses calculs sur le mouvement de la planète Mars. Après son départ de Prague il n'avait échangé avec KEPLER que deux lettres. Ensuite leur commerce fut interrompu jusqu'au 4 décembre 1611, lorsque ODONTIUS, ayant appris d'un visiteur venu de Prague la mort de l'épouse de KEPLER, décédée le 3 juillet, saisit l'occasion d'une lettre de condoléance pour renouveler l'expression de sa reconnaissance des bontés éprouvées à Prague de la part de KEPLER et de sa femme, et pour lui faire la communication suivante, qui semble avoir été l'objet principal de sa lettre.

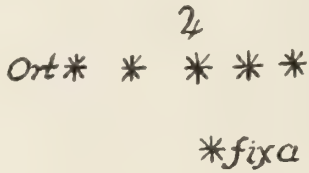
„Je viens maintenant à une autre partie de cette lettre. Je n'ignore pas que votre Clarté prend un plaisir extrême aux observations stellaires, particulièrement aussi aux éclipses du Soleil et de la Lune dans lesquelles Elle est très versée. J'ai donc cru faire une chose qui ne Lui sera pas désagréable en transmettant à votre Clarté une observation de l'éclipse lunaire de l'année passée, laquelle est de SIMON MARIUS, mathématicien assez célèbre, avec lequel depuis longtemps je suis en conversation épistolaire.

Celui-ci m'écrit bona fide qu'il a observé très exactement au mois de décembre la fin de l'éclipse de la Lune, savoir lorsque, en avançant dans l'aile du Corbeau, elle l'avait parcourue à peu près d'un degré, c'est-à-dire

---

eingemischet werden. Durch Simonem Marium Guntzenhusanum Fürstlichen Brandenburgischen gestellten Mathematicum und Medicum. Gedruckt unnd verlegt zu Nurnberg bey Johann Lauern. Im Jahr Jesu Christi MDCXIX.

à 5 heures 23 minutes après minuit. C'est alors qu'*ayant regardé la Lune avec l'instrument nouveau de* GALILÉE [1]), il a aperçu pour ainsi dire à ce moment même que la Lune était réellement délivrée de la vraie et plus obscure ombre de la Terre, tandis que toutefois, en la regardant sans instrument, elle ne semblait pas encore tout à fait sortie de l'ombre. L'ascension droite de l'étoile fixe de l'aile du Corbeau est de 179°,2, mais *il dit ne pas avoir pu observer le commencement et le milieu de l'éclipse à cause des nuages, mais qu'à cinq heures le ciel était devenu parfaitement serein, avec un froid très intense. A cette même heure il a vu les Satellites de Jupiter tous les quatre, deux à l'orient, deux à l'occident, très beaux et très exactement.* Le plus oriental avait une distance de cinq minutes de Jupiter, le plus voisin de $3^1/_2$ minutes, le plus occidental de quatre, celui plus rapproché de $2^1/_2$ minutes. Il a vu aussi au sud de Jupiter une étoile fixe, qui autrement n'est pas visible dans la même longitude de Jupiter à une distance de 10 minutes en cette manière.



Celui qui fait la plus grande digression de Jupiter achève sa période en 16 jours, quant aux heures il n'en est pas encore certain; dans les autres l'observation est plus difficile, il croit cependant que le Satellite qui est le second après le plus éloigné achève sa période en dix ou onze jours, elle se déplace très rapidement et semble s'arrêter dans sa plus grande élongation à 9, il estime en conséquence qu'ils doivent se mouvoir autour de Jupiter en cercles. Quand votre Clarté aura connaissance de cette observation de cet homme, qu'Elle veuille bien par quelque réponse au Sieur MARIUS faire savoir quelle est Sa propre observation,

[1]) Nous osons conjecturer qu'ODONTIUS, pour plaire à KEPLER qui venait de louer GALILÉE dans la Préface de sa *Dioptrique*, s'est permis ici quelque liberté à l'égard du texte de la lettre de MARIUS. Jamais celui-ci n'a désigné la nouvelle lunette sous le nom d'instrument de GALILÉE, toujours au contraire sous celui de perspicillum belgicum, niederländisches instrument, ou quelque terme pareil, indiquant sa véritable origine.

puisqu'il vénère beaucoup la personne de votre Clarté non seulement à cause de la très haute perspicacité de Son génie, mais aussi par Sa très grande habileté à décrire beaucoup de choses de grande importance".

Nous avons traduit aussi textuellement qu'il nous a été possible et en entier le passage de la lettre d'ODONTIUS qui se rapporte à MARIUS. Les données qui nous ont été transmises au sujet de l'astronome d'Anspach sont tellement rares que chaque détail a son importance.

Tout ce que M. KLUG en communique à ses lecteurs se borne aux phrases que nous avons imprimées en italiques. Dans un article suivant nous aurons peut être l'occasion de revenir sur quelques parties omises par M. KLUG. Ici nous relevons seulement la suppression des détails chiffrés de la constellation des Satellites, observée par MARIUS. M. KLUG arrête sa plume juste au moment où vont suivre les données d'une importance capitale dans l'examen de la question si, oui ou non, MARIUS a pu observer avec quelque précision la position des Satellites. En effet, la date et l'heure de l'observation sont exactement connues. La date est celle de l'éclipse lunaire du 30 décembre 1610, le temps cinq heures du matin. On possède donc toutes les données nécessaires pour vérifier l'observation, si l'on ajoute les chiffres que M. KLUG omet.

MARIUS, déjà accoutumé à se servir de la lunette dans ses observations astronomiques, remarque que le nouvel instrument peut servir à déterminer, plus exactement qu'il n'est possible à l'œil nu, la fin d'une éclipse. KEPLER n'a pas manqué d'en profiter. Il a compris l'observation de MARIUS dans ses calculs des éclipses [1]).

Mais beaucoup plus important pour l'appréciation du travail astronomique de MARIUS est le fait attesté par la lettre d'ODONTIUS que MARIUS, le 30 décembre 1610, a observé et mesuré les positions des quatre Satellites de Jupiter. Il suffit à détruire l'assertion arbitraire de GALILÉE, d'après laquelle MARIUS n'a pas pu les apercevoir dans les deux premières

---

[1]) *Calculus Eclipsium Lunae*, *Annorum* 1572—1625. FRISCH, *Joh. Kepleri*, *Astronomi Opera Omnia*, III, p. 608. KEPLER rapporte n'avoir pu employer l'observation de GALILÉE qui n'avait pas noté le temps. En effet, GALILÉE s'était borné à écrire à ce sujet dans sa lettre à GIULIANO DE' MEDICI, communiquée à KEPLER, (Ed. Naz., XI, p. 12): „Osservai 3 notti sono l'eclisse, nella quale non vi è cosa notabile: solo si vede il taglio dell' ombra indistinto, confuso et come annebiato et questo per derivare essa ombra de la terra, lontanissimamente da essa ☽."

années après leur découverte et probablement, lorsqu'il écrivit le *Mundus Jovialis*, ne les avait pas vus du tout.

Examinons d'abord ce que les données numériques de l'observation nous apprennent sur le degré de précision que MARIUS a pu atteindre, et quel parti il en a pu tirer lorsque, plus tard, il était entré en possession des données qui sont nécessaires pour convertir en positions héliocentriques les élongations mesurées. Ainsi que nous l'avons vu au chapitre II, MARIUS a constamment estimé à une minute le diamètre de Jupiter, et a toujours mesuré et compté les élongations depuis le centre de Jupiter et du système du Mundus Jovialis.

On reconnaît facilement, dans la constellation décrite, de gauche à droite les Satellites IV, III, I et II, de sorte que les élongations, par rang d'ordre des Satellites, exprimées en diamètres de Jupiter ont été les suivantes

$$e_1 = +2{,}5; \qquad e_2 = +4; \qquad e_3 = -3\tfrac{1}{2}; \qquad e_4 = -5,$$

si l'on considère comme positives les élongations occidentales.

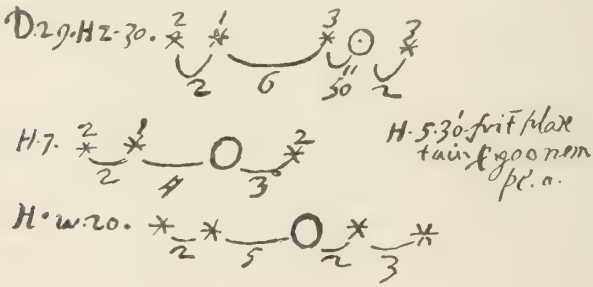
Au moyen des valeurs exactes des rayons des orbites, exprimées en diamètres de Jupiter, savoir

$$r_1 = 2{,}97, \qquad r_2 = 4{,}73, \qquad r_3 = 7{,}54, \qquad r_4 = 13{,}27,$$

on en déduit facilement pour le résultat complet de l'observation de MARIUS, en degrés entiers : Anspach, 30 déc. 1610, $5^h{,}0$.

$$\varphi_1 = 237^\circ, \qquad \varphi_2 = 238^\circ, \qquad \varphi_3 = 152^\circ, \qquad \varphi_4 = 158^\circ.$$

GALILÉE a observé les Satellites dans la même nuit. Son journal nous fournit les détails de trois observations sous cette forme:



Galilée comptait les distances des Satellites voisins de Jupiter depuis le bord de la planète. Son unité était le demi-diamètre de Jupiter qu'il estimait à une minute. On trouve ainsi pour les élongations observées en *demi-diamètres* de Jupiter:

	IV	III	I	II
H. 2.30	— 9,83	— 7,83	— 1,83	+ 3
H. 7	— 8,0	— 6,0	invisible [1])	+ 4
H. 10.20	— 8,0	— 6,0	+ 3	+ 6,

auxquelles, avec les valeurs exactes des rayons des orbites, répondent les angles de position:

I	II	III	IV
162°	198°,5	149°	158°
invisible	205	156,5	162,5
210	219	156,5	162,5

Les heures sont comptées par Galilée depuis le coucher du soleil. On peut trouver l'heure, qu'il adopte pour celle du coucher au 29 décembre, au moyen d'un autre endroit de son journal (Alberi, V, p. 91) où il est dit: „18 dec. hora 4 ante Solis ortum id. Déc. 17 h. 15.37 a meridie" ce qui donne pour l'heure du coucher 4.23 du soir = 16.23. On peut prendre cette heure pour celle du coucher au 29 décembre. Comme Florence se trouve à peu près à 3 minutes de temps à l'est d'Anspach, les trois observations de Galilée du 29 décembre 1610 sont antérieures à celles de Marius, respectivement de 10,2, 5,7 et 2,3 heures. En ajoutant aux angles de position déduites de ces observations les mouvements moyens, accomplis par chacun des Satellites dans ces intervalles de temps, on peut obtenir trois systèmes de valeurs indiquant les positions à l'heure de l'observation de Marius. Nous avons réuni ces valeurs dans le Tableau suivant avec celles observées

[1]) Alberi a interprêté le signe presque illisible qui termine la note marginale: „H. 5.30 fuit planeta in perigeo nempe," et qui ressemble à un *a* minuscule, comme indiquant le Satellite I. C'était, en effet, ce Satellite qui se trouvait devant le disque de Jupiter. Galilée, sans aucun doute, a dû facilement le reconnaître comme tel, quoique au moment d'inscrire l'observation dans son carnet, il ait pu hésiter.

Nous ignorons ce que peuvent signifier les chiffres placés au-dessus des Satellites. Le chiffre placé entre Jupiter et son voisin de gauche dans la seconde observation semble dans notre figure plutôt un 4 qu'un 5. Dans l'original c'est bien certainement un 5, comme aussi Alberi l'a lu.

par MARIUS, auxquelles nous avons fait précéder celles calculées d'après les Tables de M. BERBERICH en ayant égard à une parallaxe de 2°,2. Ces dernières valeurs peuvent être considérées comme représentant avec une exactitude suffisante les vraies positions géocentriques des Satellites à l'heure de MARIUS.

Positions géocentriques des Satellites de Jupiter
au 30 décembre 1610, 5 heures du matin à Anspach.

	I	II	III	IV
Tables de BERBERICH-DAMOISEAU	239° ε	239° ε	151° ε	156° ε
MARIUS	237 − 2°	238 − 1°	152 + 1°	158 + 2°
GALILÉE n°. 1	248 + 9	241 + 2	170 + 19	167 + 11
„ n°. 2	invisible	229 − 10	168 + 17	168 + 12
„ n°. 3	230 − 9	229 − 10	162 + 11	165 + 9.

On voit par les erreurs ε que l'observation de MARIUS, au moins pour les Satellites III et IV, est sensiblement plus exacte que celles de GALILÉE. *Il est donc établi que* MARIUS *a observé et mesuré le* 30 *décembre* 1610 *une constellation des Satellites de Jupiter avec une précision supérieure à celle des observations simultanées de* GALILÉE.

Quelle a pu être la cause de cette supériorité des observations de MARIUS?

GALILÉE, comme il l'avoue dans son *Discorso*, déterminait, encore en 1611, les élongations des Satellites par leur rapport au diamètre de Jupiter au jugé de l'œil. Ce n'est qu'en janvier 1612 qu'il a commencé à se servir d'un instrument dont jusqu'ici nous ignorons la construction. Dans le *Discorso*, il assure que l'instrument lui permettait de prendre les distances sans erreur même de très peu de secondes (senza errore anche di pochissimi secondi). Mais, en admettant même que cette information ne fût pas empreinte de l'exagération optimiste qui caractérise GALILÉE lorsqu'il parle de ses propres travaux, il est clair que la précision dans la mesure des distances ne peut garantir l'exactitude du résultat, lorsque la grandeur qui sert d'unité est sujette à de grandes variations. Or, nous avons reconnu au chapitre II que le diamètre apparent de l'image du disque de Jupiter dans les observations de GALILÉE était excessivement variable, depuis 4 minutes jusqu'à environ trois quarts de minute et que la cause probable de ces inégalités résidait

dans les défauts inévitables de la définition des images dans la lunette employée, définition variable selon son grossissement, sa qualité, la clarté du ciel, et enfin aussi selon la précision de la mise au point. Malgré l'exactitude louée de la détermination de la distance, la valeur absolue de l'élongation mesurée devait donc rester très incertaine.

Le moyen de contrôler cette conclusion est fourni par les diverses valeurs que GALILÉE a successivement adoptées pour les rayons des orbites. Les mesures de ces élongations extrêmes se font dans les circonstances les plus favorables, en ce que les Satellites restent pendant plusieurs heures pour ainsi dire immobiles et qu'une erreur dans l'heure exacte de l'observation est sans conséquence.

Malgré cela il existe des différences très considérables dans les valeurs successivement adoptées par GALILÉE pour les rayons des orbites, comme le montre le tableau suivant dans lequel ces constantes, exprimées en demi-diamètres de Jupiter, sont rangées dans leur ordre chronologique, d'après ALBERI V, p. 175. Nous les faisons suivre par celles que MARIUS donne dans le *Mundus Jovialis* et par celles calculées d'après les mesures de BESSEL.

	I	II	III	IV
GALILÉE 1610—1611 [1])	3,5	5,67	9	15,33
„ 1611 [2])	4	6	8,5	15,0
„ 1611—1612 [3])	4,45	7,33	10	18
„ 1612 [4])	5,3	9	14	24
„ 1627 [5])	5,7	8,6	14	25
MARIUS 1614	6	10	16	26
BESSEL	5,94	9,46	15,1	26,5.

[1]) ALBERI dit que ces valeurs ont servi à GALILÉE dans ses premières constitutions calculées et répondent aussi à un premier Jovilabium. Il nous semble douteux que GALILÉE, pour réduire en angles de position les élongations observées, se soit jamais servi d'un autre moyen que de son Jovilabium.

[2]) Selon ALBERI ces valeurs sont celles des premiers calculs de 1611 et d'un autre Jovilabium plus complet.

[3]) Dans l'exorde du *Codex Notarum* ALBERI a rencontré ces valeurs sur une partie d'un autre Jovilabium, ainsi que dans quelques calculs. GALILÉE ne semble s'en être servi que passagèrement.

[4]) Commencement du printemps (ALBERI); valeurs d'un Jovilabium plus parfait employé par GALILÉE pendant deux ans et plus.

[5]) Lettre de GALILÉE a BENEDETTO CASTELLI, du 2 août 1627. *Edizione Naz.* XIII, p. 370. „Quanto ai cerchi delle Medicee, il minore ha'l suo semi-

Ici encore la supériorité des valeurs de MARIUS est très prononcée, ce qui exclut l'hypothèse, admise par M. KLUG que MARIUS a pu prendre ses valeurs de GALILÉE.

Il importe d'observer que, malgré l'inexactitude très marquée des premières valeurs, GALILÉE a pu obtenir des valeurs suffisamment approchées dans les angles de position qu'il déduisit des élongations observées, tant qu'il appliquait ses constantes à des observations faites dans les mêmes conditions, parce qu'alors la grandeur exagérée du diamètre de Jupiter avait à peu près la même influence sur les deux chiffres (l'élongation observée et l'élongation maximale) dont le quotient détermine l'angle de position. Si l'on applique aux trois observations du 30 décembre 1610 les cinq systèmes de valeurs successivement adoptés par GALILÉE, le tableau des erreurs devient:

I	II	III	IV
	Système I		
— 4°	+ 16°	— 10°	— 7°
—	+ 10	— 1	— 2
+ 20	incompatible [1])	— 8	— 5
	Système II		
— 10	+ 14	— 17	— 8
—	+ 7	— 5	— 3
+ 9	+ 41	— 11	— 6
	Système III		
+ 3	+ 8	— 1	— 10
—	— 2	+ 4	+ 3
+ 3	+ 6	— 3	0
	Système IV		
+ 7	+ 4	+ 16	+ 9
—	— 9	+ 16	+ 10
— 5	— 7	+ 9	+ 7

diametro grande semidiametri di Giove $5^{11}/_{16}$; il semidiametre del seguente è di tali semidiametri $8^{5}/_{8}$; l'altro ne contiene 14, e il massimo quasi 25, perquanto io ho potute sin qui comprendere: e sento con piacere, che ella si sia applicata a queste osservazioni, già da me tralasciate.

[1]) L'élongation observée dépasse le rayon de l'orbite.

Système V

I	II	III	IV
+ 9	+ 4	+ 16	+ 10
—	— 8	+ 16	+ 6
— 8	— 4	+ 9	+ 3.

Le système III est celui pour lequel les erreurs sont les moindres. Quoiqu'il soit postérieur à l'observation du 29/30 décembre 1610, les circonstances dans lesquelles cette dernière a été effectuée semblent donc avoir approché le plus celles qui ont fourni les valeurs de 1611–1612. Mais on voit, par ces exemples, quels embarras la variabilité des constantes a dû causer, lorsqu'il s'agissait de profiter du long espace de temps qu'embrassaient les observations, pour augmenter l'approximation des temps périodiques.

Aussi, au lieu de comparer deux observations séparées par un intervalle de temps aussi grand que possible, mais calculées avec les valeurs des rayons qui leur convenaient, il semble que Galilée a procédé par tâtonnements répétés, ajoutant ou retranchant des corrections aux périodes admises pour faire concorder avec elles de nouvelles observations.

Quoique Marius ne décrive pas la méthode dont il s'est servi pour mesurer les élongations, on ne peut guère douter que, s'il s'est servi du diamètre de Jupiter comme unité intermédiaire dans le rapport des distances maximales à celles que présentait une constellation observée, il se rendait compte de la variabilité de ces distances mêmes, exprimées en unités absolues. Il parle expressément (p. B_4 verso) de la différence en grandeur apparente des orbites selon la distance de Jupiter à la Terre et ne néglige pas d'ajouter aux valeurs qu'il donne pour les rayons, qu'elles ne sont valables que pour la distance moyenne de Jupiter à la Terre. De même que Galilée, il n'aurait pas eu raison de s'en occuper, s'il ne s'était proposé de fournir dans ses Tables les moyens de calculer les positions des Satellites à un moment donné, en mesures astronomiques usuelles et absolues. Il a donc dû tâcher de déterminer les variations des dimensions absolues, mais il n'y a pas réussi. Marius s'est donné beaucoup de peine pour mesurer ces „augmentations et diminutions". Il a pu constater (p. B_4 verso) que le rayon de l'orbite du Satellite IV augmentait lors de l'opposition jusqu'au-dessus de 14 minutes, mais il avoue qu'il n'a pas pu constater que les variations

répondaient exactement à ce qu'exigeait celle des distances; il reconnaît que son instrument ne le lui avait pas encore permis. Les efforts de MARIUS pour faire concorder les variations théoriques avec ses observations l'ont conduit à essayer des valeurs approchées pour le rayon de l'orbite de Satellite IV. Il a dressé un tableau des variations ayant pour base une valeur de $12\frac{1}{2}'$ à la distance moyenne, déprimant ainsi intentionellement la valeur $13'$ qu'il avait trouvée lui-même et qu'il adopte définitivement non seulement dans sa description du Satellite, mais aussi comme fondement de ses Tables. M. KLUG, qui ne semble pas avoir compris le sens de ce passage, relève l'inconsistance des chiffres $14\frac{1}{2}$ et $12\frac{1}{2}$ qu'il considère tous les deux comme obtenus par l'expérience et termine sa discussion par cette phrase: „Donc de nouveau des données quantitatives sans aucune base expérimentale." Exclamation d'autant plus étonnante qu'il s'agit ici d'une relation d'expériences que MARIUS dit avoir instituées sans qu'elles lui ont fourni des chiffres suffisamment sûrs!

La cause de l'insuccès de MARIUS a été l'impossibilité de représenter dans le champ de la lunette hollandaise, laquelle n'admet pas d'appareil micrométrique au foyer de l'objectif, une unité de grandeur déterminée visible en même temps que la constellation des Satellites, Mais en présence de cette difficulté insurmontable il pouvait aussi, proportionnant ses Tables aux moyens d'observation de son temps, renoncer à chercher une plus grande exactitude dans les valeurs absolues, puisque chaque observateur des Satellites se trouverait placé devant la même difficulté, mais aurait aussi dans la dimension de Jupiter le moyen de corriger ou d'éliminer l'erreur.

Nous ignorons quels moyens MARIUS avait à sa disposition pour évaluer le rapport des distances relativement au diamètre de Jupiter, mais il avait au moins sur GALILÉE cet avantage, que l'image de la planète dans sa lunette était mieux définie que dans celle de GALILÉE, au moins dans celle dont celui-ci se servait dans ses premières observations.

Pour un astronome de l'école allemande, connaissant les procédés employés par le landgrave de Hesse, par MAESTLIN et par TYCHO pour mesurer les différences en ascension droite des astres par l'intervalle de temps écoulé entre leur passage au méridien; — pour MARIUS spécialement qui avait passé plusieurs mois à l'observatoire de TYCHO, chargé du service des observations quotidiennes et qui selon toute apparence avait fréquemment pratiqué les méthodes allemandes, l'idée

devait se présenter d'elle-même de mesurer le rapport des distances des Satellites dans le champ de la lunette par celui des intervalles de temps écoulés entre leurs occultations par le bord du champ. Pour rendre praticable cette méthode il fallait seulement prendre la précaution de fixer la position de l'œil devant la lunette, et de limiter dans ce but la surface libre de l'oculaire. Toutefois, ce qui empêchait d'obtenir par ce moyen une grande exactitude, c'était la mauvaise définition du bord du champ qui se trouvait limité par un anneau s'obscurcissant de l'intérieur à l'extérieur et d'une largeur d'environ deux minutes d'arc [1]). L'exactitude avec laquelle on peut déterminer le moment précis où la lumière d'un point lumineux se mouvant vers le bord semble s'éteindre, dépend du degré d'exercice de l'observateur; mais, comme le maximum de rapidité de l'extinction a lieu lorsque l'image se trouve au milieu de l'anneau, il n'est guère probable que l'erreur dans le rapport des distances a pu dépasser la valeur angulaire d'une demi-minute. La méthode admet donc sans doute une plus grande exactitude qu'une comparaison de la distance avec le diamètre de Jupiter faite au jugé de l'œil.

Remarquons que, si MARIUS plus tard a voulu tirer parti de son observation du 30 décembre 1610, dont il loue les conditions exceptionnellement favorables, il n'a certainement pas employé les angles de position que nous venons de déduire de ses observations avec les valeurs exactes des rayons des orbites. Il a dû se servir des valeurs par lui admises: 3, 5, 8, 13, qui servent de base à sa *Tabula Distantiarum* (p. 63 recto). Cette Table contient pour chaque Satellite de cinq à cinq degrés des angles ☉, parcourus depuis l'apogée, l'élongation orientale ou occidentale en minutes et secondes, et par conséquent fait connaître réciproquement les angles ☉ lorsque les élongations sont données.

---

[1]) Nous ne possédons pas de détails suffisants sur les lunettes dont se servait MARIUS. Mais on ne s'éloignera pas beaucoup de la vérité en admettant qu'elles avaient un grossissement de 20 fois. Avec un oculaire de même distance focale que celle de GALILÉE (42 mm. environ), la longueur de la lunette a dû être de 800 mm. environ. La largeur de l'anneau, si l'on néglige la distance de l'œil à l'oculaire, laquelle a pour effet de rétrécir encore l'anneau, serait de $r/800 \times 20$ r étant le rayon de l'objectif.

L'ouverture de l'objectif, à en juger d'après le dessin, qui représente MARIUS avec sa lunette, n'a certainement pas eu plus de 10 millimètres de rayon, d'où se calcule la largeur de l'anneau à 2 minutes environ. Voir la note II de l'article *Galilée et Marius*, ces *Archives*, Série 2, Tome VIII p. 173.

Elle est si habilement arrangée qu'elle fournit ces 288 données dans un espace de 81 centimètres carrés. Au moyen de cette Table la recherche de l'angle de position appartenant à une élongation donnée est au moins aussi facile et certainement beaucoup plus sûre que l'emploi pour ainsi dire machinal du Jovilabium de GALILÉE.

La Table a dû fournir à MARIUS pour le résultat de son observation du 30 décembre, 5 heures, à Anspach:

$$\phi_1 = 236{,}7 \qquad \phi_2 = 233{,}1 \qquad \phi_3 = 154{,}1 \qquad \phi_4 = 157{,}4.$$

Calculée ainsi l'observation montre les erreurs:

$$-2^\circ, \qquad -6^\circ, \qquad +3^\circ \qquad \text{et} \qquad +1^\circ.$$

L'époque du Satellite I n'est en erreur que de 2° [1]).

La première observation de MARIUS que l'on rencontre dans le *Mundus Jovialis* en dehors de celle dont nous avons parlé au Chapitre I (p. 265) est celle du 17 février 1613. Elle ne contient pas les données numériques des élongations, et n'est produite par MARIUS que pour donner un exemple d'une constellation dans laquelle le Satellite IV, se trouvant dans la partie supérieure de son orbite, se présente près d'un autre qui se trouve dans la partie inférieure. Voici à quel propos MARIUS a besoin de citer une telle observation. Aux pages précédentes il a examiné si la différence en latitude des Satellites peut avoir pour effet que, dans sa conjonction héliocentrique supérieure, le Satellite IV peut échapper à une éclipse dans l'ombre de Jupiter. Avec les données empruntées à TYCHO BRAHÉ il calcule les dimensions du cône de l'ombre de la planète et trouve ainsi, pour un maximum de latitude de 15 secondes qu'il attribue au Satellite IV, que celui-ci doit être éclipsé totalement à chaque conjonction supérieure.

A cette occasion MARIUS rapporte avoir appris par une lettre de KEPLER que GALILÉE, au moyen de son instrument, a parfaitement vu une éclipse du Satellite IV. Quant à lui-même, il lui est arrivé souvent de ne voir aucun Satellite près de Jupiter, tandis que quelques heures plus tard il en apercevait un à une distance notable, qui ne répondait pas au mouvement accompli dans les heures intermédiaires, et que,

---

[1]) Au chapitre II nous avons estimé a 7° cette erreur. Ce chiffre avait été obtenu en prenant pour l'heure de l'observation de MARIUS celle de la fin de l'éclipse: $5^h.23^m$. Le texte de la lettre d'ODONTIUS rend plus probable l'heure nommée immédiatement avant la description de la constellation des Satellites, savoir 5^h.

inversément, à une distance notable de Jupiter un Satellite avait disparu après quelques heures, lorsque pourtant selon son mouvement propre il devait encore être visible. Il n'avait pas noté le temps de ces observations, mais il remarque que ce phénomène doit se présenter nécessairement vers les quadratures de Jupiter et cela au côté occidental, lors de la première, au côté oriental lors de la dernière quadrature. Depuis un an il avait fait attention à ce phénomène, principalement par rapport au quatrième Satellite, car pour les autres il lui était impossible avec son instrument d'apercevoir une telle éclipse; mais il n'en avait pas pu attraper [1]) Il continuerait cependant de les rechercher.

Il s'occupe ensuite de la question de savoir si les Satellites peuvent s'éclipser mutuellement, ce qu'il estime vraisemblable.

„J'ai", dit il (p. D_4 recto), „une observation faite cette année 1613 le 7/17 février à dix heures après midi, lorsque tous les quatre furent vus, trois à l'orient, un, savoir le premier, à l'occident.

Ils étaient très clairs, à l'exception du quatrième, qui se trouvait très voisin du second vers le côté de Jupiter, déclinant vers le sud et très faible de sorte qu'il pouvait à peine être vu. Le quatrième se trouvait dans la partie supérieure de son orbite s'éloignant de la planète, le deuxième se rapprochant au contraire dans la partie inférieure; près d'eux se trouvait aussi le troisième également se rapprochant, tandis que l'ombre de Jupiter se trouvait au côté occidental et ne pouvait donner

---

[1]) Ce détail peut servir à évaluer approximativement la distance minima à laquelle Marius a cru pouvoir encore apercevoir les Satellites dans le voisinage de Jupiter. La plus grande distance à laquelle l'axe du cône d'ombre de Jupiter peut rencontrer l'orbite du Satellite IV, selon les données de Marius, est égale à 13′ *sin* 10°.34′ = 2,39 minutes à partir du centre, puisque Marius attribue au rayon de l'orbite la valeur de 13′ et que dans sa *Tabula Aequationum* le maximum de la parallaxe a pour valeur 10°.34′. De même pour le Satellite III le point de rencontre du cône d'ombre s'éloigne de 8′ *sin* 10°.34′ = 1′,47 du centre de Jupiter. C'est entre ces deux limites que doit être comprise la distance minima de visibilité. La moyenne 1′,9 peut donc être prise pour cette limite dans les observations de Marius. Au Chapitre II nous avons constaté que Galilée avec sa lunette grossissant trente fois n'a jamais vu un Satellite à moins d'un diamètre de Jupiter de distance depuis le bord de la planète et qu'il les a même manqués à 1.6 et 1,5 du bord. Donc, sous ce rapport, les deux observateurs se trouvaient à peu près également limités dans leurs observations. Pour le Satellite I, dont l'orbite mesure selon Marius 3 minutes de rayon, les parties dans lesquelles il était assez éloigné de Jupiter pour être visible se bornaient aux deux centaines de degrés comprises entre 40° à 140°, et 220° à 320° des angles de position.

raison de cette faiblesse [c. à d. du quatrième]. Il est donc probable que ces deux corps du troisième, principalement cependant du second, ont empêché que les rayons solaires dans toute leur force et liberté aient pu atteindre et inonder le quatrième".

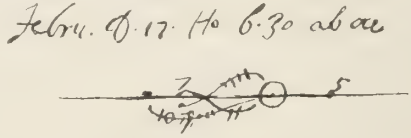
L'explication que MARIUS tâche de donner de la faiblesse du Satellite IV dans le cas observé est erronée. Même la pénombre du Satellite II n'a pu atteindre le Satellite à cause de la trop grande différence en latitude et de la trop faible grandeur des Satellites. Mais la conjecture par laquelle MARIUS veut appuyer sa thèse, d'ailleurs exacte, que les Satellites peuvent s'éclipser mutuellement, ne peut rien changer au fait indéniable que le 17 février 1613 MARIUS a observé exactement les positions des Satellites [1]). Car la description que MARIUS donne de la constellation est exacte dans tous ses détails. L'aspect géocentrique, calculé d'après les Tables de M. BERBERICH pour l'heure citée d'Anspach, a été celui de la figure suivante

III	II	IV	C	I
*	*	*	·	*

C étant le centre du système.

Les angles de position géocentriques étaient $\Phi_1 = 279°$, $\Phi_2 = 120°$, $\Phi_3 = 130°$, $\Phi_4 = 14°$, auxquelles répondent les distances $+3$, -4, -6, -3 en diamètres de Jupiter, estimés suivant MARIUS en minutes. Des Satellites II et IV, distants entre eux d'un diamètre, le dernier devait présenter une déviation sensible vers le sud ainsi que le décrit MARIUS, le second une déviation quatre fois plus faible vers le nord.

GALILÉE a observé la constellation dans la même nuit à Florence deux heures plus tard, lorsque les deux Satellites II et IV avaient dû se rapprocher sensiblement. La reproduction photographique de son journal contient la figure suivante :



[1]) Pour la remarquable logique de M. KLUG le cas est différent. L'*explication* erronée de la faible apparence observée du Satellite IV prouve, d'après lui, que MARIUS *n'a pas observé du tout*, et qu'il a simplement construit la constellation d'après ses Tables. Sa relation „habeo observationem" serait donc frauduleuse. Quel auteur de bonne foi peut échapper à des calomnies reposant sur des raisonnements de cette force?

que l'on déchiffre facilement comme il suit:

$$e_1 = +5, \quad e_2 = -7, \quad e_3 = -10, \quad e_4 = -7,$$

ce dernier Satellite présentant une déviation très marquée vers le sud. A l'heure de GALILÉE les angles de position géocentriques furent d'après les Tables modernes:

$$296°, \quad 128°, \quad 134°, \quad 16°.$$

Calculées au moyen des constantes de Jovilabium II (système IV de notre page 498), alors en usage chez GALILÉE, ces valeurs conduisent aux élongations

$$+4{,}77, \quad -7, \quad -10, \quad -6{,}61,$$

qui concordent remarquablement bien avec les valeurs du journal [1]).

Mais il est difficile d'expliquer comment GALILÉE a pu continuer à attribuer au diamètre de Jupiter une valeur angulaire de *deux* minutes, tandis que, déjà sous une date antérieure de plus d'une année, on trouve noté dans son journal que ce diamètre excéderait à peine une demi-minute.

Cependant, l'observation du 17 février 1613 présente une difficulté bien plus sérieuse. On se demande si GALILÉE, lorsqu'il dénonçait MARIUS comme un plagiaire, avait seulement jeté les yeux dans le livre, qui lui fournit la matière des plus graves insultes qu'un observateur a jamais émis publiquement contre un concurrent. Même en se bornant à feuilleter le *Mundus Jovialis*, son œil a dû s'arrêter sur la page D_3 verso, où son nom se trouve cité comme celui d'un observateur qui avait le premier remarqué une éclipse d'un des Satellites. En regard de cette page, c. à d. D_4 recto, se trouve décrite l'observation faite par MARIUS le 7/17 février. GALILÉE n'avait qu'à consulter son journal pour reconnaître aussitôt que la description verbale de la constellation, donnée par MARIUS, était dans tous ses détails conforme à ce qu'il avait observé lui-même et dessiné dans son journal. Pouvait-il nier de bonne foi que MARIUS avait bien réellement vu et observé les Satellites?

Plus détaillées encore sont les autres observations, décrites par MARIUS dans la *Pars Tertia* de son ouvrage.

---

[1]) Si l'on admet avec ALBERI qu'à cette époque GALILÉE ne comptait plus les élongations depuis le bord, mais depuis le centre de la planète.

Lorsqu'il veut expliquer l'usage et montrer le degré d'exactitude de ses *Tables*, MARIUS choisit parmi ses observations, comme premier exemple, le cas le plus simple et qui en même temps est propre à donner l'idée la plus favorable de son travail. C'est celui où tous les Satellites obtiennent en même temps leurs élongations maximales et pour lequel aussi les erreurs dans les époques ont la plus faible influence sur l'élongation qu'il veut vérifier au moyen de ses Tables. Cette apparence s'était montrée le 11 avril 1613 à 8 heures du soir, les Satellites IV et II se trouvant à l'orient, III et I à l'occident de la planète. Pour vérifier l'observation, sa *Tabula aequationum* lui donne d'abord la parallaxe, qui lui sert pour réduire les positions héliocentriques calculées d'après ses Tables d'Ephémérides à leurs valeurs géocentriques. Puis sa *Tabula Distantiarum* lui fournit les élongations géocentriques

$$+ 2'.59'', \qquad - 4'.56'', \qquad + 7'.49'', \qquad - 12'.44'',$$

ne différant, en mesure absolue, des rayons des orbites admis par lui que de

$$- 1'', \qquad - 4'', \qquad - 11'', \qquad - 16''.$$

Le résultat paraît donc aussi exact qu'on peut le désirer. Il est clair que la vérification inverse, c. à d. le calcul des angles de position dérivés des élongations observées, doit produire un effet opposé, et montrer l'observation sous le jour le moins favorable. Toutefois, le résultat reste encore satisfaisant. En effet, d'après les Tables modernes les angles de position géocentriques avaient dû être

$$251°, \qquad 91°, \qquad 280°, \qquad 83°,$$

et accusent des erreurs d'observation, de

$$+ 16°, \qquad - 1°, \qquad - 10°, \qquad + 7°.$$

Le journal de GALILÉE ne fournit aucune observation pour le même soir, mais la date du 11 avril, avec à peu près la même heure, figure sur la quatrième des planches des *Lettere Solari*: La mesure des distances, faites de la manière que nous avons suivie au chapitre III pour la première planche des *Lettere Solari*, donne pour les élongations, en diamètres de Jupiter d'après l'échelle des planches:

$$+ 2{,}75, \qquad - 4{,}75, \qquad + 7{,}13, \qquad - 12{,}6,$$

valeurs toutes, surtout la troisième, inférieures à celles des rayons des orbites admis par MARIUS.

A ces valeurs répondent, d'après l'échelle des planches, les angles de position

241°, 90°, 254°, 85°,

ce qui fournit avec les Tables modernes les erreurs

— 10°, — 1, — 27, + 2.

Il serait injuste de considérer ces chiffres comme donnant la mesure des erreurs d'une observation de GALILÉE. Ils dérivent d'un pronostic, calculé par GALILÉE d'après un premier essai de Tables, et ont dû subir l'influence de plusieurs causes d'erreurs, étrangères à ses observations; comme celles qui proviennent de la manipulation pour ainsi dire machinale de son Jovilabium, des erreurs du dessinateur et du graveur de ses Planches, et finalement encore de nos mesures. Ces erreurs ont pu s'accumuler aussi bien que se compenser.

L'observation suivante de MARIUS a été faite dans de meilleures conditions, au moins pour les Satellites III et IV. Elle est complètement chiffrée comme celle du 30 décembre 1610. MARIUS la décrit comme il suit: „Eodem anno 1613. 14. februarii hora 7. post merid. erat situs horum siderum ad Iovem talis: Tertius lucidus aberat versus ortum 7. min. quasi. Secundus ferè quinque, prope illum versus Iovem aderat subtilis & borealior, videlicet Quartus. Versus occasum à Iove distabat Primus 3. quasi minutis.

Il n'y a d'incertitude que sur la position du Satellite IV, puisqu'il n'est pas indiqué à combien il faut estimer la petite distance entre II et IV. Nous ne croyons pas nous tromper beaucoup en la comptant pour une demi-minute [1]).

L'observation complète devient ainsi:

	I	II	III	IV
Anspach 1613, 24 février h^{a}. 19.	+ 3,	— 5,	— 7,	— 4,5,

ce qui donne, avec les rayons 3, 5, 8, 13 adoptés par MARIUS, pour les angles de position:

270°, 90°, 119°, 160°.

[1]) Equivalant à + 2½ degrés dans l'angle de position.

Si l'on a égard à une parallaxe de 3°,4 les Tables Berberich-Damoiseau donnent

239°, 97°, 117°, 165°.

Voici comment on peut confronter cette observation de Marius avec une observation de Galilée.

Le journal de Galilée se termine à la date du 23 février 1613. Mais Alberi dit avoir recueilli dans les manuscrits de Galilée quelques observations éparses, faites par Galilée pour vérifier ses éphémérides. La première qu'Alberi publie (T. V, p. 98) est celle du 24 février, une heure et quart après celle de Marius. A cette époque Galilée évaluait les orbites à 5,3, 9, 14, 24 demi-diamètres de Jupiter de sorte que les élongations observées

$$+5',15'', \quad -8',40'', \quad -12, \quad -6',30''$$

donnent pour l'heure de l'observation de Marius les angles de position

$$268°, \quad 100°, \quad 118°, \quad 163°.$$

L'observation de Marius s'écarte des Tables modernes de

$$+31°, \quad -7°, \quad +2, \quad -5,$$

celle de Galilée de:

$$+29°, \quad +3°, \quad +1°, \quad -3°,$$

Les valeurs élevées des erreurs dans la position des Satellites I et II sont dues aux circonstances défavorables dans lesquels se présentaient les deux Satellites, près de leurs élongations maximales.

La vérification avec ses Tables fournit à Marius les élongations calculées

$$+2',57'', \quad -4°,48'', \quad -7°,0 \quad -4°,8''$$

au lieu de celles observées

$$+3',0 \quad -5°,0 \quad -7° \quad -5° + \varepsilon$$

où ε désigne l'intervalle entre les Satellites II et IV.

L'observation choisie par Marius et le contrôle qu'il appliquait se prêtaient donc de nouveau à une appréciation favorable de la précision de ses Tables, mais la rendait en même temps moins propre au calcul de l'époque ou des temps périodiques.

La troisième des observations, citées par MARIUS dans la Pars Tertia, lui servit pour illustrer sa théorie des écarts en latitude. Elle est du 20/30 janvier 1613, 6h du matin, lorsque le Satellite III se trouvait dans son élongation maximale à l'occident, et près de lui le Satellite IV à la distance d'un diamètre (unius minuti) plus rapproché de la planète, et déclinant vers le Sud. Les angles de position observées étaient donc $\Phi_3 = 270°$, $\Phi_4 = 327°$. D'après les Tables modernes la distance des deux Satellites serait en erreur de 0,2 diam. de Jupiter. Des deux autres Satellites MARIUS rapporte seulement qu'ils se trouvaient très près l'un de l'autre à l'orient. En effet, d'après les Tables modernes ils ont dû se montrer aux élongations — 2,95 et — 2,2.

La vérification de cette observation avec ses Tables fournit à MARIUS pour le Satellite III une coïncidence exacte, pour le Satellite IV une erreur de 7 secondes. La *Tabula Latitudinum* indique, pour le Satellite IV une déclinaison australe de 13 secondes.

Les observations du 1/11 avril, du 14/24 février et du 20/30 janvier 1613, largement imprimées avec leurs vérifications, occupent trois et demie des 45 pages du texte du *Mundus Jovialis*. Il n'est pas possible d'admettre qu'elles aient pu échapper à un lecteur même superficiel. Sont-ce donc là les passages dont parle GALILÉE, lorsqu'il dit qu'il y en a plusieurs dont il pourrait tirer des preuves très évidentes que MARIUS n'a jamais vu les Satellites de Jupiter? Mais GALILÉE au moins a tâché de cacher l'absence de preuves en se servant de l'expédient trop facile de les promettre pour une autre occasion. M. KLUG, plus hardi, examine les observations de MARIUS à sa manière. Voici comment.

Quant à la plus ancienne, celle du 30 décembre 1610, nous avons déjà remarqué qu'en citant la lettre d'ODONTIUS (page 446 de son Mémoire) M. KLUG arrête sa plume juste à l'endroit où suivent les détails les plus intéressants et certainement décisifs de l'observation, savoir les données numériques des distances. Il serait en effet impossible de faire accepter par un lecteur, qui les connût, la longue suite d'hypothèses arbitraires et de conjectures malicieuses que M. KLUG fait suivre et qui toutes tendent à prouver que MARIUS n'a pas pu, à une époque reculée, voir ou observer les Satellites. Ce n'est que tout à la fin, lorsque le procès intenté à MARIUS est pour ainsi dire déjà jugé, à la 124e des 128 pages de son Mémoire, que M. KLUG se résout à mettre sous les yeux des lecteurs, qui ont eu la patience de le suivre jusque-là, les chiffres de

l'observation de MARIUS, qui suffisent à renverser d'un seul coup l'artificieux échafaudage de ses accusations. Mais ici encore l'auteur, qui prétend avoir calculé des centaines d'observations de GALILÉE, n'a garde de contrôler cette observation de MARIUS. Il s'en débarrasse en ces termes (p. 510):

„Dans une lettre à ODONTIUS MARIUS raconte l'observation de l'éclipse „lunaire (29-30 décembre 1610), à l'occasion de laquelle il aurait vu très „bien à 5 heures du matin les quatre Satellites, deux à l'occident et deux „à l'orient de Jupiter, celles-ci aux distances $2\frac{1}{2}'$ et $4'$, celles là aux „distances $3\frac{1}{2}$ et 5 de Jupiter. Or cette observation est la seule que „nous ayons de MARIUS pourvue de l'indication des distances. Tout de „même (allerdings, le mot peut signifier aussi: „il va de soi") GALILÉE a „fait cette même nuit des observations de la Lune et des Satellites et „communiqué plusieurs fois ses résultats par lettre. Nous possédons „actuellement encore trois de ses lettres (GAL. Op. Tomes X et XI) 1. à „Clavius à Rome (30 décembre 1610) 2. à Benedetto Castelli à Brescia „(30 décembre 1610), 3. à un anonyme (février 1611)."

L'intention est évidente. Au lecteur, peut-être inquiet de devoir admettre que MARIUS a donc bien réellement observé les Satellites, on offre *un point de repos*, comme dit M. GERLAND, en lui permettant de croire que MARIUS a trompé son correspondant ODONTIUS, qu'il a frauduleusement tiré de quelque lettre de GALILÉE les détails de la constellation et les a présentés à son ami comme siens, ce qu'un lecteur inattentif pourra admettre d'autant plus facilement, qu'il ignore très probablement que l'échelle des mesures de GALILÉE, sans laquelle on ne peut déchiffrer ses observations, est tout à fait différente de celle de MARIUS, et que très probablement aussi il n'ira pas contrôler les lettres, citées par M. KLUG, pour connaître la nature des renseignements que GALILÉE, sur ses observations, a bien voulu communiquer à ses correspondants. En effet, les indications que contiennent les trois lettres citées sont tellement vagues et erronées qu'elles ressemblent plutôt à une mystification.

La première (*Edizione Naz. T. X, p.* 501) celle adressée à CLAVIUS, le célèbre professeur du collège des Jésuites à Rome, contient les figures des constellations *sans chiffres* avec la note écrite à côté de la seconde: *Quarta sub ♃ latebat.* Or, nous avons vu que le Satellite manquant était le Satellite I qui se trouvait *devant* le disque de la planète.

La deuxième lettre citée par M. KLUG est adressée au père CASTELLI

et se trouve accompagnée d'un postscriptum qui contient les trois constellations suivantes:

		1	2	5			3
Die 29 Dec. Hora seq. noctis 3ª		*	*	*	○		*
		1	2	5			3
Hora 7ª	Oriens	*	*	*	○		*
		1	2			5	3
Hora 10ª		*	*		○	*	*

Il est évident que ces chiffres n'offrent aucun sens raisonnable. Ils ne peuvent signifier les numéros d'ordre des Satellites parce que Galilée ne connaissait pas de Satellite 5. Ils ne peuvent indiquer les distances, parce que les chiffres les plus bas se trouvent aux distances les plus grandes. Mais, de plus, les figures mêmes sous tout à fait inexactes; les Satellites, marqués 1 et 2, seraient restés immobiles durant 7 heures, ceux marqués 5 et 3, immobiles pendant les quatre premières heures, auraient subitement pris leur élan dans les trois dernières. Enfin il n'y a pas question de la disparition d'un Satellite et l'heure de la troisième observation est inexacte [1]).

La troisième lettre citée par M. Klug, celle du 25 février 1611, n'existe qu'en copie. Viviani, qui dit l'a eue entre les mains ne sait pas à qui elle a été adressée. Mais comme elle est en italien, il est à peu près certain que c'était un compatriote de Galilée. Elle contient la description suivante des constellations:

---

[1]) Le postscriptum de la lettre nous semble d'une authenticité très douteuse. Il n'existe plus. De la lettre même on n'a qu'une copie sans postcriptum et laquelle, d'après M. Favaro, (Ed. Naz. X, p. 480, note) serait de la main de Castelli. Le postscriptum dans les éditions d'Alberi et de M. Favaro a été emprunté aux *Memorie e Lettere di Galileo Galilei* de Venturi (Parte I, p. 143) lequel, à propos de la lettre, dit: „Dans l'édition de Padoue il manque à la lettre citée le Postcriptum suivant qui toutefois se trouve après la même lettre manuscrite dans la Bibliothèque de Parme". M. Favaro remarque (l. c. p. 480) que malgré les plus actives recherches il n'a pu découvrir d'où est la lettre que Venturi a vue à Parme, et qui aujourd'hui ne se trouve plus dans la Bibliothèque Palatine. Il faut donc admettre l'un des deux: ou bien la lettre que Venturi dit avoir vue n'a jamais existé ou bien elle a disparu, sans que l'on puisse mettre la disparition sur le compte du charcutier qui, selon le récit de Targioni, vendait ses saucissons enveloppés de manuscrits de Galilée et mit ainsi Nelli sur la trace des papiers perdus; récit, que Nelli lui-même ne semble jamais avoir ni confirmé ni contredit. (Venturi. II. Praefazione).

„Le 29e décembre à 3 heures de la nuit ils étaient comme dans le premier exemple, à 7 heures celui proche de Jupiter se trouvait en conjonction avec lui et ne paraissait point, à dix heures il était passé de l'autre côté et les autres s'étaient rapprochés ou éloignés comme on voit dans la figure." M. Favaro ne reproduit pas la figure de la pièce, parce que, comme il dit, *elle est peu exacte.* Il l'emprunte à d'autres manuscrits de sorte qu'il n'est pas possible de savoir jusqu'à quel point la figure représente celle du document. Mais déjà l'insuffisance de la description verbale et l'erreur dans l'heure de la troisième observation font voir qu'il n'est pas possible de déduire de cette source quoi que ce soit qui approche de la précision des données de Marius.

L'insinuation de M. Klug repose donc uniquement sur des citations de parade, qui, examinées de près, prouvent plutôt le contraire de ce qu'on veut suggérer aux lecteurs. Elles montrent qu'il n'existe aucune preuve que Galilée a communiqué les détails chiffrés de son observation à ses correspondants, tandis que le fait bien constaté qu'il ne les a pas communiqués à Clavius rend invraisemblable qu'il les a transmis à d'autres. [1])

M. Klug s'occupe encore de l'observation, du 7/17 février 1613. Nous avons vu, dans la note de la page 504, quel singulier raisonnement il emploie non seulement pour écarter le témoignage de cette observation, mais pour la faire même servir de base à une nouvelle accusation de fraude: Marius est en erreur sur la cause de la faible apparence du Satellite IV qu'il dit avoir observée, *donc* il n'a pas observé du tout,

---

[1]) Au moment de mettre sous presse, M. H. G. van de Sande Bakhuyzen, le directeur de l'Observatoire de Leide, me communique une preuve tout à fait décisive de l'authenticité de l'observation de Marius. Il a pu identifier l'étoile fixe que Marius a aperçue au sud de Jupiter. C'est l'étoile de la grandeur 7,2: 21°. N°. 1714 de la *Bonner Durchmusterung.* Les Tables de Leverrier donnent pour l'ascension droite et la déclinaison de Jupiter, à l'heure de l'observation de Marius, les valeurs approchées:

$$\alpha = 7^h\ 31^m\ 21^s,\ \delta = 22°\ 11',$$

celles de l'étoile citée étant

$$\alpha = 7^h\ 31^m\ \ 9^s,\ \delta = 22°\ \ 3'$$

La distance, que Marius évalue à 10′ était de 8′,5. Galilée n'a pas remarqué cette étoile, au moins il ne l'a pas notée dans son journal, ce que l'on peut attribuer du champ trop restreint de sa lunette (7′,25), lequel ne permettait par de l'apercevoir en même temps que la planète. Voir Chapitre I p. 265, où nous avons estimé à 9′ le champ de la lunette de Marius.

il a menti lorsqu'il disait: „habeo observationem" et l'a construite d'après ses Tables.

Avec cela la verve imaginative de M. KLUG paraît épuisée. Il ne s'occupe pas des observations de la *Pars Tertia* du livre de MARIUS, que nous avons traitées plus haut. Il les laisse ignorer à ses lecteurs et fait imprimer (p. 511) cette sentence, stupéfiante pour quiconque a le privilége de pouvoir consulter un des rares exemplaires qui existent du *Mundus Jovialis*: „les observations du 9 janvier 1610, du 30 décembre 1610 et du 17 février constituent tout le matériel d'observation au sujet des Satellites que MARIUS nous a laissé."

La suppression de trois pages d'observations du *Mundus Jovialis* est le trait final de l'argumentation du professeur bavarois.

Elles ont pourtant bien leur importance, non seulement parce que chacune des observations supprimées apporte une preuve de plus que MARIUS a bien observé, mais surtout parce que celle du 14 février fournit des données chiffrées qui nous permettent de pousser plus loin le contrôle de l'exactitude des observations de MARIUS et des résultats que l'on en peut déduire.

Les deux observations du 30 décembre 1610 et du 24 février 1613 comprennent un intervalle de temps de 787 jours et 14 heures c.-à-d. 18902 heures. La première a été faite 10 jours, la seconde 16 jours avant l'opposition de Jupiter. Elles réalisent donc à très peu près la condition que MARIUS jugeait avec raison la plus favorable pour la détermination des temps périodiques, lorsqu'il recommandait à cet effet les observations dans lesquelles les positions relatives de Jupiter, du Soleil et de la Terre sont identiques [1]).

Les angles de position géocentriques, calculés au moyen de la *Tabula aequationum* de MARIUS furent (pp. 507 et 502)

24 février 1613	270°	90°	119°	160°
30 décembre 1610	237	233	154	157.

La correction qu'il faut appliquer pour convertir les arcs parcourus en valeurs hélocentriques n'est que très faible. MARIUS, d'après sa *Tabula aequationum*, a dû l'estimer à $+1°$. Les arcs parcourus deviennent ainsi

[1]) Voir la note page 269 (12) de notre chapitre I.

I	n_1 rév.	+ 34°
II	n_2 rév.	+ 218
III	n_3 rév.	+ 326
IV	n_4 rév.	+ 4.

Avec les temps périodiques grossièrement approchés de $42\frac{1}{2}$, 85, 172 et 402 heures on trouve $n_1 = 445$, $n_2 = 221$, $n_3 = 109$, $n_4 = 47$ et les arcs parcourus 160234°, 79778°, 39566 et 16924°, d'où suivent les mouvements moyens horaires

8°,47709, 4°,22061, 2°,09321, 0°,89535,

et les temps périodiques

			ε
$T_1 =$	$42^h,4674$	$= 1^j\,18^h\,28^m\,4^s$	-29^s
$T_2 =$	85 ,2946	$= 3\ 13\ 17\ 45$	$+10$
$T_3 =$	171 ,9794	$= 7\ 3\ 59\ 3$	$+26$
$T_4 =$	402 ,077	$= 16\ 18\ 4\ 37$	$+349$

Si l'on compare ces périodes à celles que les Tables Berberich-Damoiseau fournissent pour les mouvements moyens entre 30 déc. 1610 et février 1613, on trouve les différences ε indiquées dans le tableau. On voit que les erreurs n'atteignent pas, pour les trois premiers Satellites, une demi-minute.

Dans la première édition de son ouvrage Marius publia les valeurs suivantes

I	$1^j\,18^h\,28^m\,30^s$
II	3 13 18 0
III	7 3 58 57
IV	16 18 5 7.

Les faibles différences de + 26, — 15, + 6 et + 30 secondes avec les périodes que nous venons de déduire des observations du 30 décembre 1610 et du 24 février 1613, quoique n'offrant aucune importance au point de vue scientifique ou pratique, suffisent cependant pour montrer, que ce n'est pas en combinant ces deux dernières observations que Marius a obtenu les constantes qu'il publie dans son ouvrage.

Pour celle du 24 février 1613, cela était probable a priori, au moins à l'égard des deux Satellites I et II, lesquels se trouvaient dans leurs élongations maximales, c'est-à-dire dans les conditions que MARIUS avait reconnues lui-même comme les moins propres à fournir une détermination exacte des temps périodiques. MARIUS aura donc choisi, au moins pour la détermination des temps périodiques des deux premiers Satellites, une observation dans laquelle ils se présentaient aussi favorablement qu'au 30 décembre 1610, conformément au précepte qu'il énonce au passage cité par nous au chapitre I, p. 269 (12). Quant à l'observation du 30 décembre 1610, il est plus probable qu'elle lui a servi à cet effet, puisque les quatre Satellites se montraient à la fois dans des conditions favorables et que MARIUS lui-même signale cette observation comme bien réussie. Quant à l'époque du Satellite I nous avons déjà remarqué qu'elle n'a pas été déduite de l'observation du 30 décembre 1610 [1]), ce qui est bien naturel pour un observateur et calculateur exercé, lequel, pour éviter l'accumulation de petites erreurs dans les périodes, choisira de préférence une observation aussi tardive que possible. Aussi remarquons nous dans la seconde édition du Mundus Jovialis, avec quelque amélioration dans les périodes, qui ne présentent plus avec les périodes moyennes 1610—1614 que des erreurs de -1^s, $+27^s$, -99^s, $+172^s$, un progrès sensible dans l'époque du Satellite I de près de 10 degrés.

Mais ici nous atteignons déjà la limite qu'aucun observateur de la première moitié du 17me siècle n'a pu dépasser. Car l'effet des irrégularités dans le mouvement des Satellites est tel que les mouvements moyens pour l'époque janvier 1610—janvier 1614 et pour celle de décembre 1610—février 1613 diffèrent entre eux respectivement 1^s, 3^s, 11^s et 72^s, et que les fluctuations des termes de correction dans le Tableau des temps des conjonctions supérieures héliocentriques, atteignant pour le Satellite I la valeur de près d'une heure entière, expose l'observateur qui admet un mouvement régulier à des écarts de $8^1/_2$ degrés dont il ne peut être rendu responsable. Aussi ne pouvons nous accorder beaucoup d'importance à la comparaison de l'exactitude des déterminations à peu près contemporaines de GALILÉE et de MARIUS des mouvements moyens diurnes que l'on tire d'un côté des *Tabulae E* de GALILÉE [2]),

---

[1]) Voir Chapitre I, p. 269.

[2]) ALBERI V, page 16. GALILÉE la désigne quelques fois comme Tabula Nova et Tabulae ultimae. Il les a encore changées plus tard.

des deux éditions du *Mundus Jovialis* de l'autre, lesquelles nous avons confrontées avec celle des Tables modernes, avec les premières valeurs qui ont été publiées dans le *Discorso* de GALILÉE et celles déduites des deux observations authentiques de MARIUS.

Mouvement diurne des Satellites.

	I	II	III	IV
Tab. modern. 1610—1614	203°,409	101°,295	50°,2381	21°,4925
GALILÉE *Discorso*.....	203 ,6—	101 ,2—	50 ,2—	21 ,8—
GALILÉE Tabulae E 1613	203 ,419	101 ,300	50 ,2416	21 ,1925
MARIUS obs. 1610—1613	203 ,450	101 ,295	50 ,2370	21 ,4884
„ Mund. Jov. I...	203 ,417	101 ,290	50 ,2492	21 ,4843
„ „ „ II...	203 ,410	101 ,288	50 ,2464	21 ,4900.

Il est digne de remarque que le mouvement diurne du Satellite I, selon MARIUS 1610—1613 exact jusqu'au $^1/_{5000}$ de sa valeur, dérive de deux observations dont la première a été trouvée en erreur de — 2°, la seconde de + 31° dans la position du Satellite, ce qui porte à 33° l'erreur dans l'arc parcouru. M. KLUG [1]) trouve tout à fait inconcevable qu'avec des erreurs variant entre + 11°, 1 à + 24°,7 qu'accusent les *Tables* (ce qui ne peut donner dans un arc parcouru une erreur que de tout au plus 13°,3). MARIUS ait pu obtenir un temps périodique aussi exact que celui qu'il publie dans son ouvrage. Rien ne serait pourtant plus simple. La longueur de l'arc parcouru Φ et la grande vitesse angulaire H du Satellite I rendent facilement compte du fait, extraordinaire dans les yeux de M. KLUG. Le mouvement horaire H dérive directement de deux observations séparées par un intervalle de t heures, par la relation

$$H = \frac{\Phi}{t}.$$

Le temps périodique T, exprimé en heures, se déduit de ce résultat primaire de l'observation par

$$T = \frac{360}{H} \text{ c. à d. } \frac{t\,360}{\Phi}.$$

Une erreur $\Delta\Phi$ dans l'arc parcouru cause donc dans le temps périodique une erreur

[1]) Voir la note à la page 266 (9) de notre chapitre I.

$$\Delta T = -\frac{t\,360}{\Phi^2}\,\Delta\Phi = -\frac{360}{H\,\Phi}\,\Delta\Phi$$

inversément proportionnelle au produit du mouvement horaire et de l'arc parcouru.

Avec les valeurs de Φ_1, Φ_2 etc. et de H_1, H_2 etc. de notre calcul on trouve pour les erreurs des temps périodiques des quatre Satellites par degré d'erreur dans l'arc parcouru

$$0^s{,}94, \qquad 3^s{,}89, \qquad 15^s{,}64, \qquad 85^s{,}54,$$

c'est-à-dire pour le Satellite I moins d'une seconde de temps.

Faut-il encore nous occuper des raisonnements par lesquels M. Klug s'efforce de faire croire à ses lecteurs que Marius a très bien pu prendre ses temps périodiques, 1°. du *Sidereus Nuncius*, 2°. des planches des *Lettere Solari*, 3°. du *Discorso* de Galilée? thèses que l'auteur défend une à une, quoique Galilée, en présentant dans le *Discorso* les premières valeurs grossièrement approchées, reconnaisse lui-même que les observations du *Nuncius* n'étaient nullement assez exactes pour pouvoir les fournir, et que pour obtenir des planches des *Lettere Solari* des périodes aussi approchées que celles de Marius, il eût fallu en déduire les angles de position à une fraction de degré près, ce qui est matériellement impossible.

Dans le *Discorso* Galilée donna comme résultat de ses observations les mouvements horaires suivants:

8°,29′ incirca, 4°13′ prossimamente, 2°,6′ incirca, 54′ et quasi mezzo [1]), approchés respectivement aux $\frac{1}{509}$, $\frac{1}{253}$, $\frac{1}{126}$ et $\frac{1}{109}$ de leurs valeurs. Nous épargnons à nos lecteurs l'analyse des artifices par lesquels M. Klug s'évertue à montrer que ces données ont très bien pu fournir à Marius les temps reconnus exacts jusqu'à des limites comprises entre $\frac{1}{3000}$ et $\frac{1}{30000}$.

Les tours de force arithmétiques qu'essaie à ce sujet M. Klug peu-

---

[1]) Galilée ajoute à ces mouvements horaires, directement déduits de l'observation, les temps périodiques qui, comme nous l'avons vu, en dérivent par un second calcul. Il n'a pas songé à proportionner dans les deux systèmes de valeurs le degré d'approximation qui pour les temps périodiques est respectivement de $\frac{1}{85}$, $\frac{1}{256}$, $\frac{1}{272}$ et $\frac{1}{384}$.

vent paraître simplement ridicules mais en soi innocentes aux yeux de quiconque a quelque expérience de calculs; malheureusement ici l'enjeu de ces jongleries est l'honneur d'un astronome sérieux et dès lors elles prennent un autre caractère.

Aussi nous préférons la remarque de SCHEINER, qui, ignorant que MARIUS n'avait pas vu le *Discorso*, donne à entendre qu'étant donnés les chiffres approximatifs du *Discorso*, il était facile d'ajouter les autres, comme si l'adjonction de fractions de plus en plus subtiles au résultat quantitatif d'une observation ou d'une expérience fût d'autant plus facile qu'elles sont de moindre grandeur. Absurde au point de vue scientifique, la remarque tâche vainement de décliner le mérite de MARIUS, mais elle laisse au moins intacte sa bonne foi.

Après l'analyse des observations de MARIUS et des résultats qu'elles lui ont fournis, il reste peu de chose à dire de ses Tables. Au but que MARIUS s'était proposé en les publiant, celui de fournir les moyens de calculer une constellation des Satellites de Jupiter pour une époque quelconque, les Tables de MARIUS répondent dans les limites qu'imposaient de son temps aussi bien les moyens d'observation que l'imperfection des vues théoriques sur le mouvement des astres errants. Qu'il l'a senti lui-même et n'a pas usé son temps et ses forces à rechercher une plus grande exactitude, ainsi qu'il le remarque dans son ouvrage, témoigne de son bon sens scientifique et constitue, à notre avis, un mérite de plus.

V. LES PHASES DE MERCURE DÉCOUVERTES PAR SIMON MARIUS.

Les efforts tentés pour puiser dans les travaux de MARIUS des thèmes de médisance ne se sont pas bornés au *Mundus Jovialis*. On a même cherché des preuves de l'ignorance et de la mauvaise fois de l'astronome d'Anspach dans des observations qui témoignent de son habilité, comme celles qu'il décrit dans un de ses almanachs au sujet des phases de Mercure.

Pour le faire voir, il sera nécessaire de rappeler quelques détails oubliés ou passés sous silence dans l'histoire de la découverte des phases des planètes intérieures.

Le 5 novembre 1610 BENEDETTO CASTELLI, dans une lettre adressée à

Galilée, après avoir remarqué que selon Copernic la planète Vénus devait nécessairement présenter les phases de la Lune, lui demanda si, avec son merveilleux instrument, il avait pu observer une telle apparence [1]).

Un mois plus tard, le 11 décembre 1610, Galilée envoya à Giuliano de' Medici, l'ambassadeur du Grandduc de Toscane à la cour de Prague, son fameux anagramme, contenant, à ce qu'il disait, une nouvelle particularité récemment observée par lui et d'où l'on pouvait tirer la décision des plus grandes controverses en astronomie. La solution de l'énigme ne se fit pas attendre longtemps. Déjà le premier janvier suivant Galilée l'adressa à son correspondant à Prague. Il accompagna la description des phases de Vénus d'un commentaire qui devait faire croire qu'il n'avait pas seulement observé les phases de Vénus mais aussi celles de Mercure. En effet, il écrivit: „de cette admirable „expérience nous avons la démonstration certaine fournie par nos sens „(sensata et certa dimostrazione) de deux grandes questions restées „indécises parmi les plus grands génies du mondes. La première est que „toutes les planètes sont par elles-mêmes obscures (parce qu'à Mercure „il arrive la même chose qu'à Vénus), l'autre que Vénus tourne „nécessairement autour du soleil, comme encore Mercure et les autres

---

[1]) M. Favaro, dans *l'Edizione Nazionale des Opere di G. Galilei*, vol. X p. 480, place en tête de cette lettre la remarque qu'elle est autographe, et porte la date: Di Brescia, il 5 di 9 bre 1610, mais que le chiffre 9 s'y trouve changé en X. Une deuxième lettre, également de la main de Castelli est datée du 5 di X bre 1610 et porte à l'angle supérieur de gauche le mot Copia écrit de la même main. Les deux pièces, quoique traitant la même matière sont d'une rédaction tout à fait différente. Alberi (VIII p. 117) n'a publié que la première de ces deux lettres. Il mentionne la seconde en disant que, Galilée malade n'ayant pu répondre à la première, Castelli répéta sa demande en termes presque identiques le 5 décembre. Comme Alberi ne parle pas du changement de la date, on dirait qu'il a été appliqué après que la lettre a passé par ses mains. Aussi, et tête de la lettre qu'il imprime, il place la date: „Da Brescia 5 Novembre 1610. Nous ignorons, pour quelles raisons M. Favaro a substitué à la date du 5 9bre, la date changée, qu'il désigne comme *Corrigée*, du 5 décembre. Galilée, dans sa réponse du 30 décembre ne parle que de la lettre du 5 décembre. Sans remercier Castelli de son avis important, il dit qu'il a commencé à observer Vénus il y a trois mois, mais ne donne pas la date, à laquelle il a remarqué pour la première fois un défaut dans la figure ronde de la planète. Autant que nous sachions il n'a jamais accordé à son disciple l'honneur de l'avoir averti d'une nouvelle découverte facile à faire avec la lunette, mais qui par cela même pouvait facilement échoir à des concurrents.

„planètes, ce qui est bien admis par les Pythagoriciens, par Copernic, „par Kepler et par moi, *mais non prouvé par les sens* (*sensatamente*) *„comme aujourd'hui pour Vénus et Mercure.*

Kepler, s'étant rendu insuffisamment compte de l'influence considérable que devait avoir sur l'éclat de Vénus la grande variation de sa distance à la Terre, ce qui empêchait de remarquer une diminution de son éclat sous l'influence de ses phases, avait admis dans son livre *de Fundamentis Astrologiae certioribus* [1], que les cinq planètes ne sont pas seulement illuminées par le soleil, mais brillent encore de leur propre lumière, et avait confirmé cette conclusion plus spécialement pour la planète Vénus dans son ouvrage *Astronomiae pars optica* [2]). Il accueillit la nouvelle découverte de Galilée avec plus de joie encore que celles décrites dans le *Sidereus Nuncius*. Mais, comme le témoigne la Préface de sa *Dioptrice*, il ne fut pas dupe de la liberté que Galilée avait prise de s'attribuer également la constatation *de visu* des phases de Mercure. En donnant la traduction latine de la lettre de Galilée à Giuliano de' Medici, laquelle il reproduit en même temps dans le texte italien original, supprimé par Frisch [3]), Kepler, fidèle à son système de corriger Galilée sans le contredire, traduit les mots: „accadendo anco a Mercurio l'istesso che a Venere" par „ut de Mercurio jam eadem concipiamus quae de Venere." L'affirmation péremptoire de Galilée est ainsi transformée en conjecture.

Mais les Jésuites du collège Romain, qui avaient en vain tâché de distinguer dans Saturne les trois corps ronds décrits par Galilée comme séparés par un subtil fil noir [4]), tentèrent aussi d'apercevoir les phases de Mercure. Le 24 Juin 1611, le père Grienberger, en rendant compte de leurs vains efforts, pria Galilée de faire en sorte „que „l'on sache à Rome ce que c'est que cette lunette galiléenne et ce qu'on „y a vu." Galilée ne répondit que le 1er septembre par une lettre, qui dans l'Edizione Nationale occupe 24 pages, traitant presque entière-

[1]) Frisch, J. Kepleri Opera Omnia T. I p. 424, Thesis XXV.

[2]) l. c. T. II p. 293.

[3]) Frisch coupe la préface en deux. Il donne une partie dans son exposé intitulé: Literae Kepleri aliorumque mutuae de Jovis satellitibus etc., et l'autre dans le texte de la Dioptrice, en renvoyant pour ce qui y manque à son exposé.

[4]) Voir sa lettre du 13 nov. 1610 à Giuliano de' Medici (Ed. Naz. X p. 474). Bientôt après, dans sa lettre du 30 décembre à Clavius (l. c. p. 500) Galilée les dessina comme séparés par des espaces très sensibles.

ment de la Lune. Toutefois, on y rencontre un passage, où GALILÉE parle incidemment des radiations qui rendent difficiles de distinguer la forme exacte des astres et où il est dit: „d'où Mercure, pour être très „voisin du Soleil, illuminateur de toutes les planètes, reçoit sa lumière „tellement vive et se couronne si fièrement de rayons que même avec le „télescope il ne se laisse pas dépouiller d'une aussi splendide chevelure". C'était un aveu, vainement déguisé sous les fleurs rhétoriques de la phrase, qu'il n'avait pu rien distinguer de la forme de Mercure, ni par conséquent constater par les sens l'existence de ses phases. Il n'apprenait, d'ailleurs, aux Jésuites rien de nouveau, puisque, déjà le 23 juillet 1611, GRÉGOIRE DE ST VINCENT avait écrit de Rome à VAN DER STRAATEN à Bruges (Ed. Naz. XI p. 163): „Mercurium satis diu con„sideravimus quamvis raro; sed cujus figurae sit, adverti non potuit „propter scintillationes nimias: valde enim scintillat hoc astrum".

C'est à SIMON MARIUS que revient l'honneur d'avoir par l'observation avec la lunette hollandaise démontré ce que ni GALILÉE ni GRIENBERGER n'avaient pu constater.

Comme le faible diamètre de Mercure (6″, 6 dans sa distance moyenne selon les mesures de KAISER) rendait impossible de distinguer sa figure, MARIUS eut recours à une méthode indirecte, qui consiste à comparer les éclats que présente la planète dans deux positions, dont l'une appartient à la partie de son orbite qui est la plus rapprochée, l'autre à celle qui est la plus éloignée de la Terre. Il remarqua que Mercure se montre sensiblement plus brillant dans sa position éloignée, ce qui indique qu'elle subit en se rapprochant de la Terre un amoindrissement de la surface éclairée tournée vers la Terre, en d'autres termes: des phases lunaires. C'était donc constater un phénomène que KEPLER avait cru devoir arriver à Venus, mais dont l'absence l'avait induit à attribuer, à cette planète particulièrement, une lumière propre.

Cette découverte de MARIUS complétait donc celle de GALILÉE, que MARIUS d'ailleurs avait faite en même temps; elle était d'autant plus méritoire, qu'elle exigeait une attention plus soutenue, et qu'elle fut annoncée sans emphase. En effet, dans son Prognosticon pour l'année 1613 MARIUS, en mentionnant les nouveautés qu'il avait récemment aperçues dans le ciel au moyen de „l'instrument néerlandais", dit simplement: „Premièrement donc j'ai remarqué que Mercure est illuminé „par le Soleil de la même manière que Vénus et la Lune. Parce que „plusieurs fois je l'ai vu beaucoup plus lumineux et beau *in occasu*

„*matutino et in exortu vespertino* que dans son *occasu vespertino et exortu* „*matutino*, ce qui pourtant est tout à fait le contraire de ce qui arri- „verait en raison des distances à la terre."

Le sens de ces paroles n'est guère douteux.

Par *exortus* on entendait le mouvement apparent d'une planète par lequel, après sa conjonction avec le Soleil, elle semble sortir des rayons solaires, par *occasus* le mouvement contraire lorsque, se rapprochant du Soleil, elle va devenir invisible à nos yeux.

Pour les deux planètes intérieures les deux mouvements ont lieu deux fois dans une révolution synodique, savoir, l'exortus lorsque, après avoir passé entre le Soleil et la Terre, elles reparaissent à l'occident du Soleil comme étoiles du matin, — l'*exortus matutinus*, — puis après la conjonction supérieure, lorsqu'elles reparaissent à l'orient de cet astre comme étoiles du soir — l'*exortus vespertinus*. — De même, les termes *occasus matutinus* et *occasus vespertinus* marquent leur disparition comme étoiles du matin ou du soir. Marius indique donc clairement que, dans les deux parties de son orbite les plus éloignées de la Terre, l'occasus matutinus et l'exortus vespertinus, Mercure se montre sensiblement plus clair que dans les deux parties plus rapprochées. Pour un lecteur peu versé dans la terminologie astronomique de ce temps il était d'autant moins possible de s'y tromper, que Marius dans cette partie de son Prognosticon, — reproduite par M. Klug comme Appendice à son Mémoire, — avait dit, quelques lignes plus haut, que Vénus se montre en disque complet, lorsqu'elle se trouve près de son occasus matutinus et de son exortus vespertinus.

Voici maintenant comment M. Klug pense arriver à convertir en opprobre ce titre de gloire de Marius.

D'abord, il affecte quelque doute sur la véritable signification du passage cité. Il dit: „Le sens de cette remarque est *probablement* „que „Mercure, qui pourtant dans les parties éloignées de son orbite devait „proprement se montrer plus faible à cause de sa plus grande distance „que dans les parties plus rapprochées de la Terre, offre tout le con- „traire, puisque d'après l'observation de Marius il se montre plus „faible dans ses dernières parties, ce que Marius s'explique par ce que „Mercure ici forme un croissant comme Vénus."

Malgré son doute M. Klug a donc très bien compris. Mais il continue: „Marius veut donc dire peut-être qu'il a vu Mercure après sa „plus grande élongation orientale, in exortu matutino et avant celle

„occidentale in occasu vespertino, c'est-à-dire après le lever du Soleil à „l'orient et avant le coucher du Soleil à l'occident, plus faible" Mais ce *c'est-à-dire* est justement ce que MARIUS n'a pas voulu dire du tout. Après avoir ainsi jeté la confusion dans l'esprit du lecteur, par deux explications contraires des mots occasus et exortus, M. KLUG poursuit: „Si „MARIUS veut prétendre par là qu'il a vu Mercure en plein jour nous „remarquons là-dessus: Ni GALILÉE, ni GRIENBERGER ne purent voir „Mercure en plein jour, quoiqu'ils eussent *les meilleures lunettes de ce „temps et certainement beaucoup meilleures que* MARIUS [1]) et RUD. WOLF „dit à ce sujet" etc.

Suit ici une petite dissertation tirée du livre bien connu de WOLF sur la difficulté de voir Mercure en plein jour. Après cette diversion M. KLUG conclut:

„*D'après cela la remarque citée de* MARIUS *semble peu croyable.*"

Nous demandons à M. KLUG, où il a lu que GALILÉE et GRIENBERGER ont seulement tenté d'apercevoir Mercure en plein jour et comment, si le mot exortus doit signifier le lever au-dessus de l'horizon, on peut parler de l'exortus vespertinus d'un astre qui ne s'éloigne du Soleil que de 23 degrés?

En attribuant ainsi faussement à MARIUS une assertion insensée, dans le but de le rendre suspect de mensonge, l'auteur nous semble commettre un délit au moins aussi grave que celui qu'il veut imputer à l'astronome d'Anspach. Pour M. KLUG ce n'est là qu'une bagatelle, car il poursuit: „Mais ceci ne soit dit qu'en passant."

Puis revenant à la première et juste explication des paroles de MARIUS, il dit: „Le principal est ce qui suit: MARIUS veut avoir observé un „défaut de lumière après l'élongation orientale et avant l'élongation „occidentale de Mercure. Or, GRIENBERGER et GALILÉE ont institué sur „ce point des observations très minutieuses (eingehende) avec leurs „*instruments supérieurs.*"

Ceci encore est une assertion complètement arbitraire. M. KLUG, forcé de reconnaître que ni GALILÉE ni GRIENBERGER n'ont pu distinguer dans Mercure quelque forme, *inventé* simplement qu'ils ont aussi appliqué la méthode tout à fait différente employée par MARIUS, et qu'ils ont par conséquent suivi pendant une quarantaine de jours les

[1]) Les mots que nous imprimons en italiques marquent l'habitude de M. KLUG d'employer à chaque occasion comme arguments des faits qui n'existent que dans son imagination.

variations d'éclat de la planète. L'assertion, dans l'esprit de M. KLUG, ne pourrait faire aucun tort à l'habileté de GALILÉE, parce qu'il croit que ce que MARIUS dit avoir vu est une chose impossible. En effet, M. KLUG termine sa démonstration par ce curieux paralogisme:

„Aussi, d'après des considérations théoriques Mercure, tout à l'op-„posé des défauts de lumière que MARIUS prétend avoir observé, devait „avoir justement dans cette partie de son orbite, avant son élongation „occidentale et après son élongation orientale, son maximum d'éclat, car „chez Vénus également le maximum d'éclat se présente dans la partie „inférieure de son orbite avant et après sa conjonction inférieure comme „cela peut se voir et calculer (WOLF l. c. § 557). D'après tout ce que „nous venons d'avancer cette observation de MARIUS semble une duperie „et n'être construite que d'après des vues théoriques".

Voilà donc Marius reconnu coupable d'un tort, dont on n'a que trop de raisons d'accuser GALILÉE. Car le procédé de décrire comme effectivement observés des faits prévus par le raisonnement, ou de présenter comme appliquées des méthodes estimées possibles au point de vue théorique, était presque habituel à GALILÉE. Il l'a appliqué en faisant entendre qu'il avait prouvé par le témoignage des sens les phases de Mercure, comme aussi lorsque dans le *Sidereus Nuncius*, il affirma avoir mesuré les distances des Satellites de Jupiter par une méthode qu'il avait inventée, laquelle pourtant, comme nous l'avons démontré, était aussi impossible à réaliser que de vouloir rétrécir ou élargir dans une proportion voulue et mesurable la prunelle de ses propres yeux [1]). Il l'appliquera encore, pour sauver sa théorie des comètes, en prétendant qu'un vase tournant n'entraîne pas l'air ni même l'eau qu'il contient, et enfin encore lorsque, se basant sur sa fausse loi de l'isochronisme des oscillations d'un pendule, il décrit une expérience, qui montrerait que sur cent oscillations d'un pendule, s'écartant de 80° de la verticale, sont comprises exactement cent oscillations d'un autre pendule de même longueur, dont les élongations ne dépasseraient pas 2 ou 3 degrés [2]).

[1]) Voir la Note II de l'article: GALILÉE et MARIUS, *Archives Néerlandaises*, Série 2, Tome VIII, p. 173, où il est prouvé que le champ moyen d'une lunette hollandaise est proportionnel au diamètre de la pupille de l'œil de l'observateur.

[2]) Lettre de GALILÉE à REAEL. *Œuvres Complètes de Christiaan Huygens* Tome III, p. 489. En vérifiant l'expérience, comme l'ont fait les disciples du gymnase de Harlem, sous la direction du docteur H. A. J. VALKEMA

Marius devait savoir que Kepler, contre son attente, avait vu Vénus très brillante dans la partie inférieure de son orbite. Mais ayant conscience de la très grande différence dans les variations des distances, chez Vénus presque double de celle de Mercure, il estimait possible que Mercure présentât son maximum d'éclat dans les parties les plus éloignées de son orbite et M. Klug s'applique à prouver que Marius en était tellement convaincu, qu'il osait sur cette base, construire une observation imaginaire et la présenter faussement comme étant réellement faite.

M. Klug, au contraire, partant de ce qu'il a lu dans Wolf sur le maximum d'éclat de Vénus, identifie sans réfléchir les deux cas de Vénus et de Mercure, quoique l'endroit cité du livre de Wolf eût facilement pu le convaincre que sa conclusion n'est pas permise. En effet, Wolf y rend compte des recherches de Halley, lequel, en admettant que, à distances égales, les quantités de lumière envoyées par une planète à la Terre sont proportionnelles aux parties éclairées de son disque apparent, a calculé la distance à laquelle une planète intérieure doit présenter son maximum d'éclat. Halley trouve pour cette distance ρ l'expression

$$\rho = \sqrt{3R^2 + r^2} - 2r^{2)},$$

où R désigne le rayon de l'orbite de la Terre, r celui de la planète. Si l'on y substitue $R = 1$, $r = 0{,}723$, rayon moyen de l'orbite de Vénus, on trouve

$$\rho = 0{,}431.$$

Cette valeur indique que Vénus doit présenter son maximum d'éclat dans la partie la plus rapprochée de son orbite, à une distance héliocentrique d'environ 22° de part et d'autre de sa conjonction inférieure.

Mais si l'on substitue $r = 0{,}3871$, valeur du rayon moyen de l'orbite de Mercure, on obtient

$$\rho = 1{,}00,$$

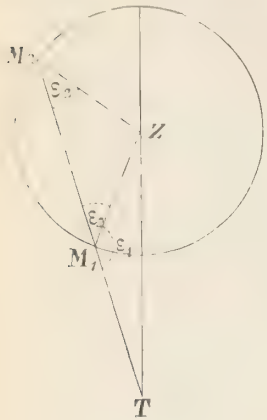
ce qui fait voir déjà que les considérations théoriques, sur lesquelles s'appuye M. Klug, assignent à Mercure le maximum d'éclat dans la partie la plus éloignée de son orbite [1]). Et si l'on poursuit un peu plus

Blouw, on trouve qu'il est presque impossible de maintenir à 80° l'élongation d'un pendule simple, mais que déjà avec 60° on ne parvient pas à limiter à moins de 6 sur cent la différence des nombres d'oscillations des deux pendules.

[1]) Comme il ne s'agit ici que d'une valeur approchée, Halley néglige les excentricités des orbites et leurs inclinaisons.

[2]) Aux quadratures on a: $\rho = \sqrt{1 - r^2} = 0{,}922$.

loin les conséquences de la théorie de Halley, on arrive à des conclusions bien autrement probantes en faveur de l'observation de Marius.



A cet effet on n'a qu'à calculer le rapport q des éclats que Mercure, d'après la théorie de Halley, doit présenter dans deux positions, identiques quant à la distance géocentrique M_2TZ, $M_1TZ = \eta$ de Mercure au Soleil, mais différentes quant à la situation héliocentrique, l'une appartenant à la partie la plus éloignée de son orbite, l'autre à la partie la plus rapprochée.

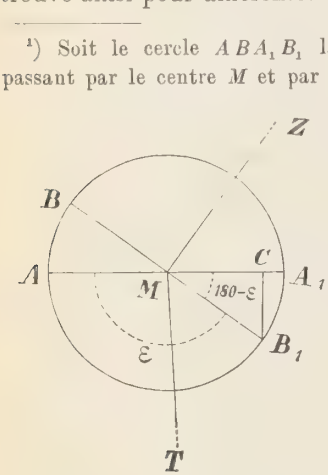
En désignant par C_e et C_r ces deux clartés et par ε_2 et ε_1 les angles de phase c'est-à-dire les angles entre les directions Mercure-Soleil et Mercure-Terre, dans les deux positions M_2 et M_1, on trouve [1])

$$q = \frac{C_e}{C_r} = cot^2\,\varepsilon_2 \left(\frac{sin(\varepsilon_2 - \eta)}{sin(\varepsilon_2 + \eta)}\right)^2.$$

Des deux facteurs du second membre le premier exprime l'influence des phases, c'est-à-dire le rapport des parties éclairées du disque, le second n'est autre que le carré du rapport inverse des distances.[1]) On trouve ainsi pour différentes valeurs de η:

---

[1]) Soit le cercle ABA_1B_1 la section du corps de la planète par un plan passant par le centre M et par les centres de la Terre T et du Soleil Z, BB_1 perpendiculaire sur MZ, AA_1 sur MT, d'où $TMZ = AMB_1 = \varepsilon =$ l'angle de phase. L'arc BA_1B_1 sera la partie éclairée du cercle, l'arc A_1B_1A la partie visible de la Terre, la partie A_1B_1 commune à ces deux, éclairée et visible de la Terre, se projettera sur le disque en A_1C. Le rapport p de CA_1 à AA_1 sera $(1 - cos\,(180° - \varepsilon)) : 2$. Il en sera de même dans chaque section parallèle à ABA_1B_1 de sorte que $p = cos^2 \frac{1}{2}\varepsilon$ sera le rapport de la partie éclairée du disque au disque entier. Le rapport q du texte sera donc $\frac{cos^2 \frac{1}{2}\varepsilon_2\, \rho_1^2}{cos^2 \frac{1}{2}\varepsilon_1\, \rho_2^2}$ lorsque ρ_1 et ρ_2 désignent les distances TM_1 et TM_2. Mais comme on a $\varepsilon_1 = 180 - \varepsilon_2$ et $\rho_1 : \rho_2 = sin\, M_1ZT : sin\, M_2ZT = sin\,(\varepsilon_2 - \eta) : sin\,(\varepsilon_2 + \eta)$ le rapport q pourra s'écrire comme dans le texte.



$\eta =$	5°	10°	15°	20°
$\varepsilon_2 =$	18°	27°	42°	82°
$q =$	15,58	4,10	1,99	1,26.

La supériorité de l'éclat de Mercure dans ses positions éloignées serait donc très marquée.

La théorie de HALLEY, adoptée plus tard par EULER, est indubitablement la plus simple, celle qui s'impose pour ainsi dire tant que, à défaut de données d'observation, on ignore l'influence que la nature de la surface et de l'atmosphère de la planète peuvent avoir sur la quantité de lumière réfléchie dans une certaine direction et pour diverses directions des rayons solaires incidents.

Des recherches relativement récentes sur l'éclat de Mercure, notamment celles de M. G. MÜLLER (*Astr. Nachr.* T. 133, p. 47), ont montré que l'influence des phases sur l'éclat de Mercure, mesuré au photomètre, est beaucoup plus sensible que ne le fait prévoir la théorie de HALLEY. M. MÜLLER a déduit de ses mesures, comprenant des angles de phase de 50°,73 à 120°,89, deux formules empiriques, exprimant l'ordre de grandeur de Mercure selon l'échelle usuelle des étoiles fixes. La première, de forme linéaire, s'il est permis de l'appliquer jusqu'à l'angle de phase = 18° correspondant à $\eta = 5°$ [1]), donne pour q, au lieu des valeurs inscrites plus haut:

$\eta =$	5°	10°	15°	20°
$\varepsilon =$	18°	27°	42°	82°
$q =$	36,0	13,1	7,9	3,0

considérablement plus élevées que celles fournies par la théorie de HALLEY. L'influence des phases sur l'éclat de Mercure est donc très sensible et ne pouvait échapper à MARIUS.

Il ne peut donc plus rester de doute que SIMON MARIUS a été le premier à constater les phases de Mercure.

A suivre.

---

[1]) Selon M. E. JOST (Mittheilungen der Grossh. Sternwarte zu HEIDELBERG 1901, 1) les observations, faites par lui pendant l'éclipse totale du Soleil, le 28 Mai 1900, légitimeraient l'extrapolation de la première formule de M. MÜLLER jusqu'à $\eta = 2°$.

A corriger dans les Chapitres I—III.

P. 269 (12) ligne 7 . . . . 7° lisez 2°.
„ 283 (26) „ 1 biffez une fois *dans le journal.*
„ 292 (35) „ 7 *bord* lisez *centre.*
„ 294 (37) „ 7 de la note *deux à gauche* lisez *deux à droite.*
„ 307 (50) Remplacez les angles géocentriques

194°	249°	13°	276°

par celles héliocentriques

192°	247°	11°	274°.

PROGRAMME

DE LA

SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES

À HARLEM

POUR L'ANNÉE 1907.

La 155e assemblée générale de la Société Hollandaise des Sciences eut lieu le 25 mai 1907. Son Altesse Royale le Prince des Pays-Bas, duc de Mecklembourg, Protecteur de la Société, 70 Directeurs et Membres y assistèrent.

Dans son discours d'ouverture le Président, s'adressant au Royal Protecteur, Lui exprima la reconnaissance des Directeurs et Membres, pour la nouvelle marque d'intérêt qu'Il venait de donner à la Société en l'honorant de Son auguste présence.

Après avoir commémoré, par quelques paroles de regret, les pertes que la Société avait subies par la mort des membres nationaux: Dr. C. A. J. A. Oudemans et Dr. H. W. Bakhuis Roozeboom, et des membres étrangers: L. Boltzmann, H. Moissan et M. P. E. Berthelot, le Président souhaita la bienvenue aux Directeurs Me. C. C. Geertsema, Jhr. Ch. van de Poll, J. Fontein, Me. B. J. D. Zubli et W. Zimmerman, ainsi qu'aux membres Dr. J. C. Kluyver, Dr. J. Cardinaal et Dr. W. Kapteyn, qui assistaient à la séance pour la première fois.

Le Secrétaire lut ensuite le rapport annuel suivant des travaux de la Société:

Depuis notre dernière réunion générale les travaux de la Société ont consisté comme d'ordinaire dans la publication de trois ouvrages:

les Œuvres complètes de Christiaan Huygens, les Mémoires in-4° et les Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.

Pour ce qui regarde le premier ouvrage, nous avons pu profiter de nouveau de l'active collaboration de notre honoré confrère M. le Prof. KORTEWEG. Après l'achèvement des *Travaux de Jeunesse* de CHRISTIAAN HUYGENS, lequel a suivi de près la publication de notre dernier rapport, M. KORTEWEG a immédiatement entrepris un travail bien plus considérable encore, savoir la rédaction du premier mémoire que HUYGENS avait destiné à la publicité et qui se rattache, au point de vue chronologique, aux remarquables exercices de sa jeunesse. Cette étude du jeune CHRISTIAAN, âgé seulement de 21 ans, se rapportait à un sujet où s'était exercé le génie, toujours admirable, d'un des plus grands physicomathématiciens de l'antiquité, celui d'après lequel le vieux CONSTANTIN HUYGENS, dans sa fierté paternelle, qualifiait les promesses de son second fils en l'appelant, „mon jeune ARCHIMÈDE".

Les principes bien connus de l'équilibre des corps flottants, donnés par ARCHIMÈDE, se prêtent à la solution de plusieurs questions, dont les mathématiciens se sont occupés jusque de nos jours. Telle, par exemple, la question d'expliquer mathématiquement comment il arrive que des poutres flottant sur l'eau tournent d'ordinaire une face vers le haut, si elles sont en bois de chêne, et une arête si elles sont en sapin. Elle donna à l'ancien professeur de mathématiques à l'Académie Militaire Royale de Bréda, BADON GHYBEN, l'occasion de proposer sur ce sujet une question de concours, et de traiter lui-même cette question, lorsque la réponse donnée par notre ancien confrère BAEHR ne lui parut pas tout à fait suffisante. BADON GHYBEN ne pouvait savoir que le même sujet avait été traité, en même temps que d'autres problèmes, à peu près deux siècles plus tôt et presque d'une manière tout aussi complète par CHRISTIAAN HUYGENS. HUYGENS, en effet, n'a pas donné suite à son intention de faire imprimer son premier travail personnel, bien qu'il ressorte de sa correspondance qu'il reconnaissait la portée de quelques-unes des propositions qu'il avait démontrées, parmi lesquelles il y en a une que M. le Prof. KORTEWEG a jugé tellement originale et d'une telle importance comme moyen d'investigation, qu'elle mérite d'être appelée le théorème de HUYGENS.

HUYGENS a poussé sa modestie au sujet de ce premier travail jusqu'à marquer sur son manuscrit, deux ans plus tard: „tout ceci doit être modifié"; à un âge plus avancé il ajouta: „La plupart de ces choses, si pas toutes, doivent être rejetées, parce que ces considérations ont peu d'utilité, bien qu'ARCHIMÈDE s'en soit occupé"; et enfin:

„J'ai écrit ces considérations sur les corps flottants dans ma première adolescence, lorsqu'aucun autre sujet plus important ne s'était encore présenté à mon esprit. Mais il n'y a aucune utilité dans ces questions, ou du moins fort peu. Parmi les premières propositions on pourrait en conserver quelques-unes, et ainsi aussi la partie qui traite des cylindres flottants. Le reste peut être jeté au feu."

Ce que HUYGENS voulait sauver de la destruction, c'étaient précisément les parties dont il faisait mention dans ses lettres.

Nous trouvons exprimée ici pour la première fois cette opinion propre à HUYGENS, que des considérations mathématiques sont sans valeur lorsqu'elles restent sans application pratique. Il l'a exprimée plus tard d'une façon beaucoup plus formelle lorsque, dans sa correspondance avec LEIBNIZ par exemple, il déclara que c'était perdre son temps que d'imaginer des lignes courbes, dans le seul but d'avoir l'occasion de traiter des problèmes géométriques particulièrement difficiles.

De notre temps on est d'un autre avis à ce sujet. L'expérience acquise depuis HUYGENS a prouvé que l'application des mathématiques à l'étude de la physique et de la mécanique demande de nouvelles méthodes, de nouveaux concepts, de nouvelles formules, dont l'usage exige des exercices de plus en plus étendus et de plus en plus approfondis: en quelque sorte de nouveaux outils intellectuels, dont le perfectionnement constitue une branche d'études en elle-même.

Heureusement, HUYGENS n'a pas exécuté sa sentence. Et heureusement aussi aucun objet d'art scientifique, — car le travail de HUYGENS doit être jugé comme tel —, n'échappe à un œil perçant et exercé comme celui de M. le Prof. KORTEWEG, le savant si parfaitement au courant de l'état des sciences mathématiques, à l'époque de HUYGENS aussi bien qu'à l'époque actuelle.

Pour découvrir et apprécier à leur juste valeur les trésors que le génie de HUYGENS nous a laissés, M. KORTEWEG entreprit une étude préparatoire, qui le mit au courant de tout ce qui a été écrit, avant et après HUYGENS, sur les corps flottants; puis il fit lui-même un examen de la question qui lui procura cette maîtrise, qui est la condition essentielle pour exposer clairement le travail d'un autre. C'est ainsi que le manuscrit de HUYGENS: „De iis quae liquido supernatant", dépouillé de la poussière de deux siècles et mis dans un cadre convenable, est devenu une acquisition précieuse pour la galerie des ouvrages de notre éminent compatriote.

Ce que notre honoré confrère a ainsi réalisé montre par un exemple particulièrement instructif ce que comporte l'examen historique dans le domaine des sciences exactes; il prouve que seule l'étude approfondie des écrits des savants peut élever notre jugement sur leur mérite au-dessus du niveau de discours emphatiques remplis de louanges accordées sans critique et bien souvent sans raison.

C'est en rapport avec cette partie des travaux de HUYGENS, laquelle vient d'être terminée et imprimée, que je fais mention d'un incident qui ne doit pas être oublié dans cet aperçu annuel.

Dans la période de 1870 à 1888 notre Société a décerné tous les deux ans de grandes médailles en or à des savants nationaux ou étrangers, qui s'étaient particulièrement distingués dans l'étude des sciences physiques, savoir une médaille à l'effigie de HUYGENS pour ceux qui cultivaient les sciences dites exactes, une autre portant l'effigie de BOERHAVE pour les plus éminents dans les sciences naturelles. Lorsqu'au bout de vingt ans le programme des décernements fut rempli, la Société décida, sur la proposition d'une commission de dix membres, de donner aux moyens que les Directeurs mettent à la disposition de la Société la destination qu'ils ont aujourd'hui, et qui fait que tous les deux ans nous avons à examiner quelle est l'étude ou l'entreprise qui, dans notre pays, mérite tout particulièrement d'être soutenue par notre Société.

Voilà comment le Magnum Praemium de notre Société, — la plus haute distinction honorifique qu'elle puisse accorder à un homme de sciences —, n'a plus été délivré depuis 1888. Mais lorsque, le 10 octobre de l'année dernière, le 25e anniversaire de la promotion de M. KORTEWEG au professorat offrit aux Directeurs l'occasion de lui donner un témoignage de toute leur gratitude, pour l'activité avec laquelle il contribua, dès le commencement, à la publication des œuvres de HUYGENS sous leur forme actuelle, ils jugèrent qu'ils ne pouvaient remplir plus dignement ce devoir qu'en lui décernant une dernière fois la grande médaille de HUYGENS.

Et, quoique la Direction de la Société ne pût se juger compétente pour émettre un avis sur la position que notre honorable confrère occupe parmi les mathématiciens contemporains, conformément à la destination primitive de ce prix d'honneur, elle n'en était pas moins convaincue qu'en accordant le Magnum Praemium au Professeur KORTEWEG, à ce point de vue là aussi, sa décision était suffisamment justifiée.

Le Secrétaire eut le grand privilège de pouvoir aborder, en ce jour mémorable, le jubilaire quelque peu rétif (car il ne se vante pas plus que HUYGENS de ses propres travaux), et de lui exprimer en des paroles bien intentionnées les sentiments des Directeurs.

Quant à nos Mémoires in-4°, l'impression de l'ouvrage couronné de M. le Dr. CRAMER, sur la variation par bourgeonnement, n'avança pas aussi rapidement que nous ne l'avions espéré. Nous n'en sommes encore qu'à la feuille 20. La cause n'en doit pas être cherchée chez l'auteur, actuellement domicilié à Buitenzorg, ni chez ceux qui, dans notre pays, se sont obligeamment chargés de la traduction allemande et de la correction, mais chez l'imprimeur. Mais il y a tout lieu d'espérer que dans la suite les progrès seront plus rapides. Entretemps un autre mémoire a été mis à l'impression en même temps que celui-là et publié par notre Société, savoir, le travail de M. H. M. QUANJER sur les maladies les plus importantes du chou en Hollande septentrionale.

Au sujet de la publication de la série de nos Mémoires, nous pouvons nous rejouir de l'intérêt croissant manifesté aussi bien dans notre pays même qu'à l'étranger; cela tient probablement à ce que les derniers sujets traités se rapportaient à une des sources les plus importantes de la prospérité nationale, l'agriculture. C'est à cette branche, dont l'avancement a constitué une des occupations principales de notre Société dans les premières années de son existence, que se rapporte aussi une contribution importante, fournie tout récemment grâce aux soins de nos confrères MM. les Proff. BEIJERINCK et MOLL.

Il y a trois ans, cette assemblée eut à choisir entre deux propositions, relatives aux recherches du domaine de la Physiologie qui avaient le plus de droit à un appui financier.

La première proposition était celle de relier électriquement le laboratoire de physiologie avec l'hôpital de l'Université de Leyden, afin de mettre M. le Prof. EINTHOVEN en état d'examiner si le galvanomètre à corde, qu'il venait d'inventer, pouvait être employé pour enregistrer exactement, par voie électrique, les particularités du fonctionnement du cœur de malades, distants de l'appareil d'environ 1½ kilomètre.

Le deuxième sujet était une étude de la tige du lin.

Le choix fut fixé sur la première proposition et nous avons tout lieu

de nous féliciter de l'appui que la Société accorda à M. le Prof. EINTHOVEN, car le résultat de l'épreuve, dans la réalisation de laquelle il y avait à prévoir qu'on rencontrerait des difficultés très grandes, quoique non insurmontables, a dépassé nos espérances d'une façon éclatante.

Les fils de communication, établis sur la proposition et moyennant l'appui de notre Société, n'ont pas seulement répondu au but, mais M. EINTHOVEN s'en sert maintenant d'une façon ingénieuse pour transmettre au laboratoire de physiologie les *bruits* du cœur des malades de l'hôpital. Ces bruits reçus dans un microphone et transformés en vibrations électriques; se trammettent sous cette forme au laboratoire où les vibrations électriques sont de nouveau transformées en des vibrations de la corde de l'appareil merveilleux de M. EINTHOVEN, et fixés dans les plus subtils détails sur une plaque photographique, animée d'un mouvement rapide, sur laquelle ensuite ils peuvent être étudiés à loisir.

Cependant l'autre sujet n'a pas été perdu de vue. Voici ce qu'en dit le rapport que la Commission présenta alors et qui sur la proposition des Directeurs fut adopté par votre assemblée:

„M. le Prof. BEIJERINCK a fixé l'attention sur l'importance que l'industrie du lin avait jadis pour la prospérité de notre pays, sur sa décadence subséquente et sa disparition presque complète, alors qu'elle se maintenait en Belgique, à ce que l'on prétend grâce à des circonstances plus avantageuses qui s'y présentent pour l'opération du rouissage. Pourtant, d'après notre honoré confrère, qui a fait une étude particulière de ce sujet en rapport avec ses recherches bactériologiques, la méthode employée en Belgique pour cette opération doit être considérée comme fort primitive. Il est d'avis que, quand les indications empiriques très superficielles auront été étendues et modifiées par les idées qu'auront suggérées l'examen physiologique de la croissance de la tige du lin, on pourra trouver une méthode plus conforme au but que l'on se propose, et qui s'appliquerait dans notre pays tout aussi avantageusement qu'ailleurs. La découverte d'un pareil mode opératoire, à laquelle conduirait une étude systématique de la question, pourrait ranimer dans notre pays et faire prospérer une branche d'industrie, capable d'acquérir une grande importance."

En s'exprimant ainsi, M. BEIJERINCK avait surtout en vue une recherche entreprise par une botaniste hollandaise, Mlle. TINE TAMMES, travaillant au laboratoire de M. le Prof. MOLL à Groningue.

Le rapport de la Commission mentionne expressément que sa proposition, de donner la préférence à l'épreuve de M. le Prof. Ernst Moll, lui avait été rendue facile d'une part par l'assentiment de M. Beijerinck lui-même, d'autre part par l'assurance donnée par le Président que, si Mlle. Tammes menait son étude à bonne fin, la Direction n'hésiterait certainement pas à faire imprimer son travail dans les Mémoires et à rétribuer convenablement l'auteur de sa peine. Encouragée ainsi, Mlle. Tammes a poursuivi ses recherches pendant trois ans et vient de les terminer. Les Proff. Beijerinck et Moll ont émis sur ce travail un rapport qu'ils ont présentés aux Directeurs. Le voici en entier.

„Ce mémoire est le fruit d'un travail de trois années, entrepris pour répondre à une question posée par la Société Hollandaise. Par suite d'indispositions de l'auteur, ce mémoire vient d'être terminé maintenant, bien que la question lui eût été confiée déjà en 1904. Ce retard a pourtant été favorable à l'ouvrage à plus d'un point de vue, car il contient maintenant diverses recherches importantes, qui auraient manqué si la réponse avait été donnée plus tôt. Le sujet a été traité d'une façon purement scientifique, et ne vise pas directement le but utilitaire, comme il convient à un travail scientifique; le mémoire n'en contient pas moins bon nombre de faits nouveaux qui, à l'occasion, auront sans aucun doute leur importance pour la pratique de la culture du lin.

Un court aperçu du contenu du mémoire servira le mieux à donner une idée de la valeur de ce travail très intéressant. On peut le subdiviser convenablement en quatre parties plus ou moins indépendantes, mais présentant partout certains rapports.

La première partie, comprenant les chapitres I et II, donne un aperçu succinct de ce que nous savons au sujet de la généalogie du lin, de ses relations systématiques, avec indication particulière des caractères distinctifs, qui indiquent une variation fluctuante ou une mutation. On y trouve traitées aussi des formes voisines, notamment le *Linum crepitans* bien connu, qui est nommé partout et cultivé çà et là, mais qui n'a jamais été décrit convenablement ni soumis à un examen scientifique. Cette plante a été décrite ici en détail.

Dans une 2e partie, comprenant les chapitres III et IV, viennent de nouvelles recherches étendues, d'un genre statistique, relatives à divers caractères macroscopiques de la tige, du fruit et de la semence. Il s'agit ici d'un examen expérimental de la variabilité fluctuante sous l'influence de l'engrais et de l'espace. Les résultats obtenus donnent lieu à des

considérations théoriques d'importance capitale, apprenant principalement que chaque caractère dispose d'un domaine de variabilité assez restreint, et que l'endroit qu'une courbe déterminée occupe dans ce domaine dépend des circonstances extérieures. Les déplacements que ces courbes peuvent subir sous l'influence de ces circonstances sont accompagnés de changements de forme, qui trouvent parfaitement une explication en rapport avec la limitation du domaine de la variabilité. Ces considérations fort originales promettent de devenir très importantes pour la pratique.

Dans cette même partie l'auteur examine encore d'une façon détaillée la corrélation entre divers caractères de la tige; ces recherches-là aussi sont d'une importance tout à fait générale.

La question si importante de la corrélation est examinée ici pour la première fois sous toutes ses faces et développée théoriquement. De plus l'auteur y établit pour la première fois expérimentalement l'influence des circonstances extérieures sur la corrélation. La manière dont toute cette question de la corrélation est traitée peut servir de modèle à ceux qui, à l'avenir, se proposent d'étudier ce sujet aussi difficile qu'intéressant.

La 3e partie (chapp. V et VI) contient les recherches microscopiques faites par l'auteur. C'est une histoire complète du développement de la tige et une description tout aussi complète et détaillée de la structure de la tige adulte. Il y a lieu d'attirer spécialement l'attention sur la description de la structure du système fibreux, mais sur l'épiderme aussi et sur d'autres points encore l'étude a appris des choses curieuses.

Les rapports des tissus à diverses hauteurs de la tige ont également été examinés. Cette étude a appris que le point de végétation a une activité périodique, qui fait que la tige primaire a une forme en double cône, et est renflée au milieu, la partie inférieure étant complétée par du bois secondaire.

Vient enfin une étude expérimentale des rapports des tissus primaire et secondaire dans diverses conditions. Cette étude a appris e. a. que l'espace dont disposent les individus a peu d'influence sur les tissus primaires, auxquels appartiennent les fibres, mais beaucoup au contraire sur la formation du bois secondaire. Voilà encore des résultats importants pour la pratique.

Enfin, la quatrième partie, chapitre VII, contient la description de la fibre de lin. Toutes les questions au sujet desquelles il y a des

divergences d'opinion sont examinées ici et définitivement résolues; l'auteur montre que toutes les fibres sont d'origine primaire, que dans la suite elles ne se dépassent pas mutuellement en croissant (gleitendes Wachstum), que leur croissance est locale, notamment au sommet, que l'épaississement des parois se présente aussi localement, que des fibres normales ne se lignifient pas et que des fibres lignifiées sont encore capables de s'accroître, que les soi-disant déplacements, au sujet desquels on a tant écrit, se produisent d'une façon *purement* mécanique par le traitement des tiges, que la croissance en longueur des fibres est limitée, mais que la croissance en épaisseur, tout comme celle des membranes, se poursuit jusqu'à la fin de la vie de la plante.

Très importante enfin est une étude détaillée des rapports qui existent entre la longueur et l'épaisseur de la tige d'une part, et divers caractères de la fibre d'autre part. Les résultats obtenus par voie statistique font connaître ici certaines relations, utiles aussi pour la pratique, surtout à ce point de vue que le nombre et l'épaisseur des fibres sont en raison inverse des caractères de la tige.

Il résulte suffisamment de l'aperçu rapide qui vient d'être donné du mémoire de Mlle. Tammes, qu'il est riche en constatations originales et en expériences étendues, qui ont conduit son auteur à des considérations théoriques, traitées à fond et d'une manière vraiment scientifique. La matière est traitée avec ampleur, le mode d'exposition est très net et très intuitif et l'ouvrage est illustré par un grand nombre de tables et de dessins.

Ce mémoire est sans aucun doute ce qu'on a écrit de mieux sur ce sujet et il est destiné à garder longtemps ce caractère. Mais en outre il contient un grand nombre de résultats d'ordre général, de grande importance pour quiconque s'adonnera en particulier à l'étude de la variabilité fluctuante. Il peut servir de modèle à tous ceux qui désirent faire des recherches dans le domaine de la systématique expérimentale."

Après un rapport aussi élogieux, la Direction s'empressera de satisfaire à la proposition des deux professeurs, qui ont fait tout leur possible pour enrichir nos *Mémoires* d'un travail, ne nous apportant pas seulement de nouvelles connaissances scientifiques importantes, mais ouvrant aussi la voie à des applications d'un intérêt pratique.

Au sujet du troisième groupe de nos publications, les *Archives*

Néerlandaises, j'ai à dire comme d'habitude que 5 livraisons en ont paru dans l'année écoulée. De plus deux livraisons, qui paraîtront ensemble, sont presque prêtes.

Dans le cours des années, nous avons dû augmenter peu à peu la grosseur des tomes, dont la capacité était déjà bien plus grande depuis le commencement de la 2e série, et il est probable que l'abondance des matières nous forcera à continuer dans cette voie.

Le Secrétaire communique ensuite que trois réponses ont été reçues à des questions de concours dont le délai expirait le 1er janvier 1907; ce sont:

un travail portant la devise: „Quand on flâne le rôti brûle", en réponse à la question I, savoir: La Société demande un aperçu critique des diverses théories des phénomènes thermo-électriques;

un autre ayant comme devise: „Om mani padme om", et qui est une réponse à la question V: On demande d'examiner l'influence que les radiations émises par le radium et d'autres analogues exercent sur la sensibilité d'un Sol vis à vis des électrolytes;

et un troisième portant l'épigraphe: „Ehrlich eingestandene und begründete Unsicherheit ist besser als scheinbare Sicherheit ohne die Angabe, worauf sie sich gründet"; il répond à la question XI, dans laquelle on demande des recherches sur les taches circulaires des pommes de terre, et sur la question s'il y a quelque relation entre cette maladie et la formation de cavités dans les pommes de terre.

Pour le premier travail, M. le Prof. H. A. Lorentz donne lecture du rapport qu'il a fait de concert avec les membres MM. les Proff. P. Zeeman et H. Haga. Ce rapport conduit à cette conclusion que, malgré les bonnes qualités du travail, la peine que l'auteur s'est évidemment donnée pour rendre son mémoire complet et la clarté et l'élégance du style, les sérieux défauts, comme le manque de netteté et de précision dans l'exposé des principes de la théorie des électrons, le traitement insuffisant de la question capitale concernant la thermo-électricité, ne permettent pas aux membres du jury de proposer le couronnement du mémoire.

Conformément à cet avis auquel se rallient les Directeurs, l'assemblée décide de ne pas accorder le prix à l'auteur de ce mémoire.

Le deuxième mémoire ne pouvait même pas être soumis à l'appréciation d'un jury, parce que M. le Prof. J. M. van Bemmelen, qui

avait proposé la question, reconnut bientôt que la réponse correspondait textuellement à un travail déjà publié ailleurs.

Quand au troisième mémoire, à part quelques remarques, le jugement émis par les Proff. J. RITSEMA BOS, E. VERSCHAFFELT et T. A. F. C. WENT était favorable, de sorte que le jury en recommandait le couronnement à l'unanimité.

Sur la proposition des Directeurs, conforme à cette conclusion, l'assemblée décida d'accorder la médaille d'or à l'auteur, qui, à l'ouverture du pli cacheté, se trouva être M. N. H. SWELLENGREBEL à Amsterdam.

M. le Prof. H. KAMERLINGH ONNES donna ensuite sa conférence „sur la liquéfaction des gaz", illustrée par des planches et par des expériences. L'orateur esquissa en grands traits l'historique de cette branche de la physique expérimentale, depuis la première liquéfaction d'un gaz, savoir le gaz ammoniac, par VAN MARUM, jusqu'à la liquéfaction et la solidification de l'hydrogène, obtenues de nos jours par M. DEWAR. A l'aide d'air, d'oxygène et d'hydrogène liquides, fabriqués en son laboratoire, M. KAMERLINGH ONNES démontra, par une série d'expériences bien réussies, les principales propriétés de ces corps et fit enfin passer sous les yeux du public de l'oxygène et de l'hydrogène solides.

Le Président remercia l'orateur, au nom des Directeurs et Membres, pour sa conférence intéressante et pour le spectacle remarquable et peu commun auquel il leur avait permis d'assister.

Après le choix de quelques questions de concours, l'assemblée nomma comme membres nationaux MM. H. J. LOVINK à La Haye, le Dr. J. P. LOTSY à Leyden, et le Dr. TH. J. OUDEMANS à Amsterdam, et comme membres étrangers Mme. SKLODOWSKA CURIE à Paris et le Prof. CAMILLE GOLGI à Pavie.

QUESTIONS MISES AU CONCOURS.

DÉLAI : JUSQU'AU 1er JANVIER 1908.

EXCEPTION FAITE POUR LA QUESTION II.

I.

La Société demande une étude expérimentale de la nature et de la composition chimiques d'une ou plusieurs espèces de tannins, non encore examinés ou dont la connaissance est insuffisante.

II.

La Société demande un aperçu des galles de Phytoptides qu'on rencontre en Hollande, une description précise de leurs habitants, et des détails sur la vie de quelques espèces de Phytoptides.

Délai: jusqu'au 1er janvier 1909.

III.

La Société désire une description des propriétés physiques du caoutchouc et de la gutta-percha, et une comparaison de ces propriétés avec celles d'autres substances capables de se gonfler (ou susceptibles d'imbibition), telles que la gélatine, l'agar, la cellulose, la fécule.

IV.

La Société demande des expériences nouvelles et convaincantes relatives à la formation d'hybrides chez les champignons.

V.

On demande de nouvelles recherches concernant la formation de la gomme chez les Drupacées.

VI.

A propos des considérations exposées dans les *Archives Néerlandaises*,

(2), 11, 273, 1906, la Société demande des recherches nouvelles, expérimentales ou prouvées par des expériences, sur les phénomènes de sympathie et d'antipathie des horloges.

VII.

La Société, jugeant qu'il peut être utile de fixer l'attention sur des questions assez simples en elles-mêmes, mais pour la solution desquelles les méthodes d'analyse mathématique existantes ne sont pas entièrement suffisantes, propose la question de concours suivante:

Comment doit-on placer $p_1 N$ sphères de rayon R_1 et $p_2 N$ sphères de rayon R_2 (N étant un nombre indéterminé), pour qu'ensemble elles occupent un espace aussi restreint que possible?

Quelles sont, s'ils existent, p_1 et p_2 étant donnés, les rapports critiques entre R_1 et R_2 pour lesquels une légère variation de ce rapport exige une disposition tout à fait différente des sphères pour arriver au plus petit espace?

Des solutions partielles, des déterminations de limites pour l'espace cherché, le traitement de cas particuliers, ou des solutions du problème correspondant dans l'espace à deux dimensions, pourront aussi être jugés dignes d'être couronnés, s'ils témoignent d'une originalité et d'une ingéniosité suffisantes.

DÉLAI: JUSQU'AU 1er JANVIER 1909.

EXCEPTION FAITE POUR LA QUESTION II.

I.

La Société demande une étude physico-mathématique du phénomène des vents de terre et de mer:

a. dans le cas d'une côte indéfinie.

b. dans le cas d'une langue de terre.

c. dans le cas d'une île ronde.

II.

La Société demande un aperçu critique des recherches qui ont été faites jusqu'ici au sujet des changements de génération des espèces de champignons de la rouille du genre *Melampsora* Castagne, et de nouvelles recherches relatives à une ou plusieurs espèces de ce genre, dont la variation de génération n'a pas encore été établie avec certitude.

A traiter avant le 1er janvier 1910.

III.

La Société demande un aperçu critique des diverses théories des phénomènes thermo-électriques, en y ajoutant, si l'occasion s'en présente, de nouvelles considérations relatives à ce sujet.

IV.

La Société demande une étude théorique des propriétés magnétiques des corps, fondée sur la théorie des électrons.

V.

On demande des recherches expérimentales sur l'influence de l'âge d'un Sol (solution colloïdale) sur sa sensibilité (faculté de coagulation) pour les électrolytes. Cette étude doit se rapporter à plusieurs sols et plusieurs électrolytes.

VI.

On demande d'examiner l'influence que les radiations émises par le radium et d'autres analogues exercent sur la sensibilité d'un sol vis à vis des électrolytes.

La Société recommande aux concurrents d'abréger autant que possible leurs mémoires, en omettant tout ce qui n'a pas un rapport direct avec la question proposée. Elle désire que la clarté soit unie à la concision,

et que les propositions bien établies soient nettement distinguées de celles qui reposent sur des fondements moins solides.

Elle rappelle, en outre, qu'aux termes d'une décision des Directeurs aucun mémoire écrit de la main de l'auteur ne sera admis au concours, et que même, une médaille eût-elle été adjugée, la remise n'en pourrait avoir lieu, si la main de l'auteur venait à être reconnue, dans l'intervalle, dans le travail couronné.

Les manuscrits des réponses ne seront pas rendus.

Les plis cachetés des mémoires non couronnés seront détruits sans avoir été ouverts. Il en sera toutefois excepté les plis accompagnant des travaux qui seraient reconnus comme n'étant qu'une copie d'ouvrages imprimés, en quel cas les noms des auteurs seront divulgués.

Tout membre de la Société a le droit de prendre part au concours, à condition que son mémoire, ainsi que le pli, soient marqués de la lettre L.

Le prix offert pour une réponse satisfaisante à chacune des questions proposées consiste, au choix de l'auteur, en une *médaille d'or* frappée au coin ordinaire de la Société et portant le nom de l'auteur et le millésime, ou en une somme de *cent-cinquante florins*; une prime supplémentaire de *cent-cinquante florins* pourra être accordée si le mémoire en est jugé digne.

Le concurrent qui remportera le prix ne pourra faire imprimer le mémoire couronné, soit séparément, soit de toute autre manière, sans en avoir obtenu l'autorisation expresse de la Société.

Les mémoires, écrits lisiblement, en *hollandais*, *français*, *latin*, *anglais*, *italien* ou *allemand* (mais non en caractères allemands), doivent être accompagnés d'un pli cacheté renfermant le nom de l'auteur, et envoyés *franco* au Secrétaire de la Société, M. le Dr. J. Bosscha, à Harlem.

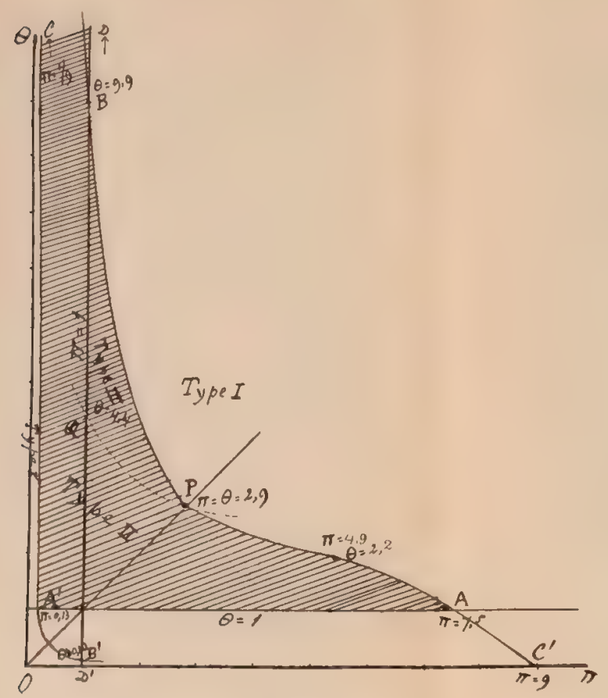


Fig. 1.

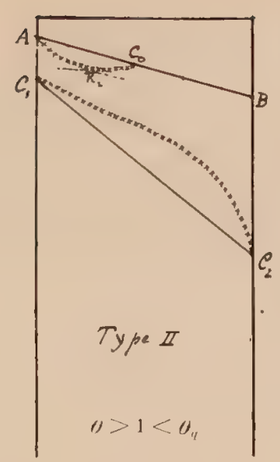


Fig. 2a.

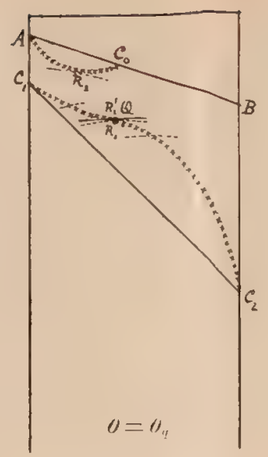


Fig. 2b.

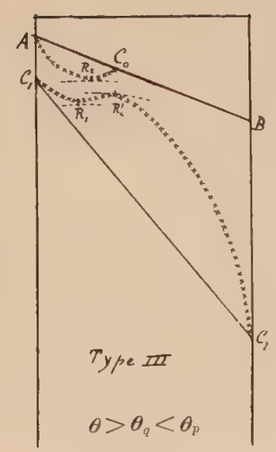


Fig. 2c.

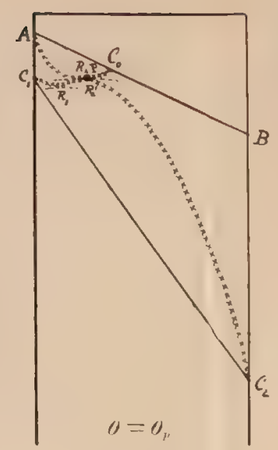


Fig. 2d.

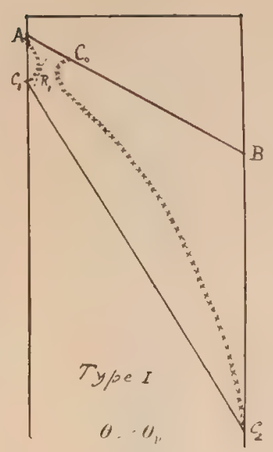


Fig. 2e.

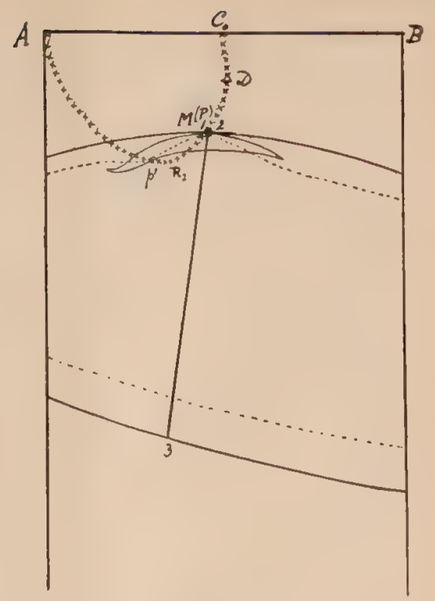


Fig. 3a

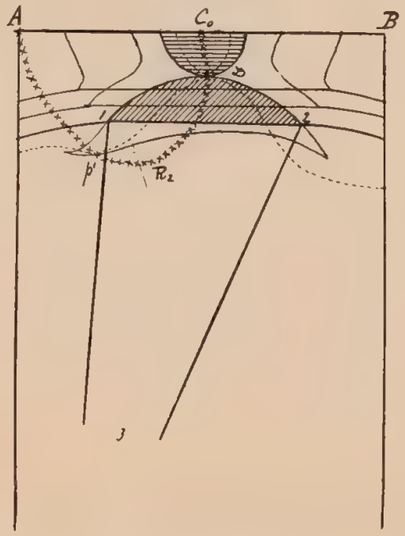


Fig. 3c.

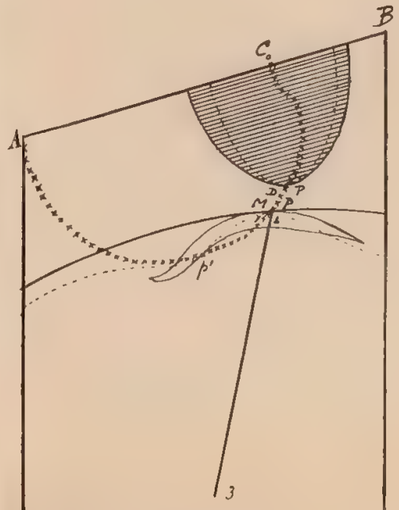


Fig. 4a.

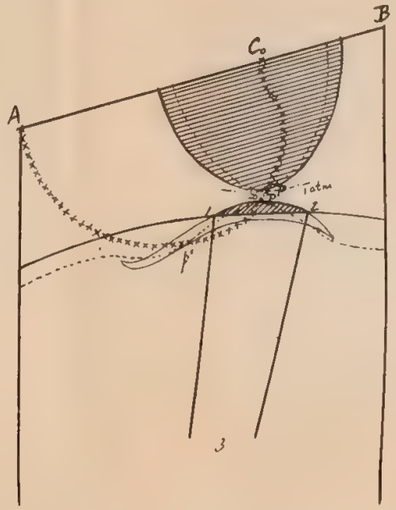


Fig. 4b.

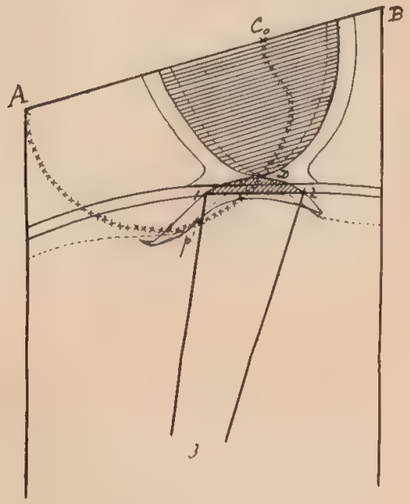


Fig 4c.

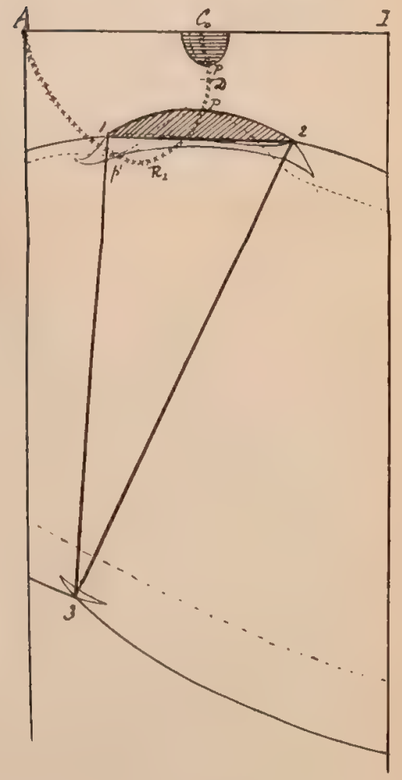


Fig. 3b.

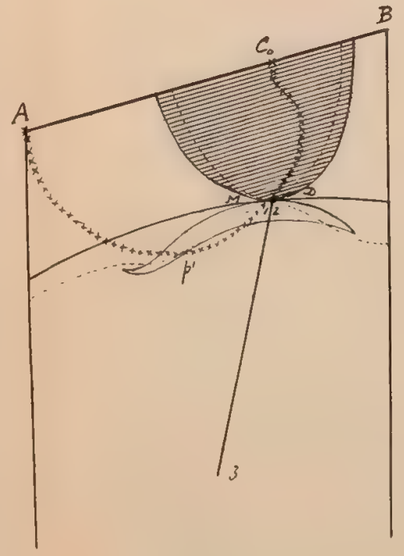


Fig 5a.

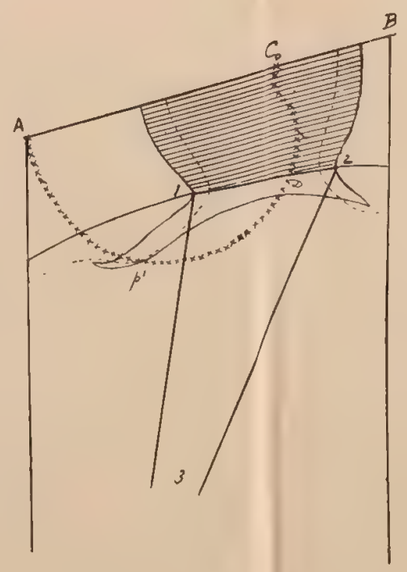


Fig. 5b.

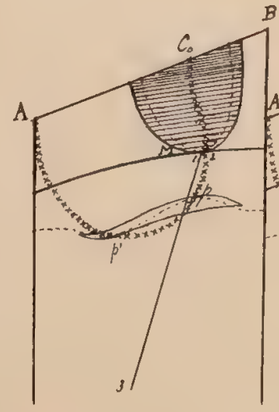


Fig. 6a.

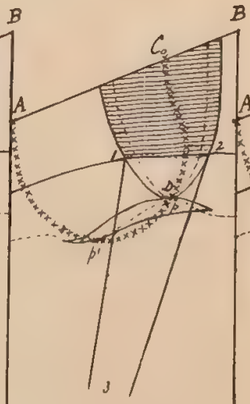


Fig. 6b.

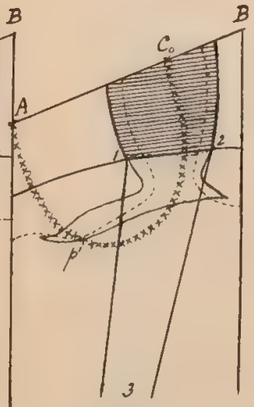


Fig. 6c.

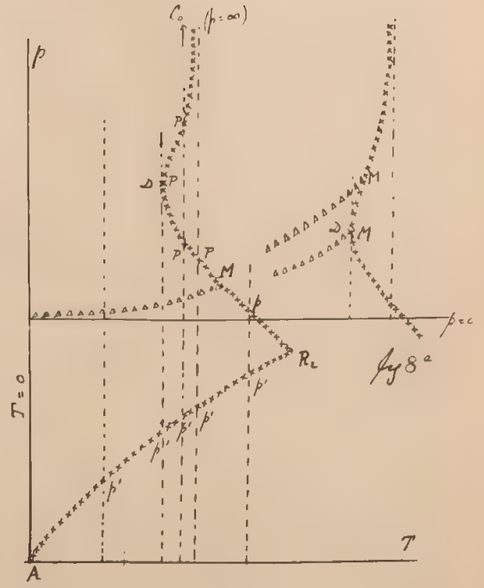


Fig. 7.

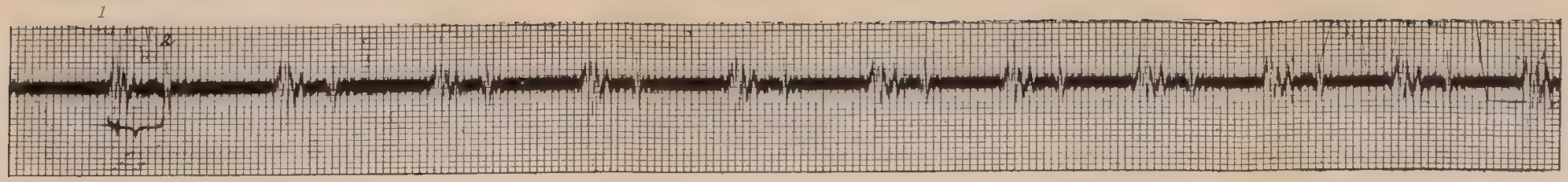


Fig. 1. *Ba.* Pointe du cœur. Absc. 1 mm. = 0 04 sec.

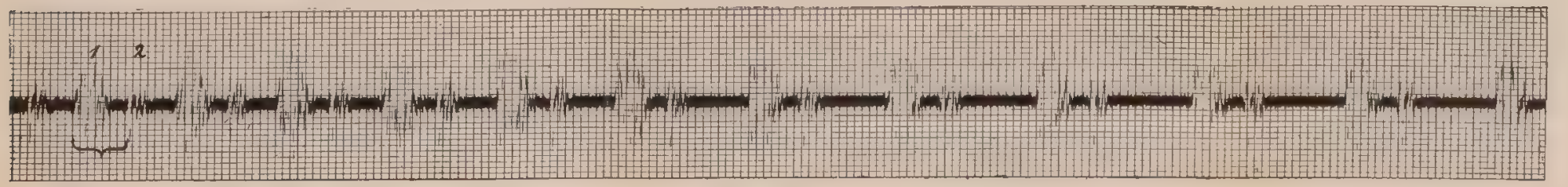


Fig. 2. *Fl.* Pointe du cœur. Absc. 1 mm. = 0,04 sec.

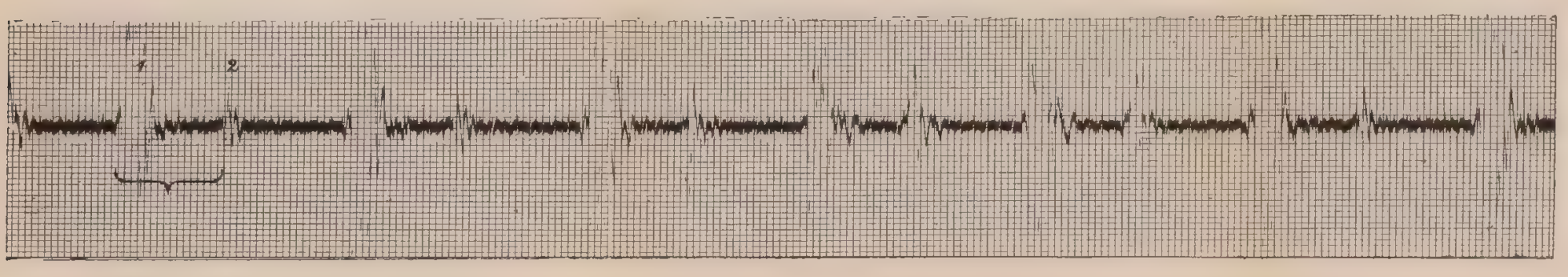


Fig. 3. *Mo.* Pointe du cœur. Absc. 1 mm. = 0,02 sec.

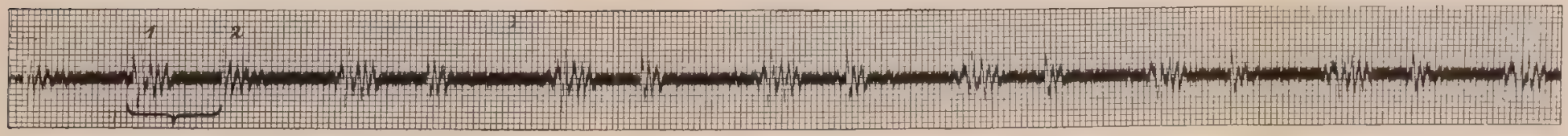


Fig. 4. *Me.* Pointe du cœur. Absc. 1 mm. = 0,02 sec.

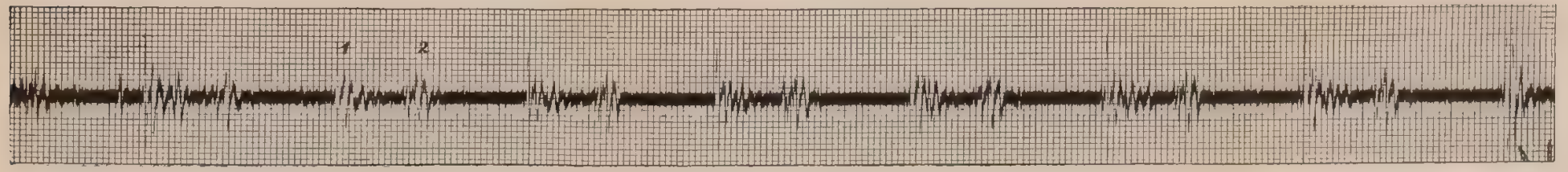


Fig. 5. *Ba.* Art. pulm. Absc. 1 mm. = 0,02 sec.

W. Einthoven. L'enregistrement des bruits du cœur de l'homme à l'aide du galvanomètre à corde.

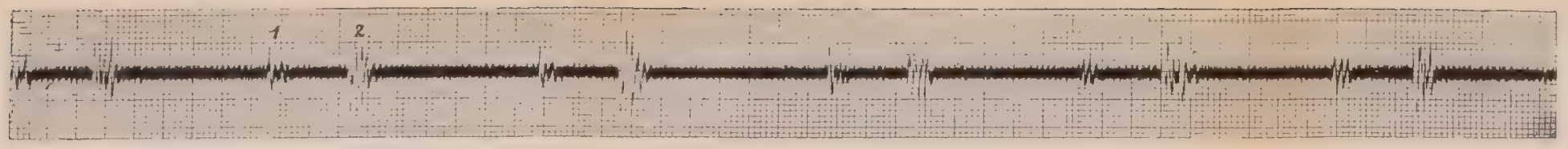


Fig. 6. *Ou.* Art. pulm. Absc. 1 mm. = 0,02 sec.

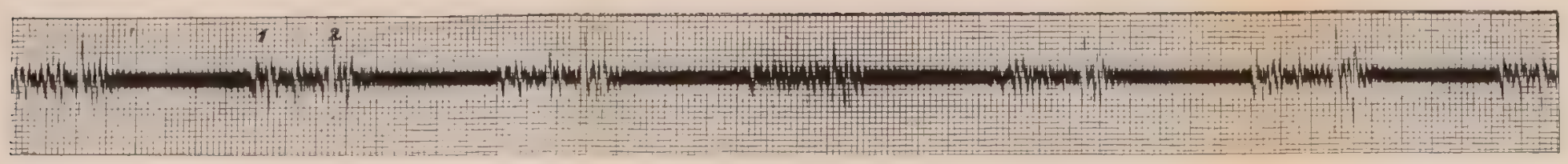


Fig. 7. Pat. *v. d. B* Art. pulm. Absc. 1 mm. = 0,02 sec.

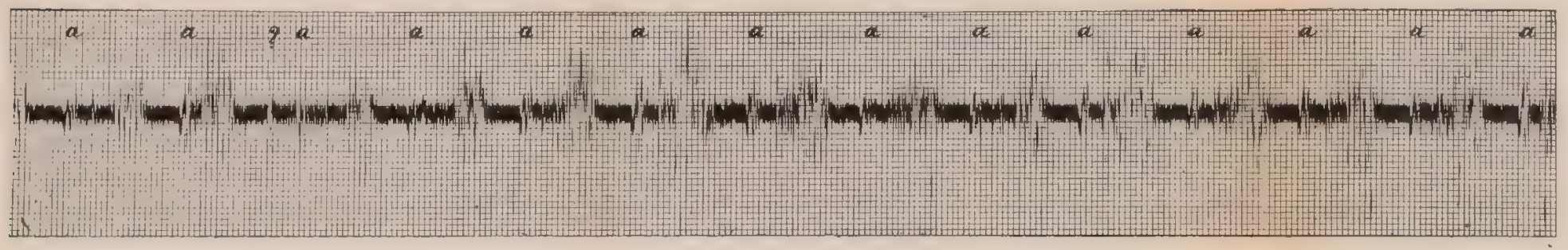


Fig. 8. Pat. *d. R.* Pointe du cœur. Absc. 1 mm. = 0,04 sec.

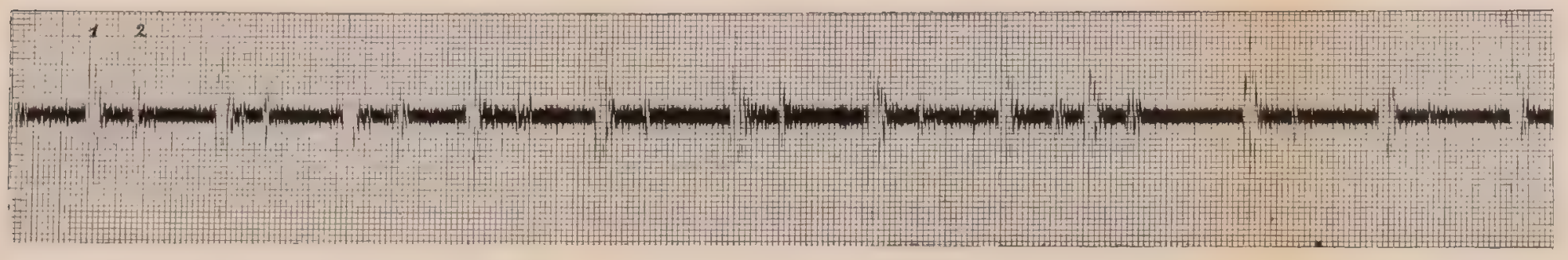


Fig. 9. Pat. *d. R.* Art. pulm. Absc. 1 mm. = 0,04 sec.

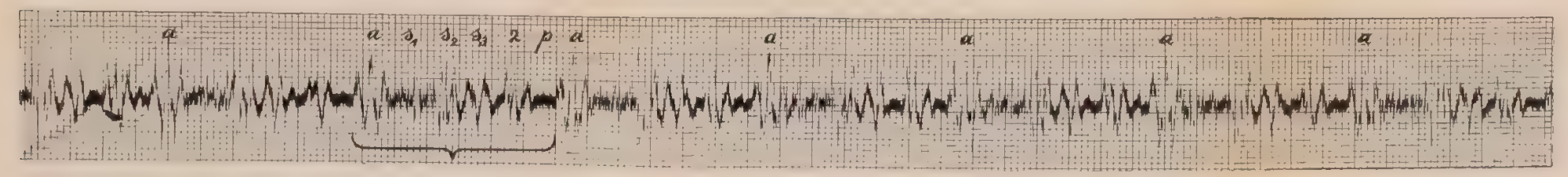


Fig. 10. Pat. *Ro.* Pointe du cœur. Absc. 1 mm. = 0,02 sec.

W. Einthoven. L'enregistrement des bruits du cœur de l'homme à l'aide du galvanomètre à corde.

Fig. 1.

H. Kamerlingh Onnes et C. Zakrzewski. Contributions à la connaissance de la surface ψ. IX.

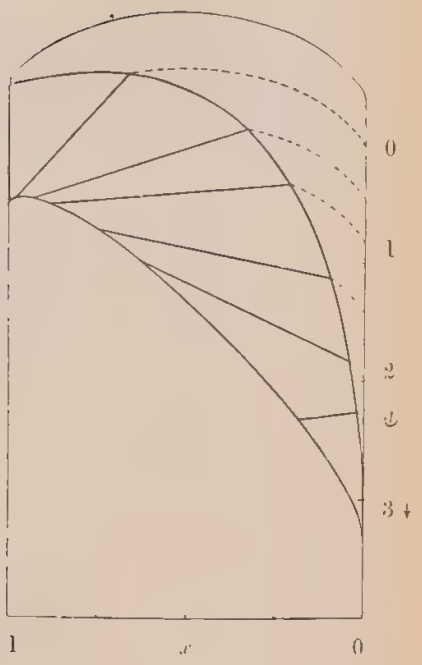


Fig. 2.

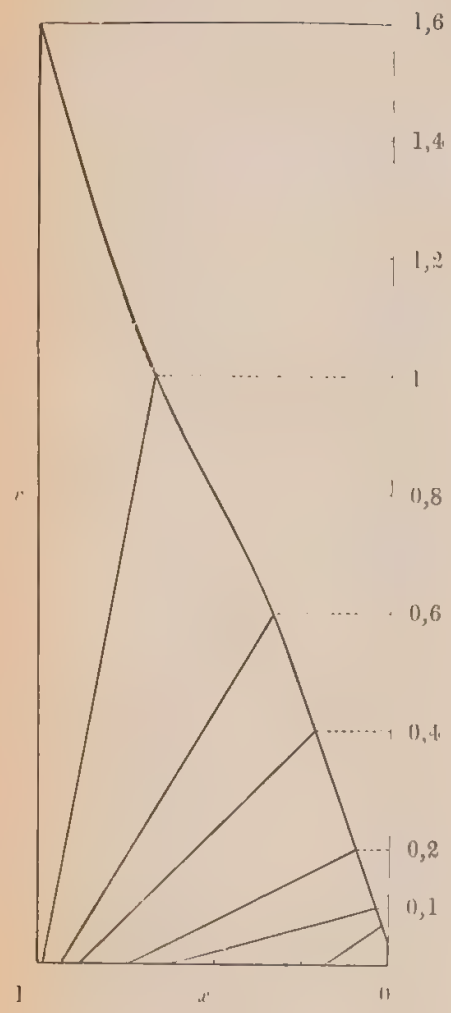


Fig. 3.

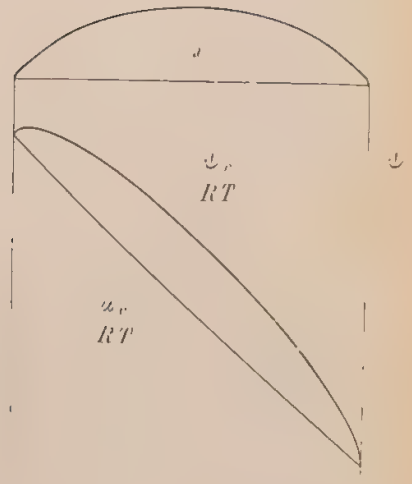


Fig. 5.

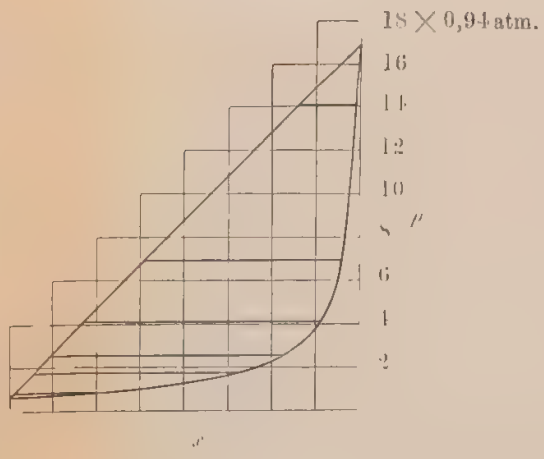


Fig. 4

H. Kamerlingh Onnes et C. Zakrzewski. Contributions à la connaissance de la surface ψ. IX.

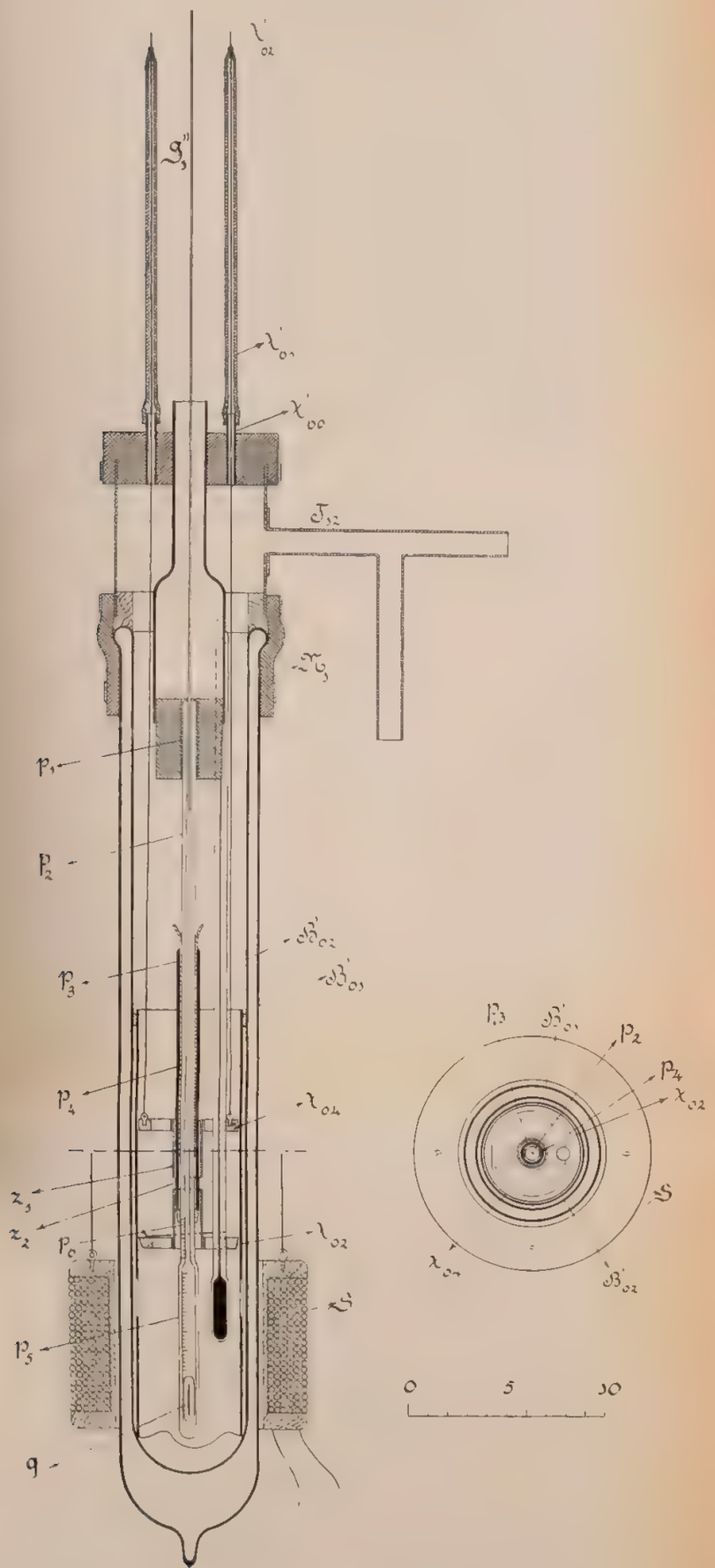


Fig. 3.

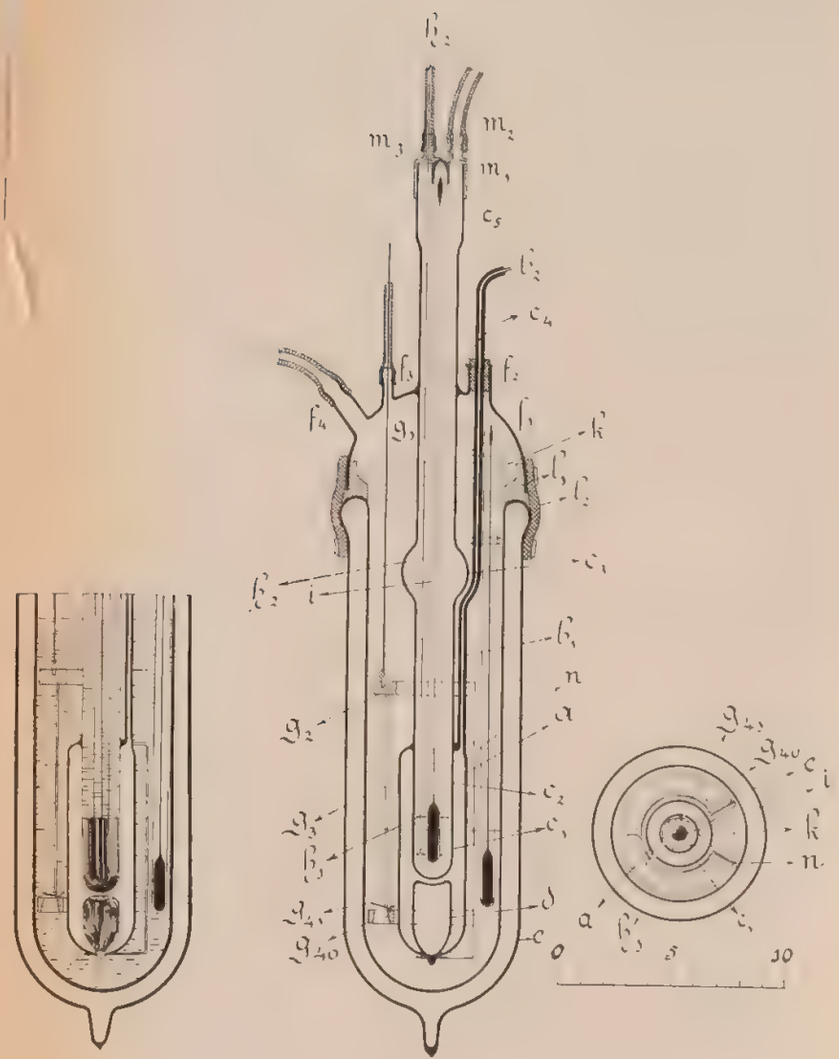


Fig. 2.

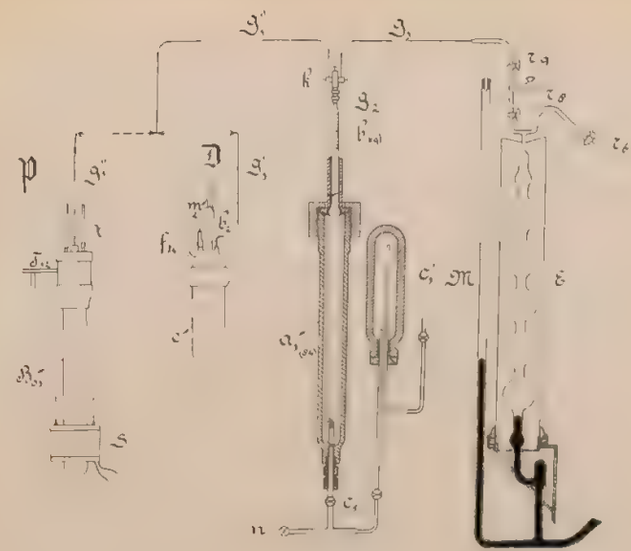
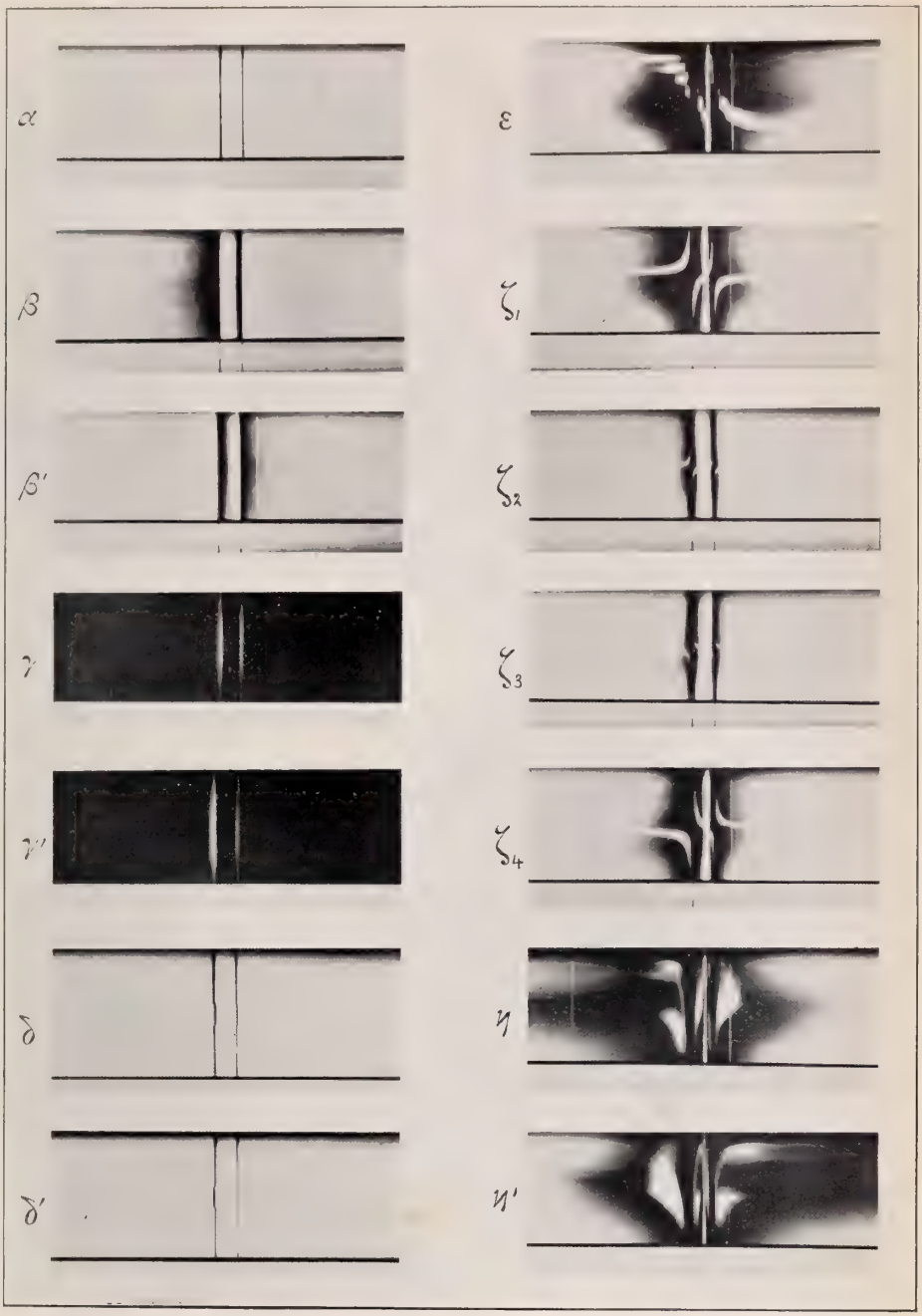
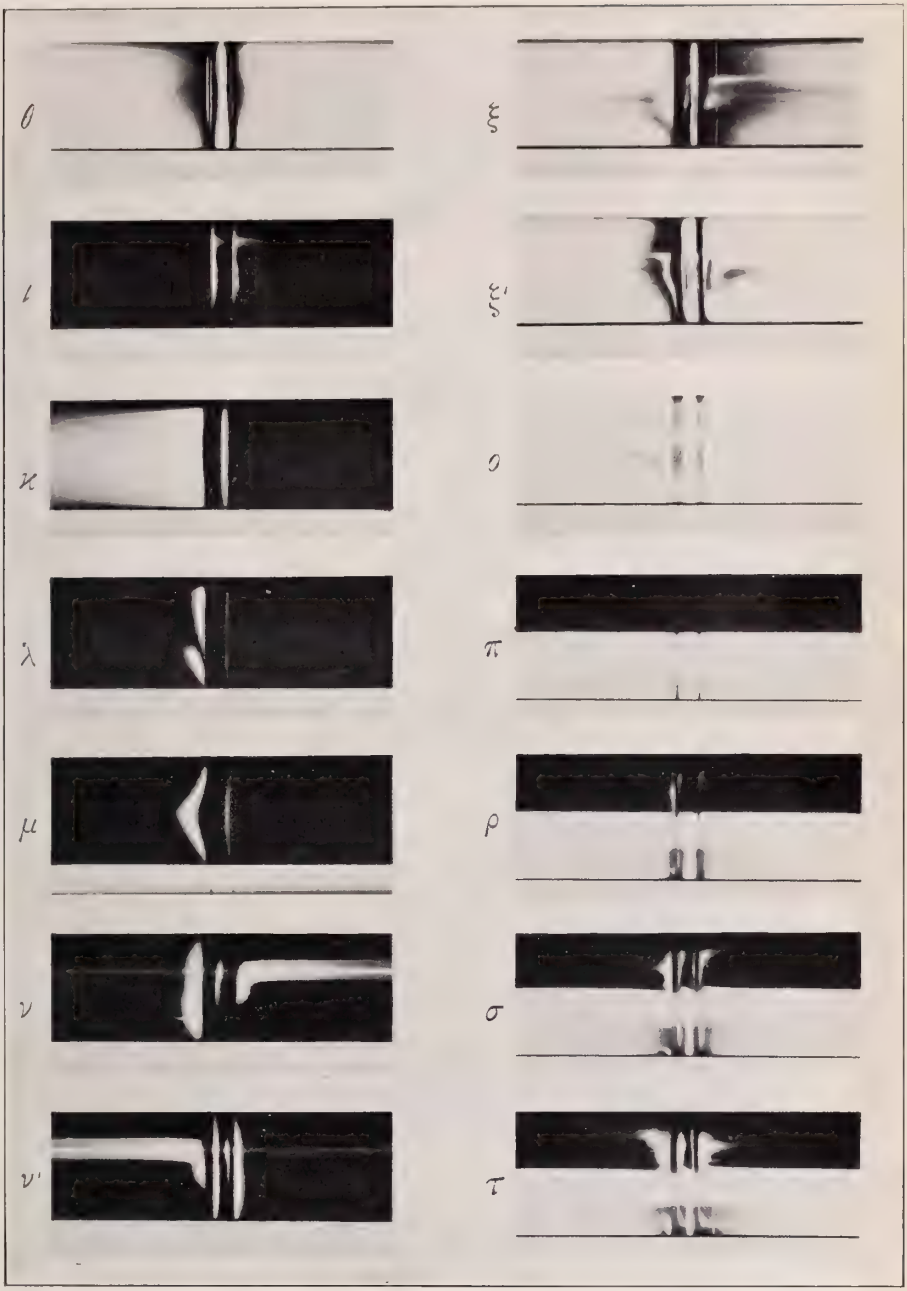


Fig. 1

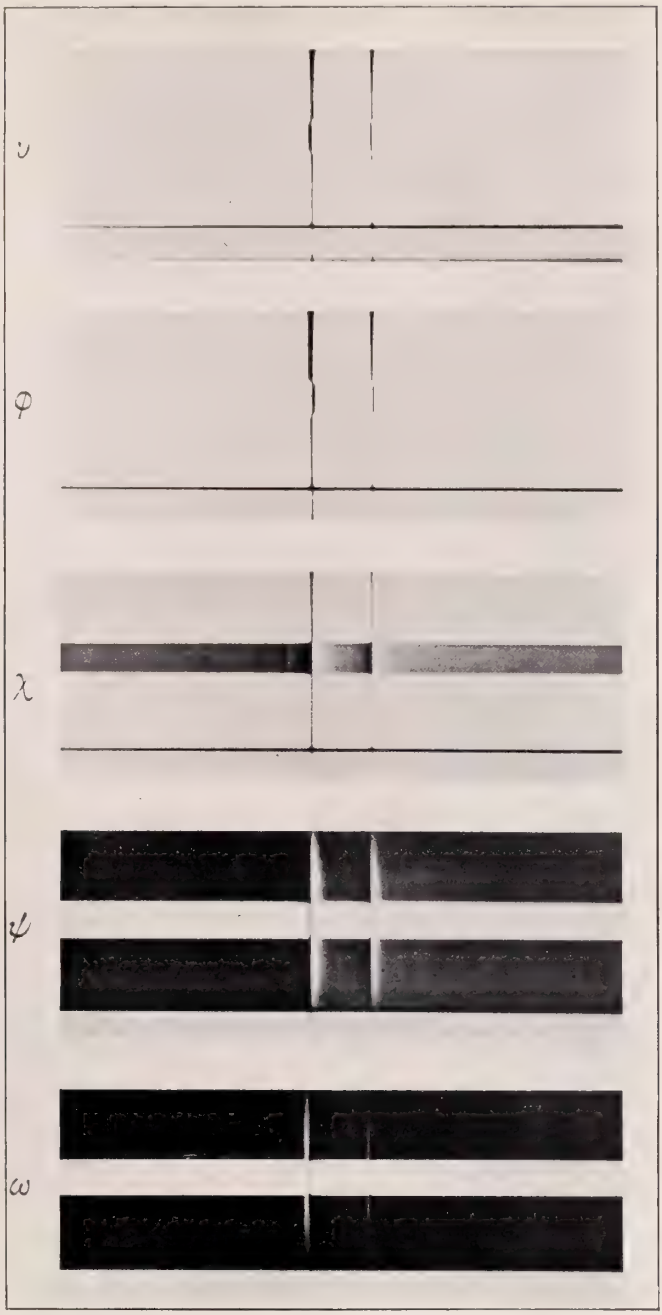
H. Kamerlingh Onnes et C. Zakrzewski. Contributions à la connaissance de la surface ψ. IX.



W. H. Julius. La distribution variable de la lumière dans les bandes de dispersion et sa signification pour la spectroscopie et l'astrophysique.



W. H. Julius. La distribution variable de la lumière dans les bandes de dispersion et sa signification pour la spectroscopie et l'astrophysique.



W. H. Julius. La distribution variable de la lumière dans les bandes de dispersion et sa signification pour la spectroscopie et l'astrophysique.

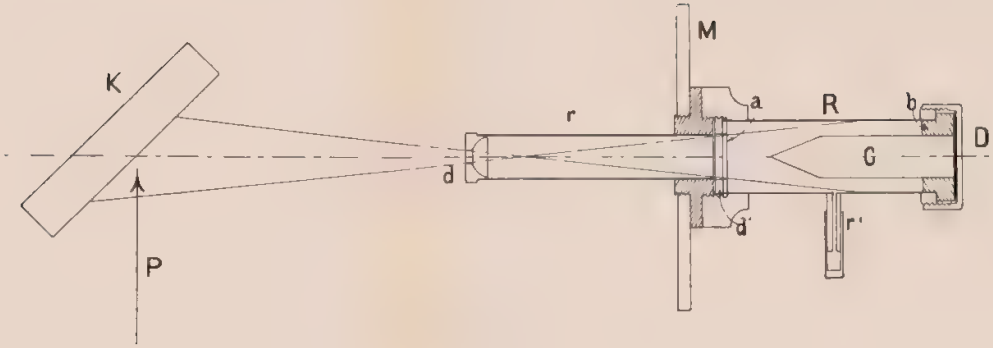


Fig. 1.

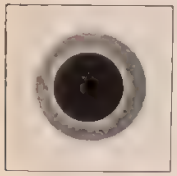


Fig. 2.

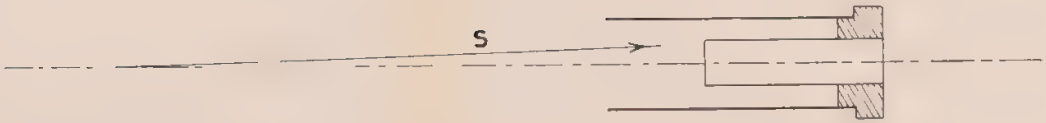


Fig. 3.

H. Haga. Polarisation et absorption sélective.

actes et Nat.
)8-26571

AMNH LIBRARY
100215526